Ottmar Loos
Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

Zur Vorlesung Topologie, SS 2003

Das Zornsche Lemma

Geordnete Mengen. Sei X eine durch die Relation $\leq$ (partiell) geordnete Menge. Es gelten also die Regeln

$$\begin{aligned} &x \leq x, \\ &x \leq y \text{ und } y \leq x \quad \Longrightarrow \quad x = y, \\ &x \leq y \text{ und } y \leq z \quad \Longrightarrow \quad x \leq z. \end{aligned}$$

Es wird aber nicht verlangt, daß für je zwei Elemente x und y eine der Relationen $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt. Ist das jedoch für alle Elemente einer Teilmenge $T \subset X$ der Fall, dann heißt T *total geordnet* oder eine *Kette*.

Ein Element s heißt eine *obere Schranke* einer Teilmenge Y, falls $y \leq s$ für alle $y \in Y$. Eine obere Schranke heißt das *Supremum* von Y, wenn sie die kleinste obere Schranke von Y ist, also: $y \leq s$ für alle $y \in Y$, und wenn auch $y \leq t$ für alle $y \in Y$, dann ist $s \leq t$. In diesem Fall ist s eindeutig bestimmt und wird mit $s = \sup Y$ bezeichnet. Eine Teilmenge Y braucht kein Supremum, ja nicht einmal obere Schranken zu besitzen. Selbst wenn das Supremum existiert, gehört es im Allgemeinen nicht zu Y.

Ein Element $m \in X$ heißt ein *maximales Element*, wenn es von keinem $x \in X$ übertroffen wird, d.h., es gibt kein x mit $x > m$. Das bedeutet nicht notwendig, daß $m \geq x$ für alle $x \in X$, denn es könnte ja mit m unvergleichbare Elemente geben. Weiter ist ein maximales Element in keiner Weise eindeutig bestimmt.

Schließlich führen wir noch die gewohnten Bezeichnungen für Intervalle ein, also $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$, $[a, c[= \{x : a \leq x < c\}$, $[a, \infty[= \{x : a \leq x\}$ usw. Das Symbol ∞ bezeichnet hier also kein Element von X, sondern dient nur der Schreibweise für das nach rechts unbeschränkte Intervall.

Das Zornsche Lemma. *Eine nicht leere partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, hat ein maximales Element.*

Dieses Lemma geht zurück auf den deutschen Mathematiker Max Zorn (A remark on method in transfinite algebra. Bull. Am. Math. Soc. **41** (1935), 667-670). Oft genügt auch die folgende schwächere Aussage, die dieselbe Schlußfolgerung aus einer etwas stärkeren Voraussetzung zieht:

Das kleine Zornsche Lemma. *Eine nicht leere partiell geordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge ein Supremum besitzt, hat ein maximales Element.*

Weil die Voraussetzungen in diesen beiden Aussagen oft vorkommen, haben sie eigene Namen: X heißt *induktiv* (bzw. *strikt induktiv*) geordnet, falls jede nichtleere Kette T in X eine obere Schranke (bzw. ein Supremum) in X besitzt.

Der Beweis des Zornschen Lemmas läßt sich relativ leicht auf den des kleinen zurückführen, siehe Seite 3 unten. Der (indirekte) Beweis des kleinen Zornschen Lemmas wiederum beruht auf der folgenden einfachen Idee: Hätte X kein maximales Element, dann gäbe es zu jedem $x \in X$ ein $y_x > x$. Wähle ein solches $y_x =: f(x)$ für alle $x \in X$. Dann ist $f : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, daß $f(x) > x$ für alle $x \in X$. Das ist ein Widerspruch zu folgendem

Fixpunktsatz für strikt induktiv geordnete Mengen. *Sei $X \neq \emptyset$ strikt induktiv geordnet und sei $f : X \to X$ eine Abbildung mit $f(x) \geq x$ für alle $x \in X$. Dann hat f einen Fixpunkt.*

Im Beweis dieses Fixpunktsatzes steckt die eigentliche Arbeit. Wir führen erst zwei Reduktionsschritte aus, die den Beweis vereinfachen.

1. Reduktionsschritt. X hat ein kleinstes Element.

Sei $a \in X$ beliebig und betrachte das Intervall $[a, \infty[$. Das ist nicht leer, hat a als kleinstes Element, und ist wegen der vorausgesetzten Eigenschaft von f auch stabil unter f. Wenn weiter $\emptyset \neq T \subset [a, \infty[$ eine Kette mit Supremum $s \in X$ ist, dann ist auch $s \in [a, \infty[$, denn $a \leq t \leq s$ für alle $t \in T$ impliziert $s \geq a$. Wenn f einen Fixpunkt in $[a, \infty[$ hat, dann erst recht in X. Wir können also X durch $[a, \infty[$ ersetzen und annehmen, daß a das kleinste Element von X ist.

Bevor wir den zweiten Reduktionsschritt ausführen, definieren wir: Eine Teilmenge $Y \subset X$ heißt *stabil*, falls sie die folgenden drei Eigenschaften hat:

$$a \in Y, \tag{1}$$

$$f(Y) \subset Y, \tag{2}$$

$$\sup T \in Y, \text{ für jede Kette } T \subset Y. \tag{3}$$

Offenbar ist X selbst stabil.

2. Reduktionsschritt. (X, f) ist irreduzibel in dem Sinne, daß es keine echte stabile Teilmenge besitzt.

Dazu sei $\mathfrak{Y}$ die Menge aller stabilen Teilmengen von X und sei $D = \bigcap \mathfrak{Y}$ ihr Durchschnitt. Dann ist sofort zu sehen, daß auch D stabil ist. Andrerseits besitzt nach Definition D keine echte stabile Teilmenge. Wir können also X durch D ersetzen und somit X irreduzibel annehmen.

Die entscheidende Beweisidee ist nun, sogenannte Trennpunkte zu betrachten:

Definition. Ein Element $c \in X$ heißt ein *Trennpunkt*, falls

$$f\big([a, c[\big) \subset [a, c]. \tag{4}$$

Trennpunkte gibt es immer, denn wegen $f\big([a, a[\big) = f(\emptyset) = \emptyset \subset [a, a] = \{a\}$ ist jedenfalls a ein Trennpunkt.

Lemma 1. *Für einen Trennpunkt c gilt*

$$X = [a, c] \cup [f(c), \infty[. \tag{5}$$

Wenn also $c < f(c)$, dann wird X tatsächlich durch c in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt („getrennt“), daher die Bezeichnung.

Beweis. Sei Y die in (5) rechts stehende Menge. Wegen der Irreduzibilität von (X, f) genügt es zu zeigen, daß Y stabil ist, also die Bedingungen (1)–(3) erfüllt.

Zu (1): Klar, weil $a \in [a, c] \subset Y$.

Zu (2): Es gilt

$$\begin{aligned} f\big([a, c]\big) &= f\big([a, c[\cup \{c\}\big) = f\big([a, c[\big) \cup \{f(c)\} \\ &\subset [a, c] \cup \{f(c)\} \subset Y, \end{aligned}$$

und für $x \in [f(c), \infty[$ ist $f(x) \geq x \geq f(c)$, also $f(x) \in [f(c), \infty[$.

Zu (3): Sei $T \subset Y$ eine Kette und $s = \sup T$.

1. Fall: $T \subset [a, c]$. Dann ist c eine obere Schranke von T, also $s \leq c$ und somit $s \in [a, c] \subset Y$.

2. Fall: $T \not\subset [a, c]$. Dann gibt es ein $t \in T \cap [f(c), \infty[$, also $t \geq f(c)$. Folglich ist auch $s \geq t \geq f(c)$, und wieder $s \in [f(c), \infty[\subset Y$.

Lemma 2. *Jeder Punkt von X ist Trennpunkt.*

Beweis. Wegen der Irreduzibilität genügt es wieder zu zeigen, daß die Menge C der Trennpunkte die Eigenschaften (1)–(3) hat.

Zu (1): Wie schon bemerkt, ist $a \in C$.

Zu (2): Sei $c \in C$. Wir zeigen $f(c) \in C$, d.h., wegen (4),

$$f\big([a,\ f(c)[\big) \subset [a,\ f(c)]. \tag{6}$$

Sei also $x < f(c)$. Dann ist, nach (5), $x \in [a, c] = [a, c[\cup \{c\}$ und folglich

$$\begin{aligned} f(x) &\in f\big([a, c[\big) \cup \{f(c)\} \\ &\subset [a, c] \cup \{f(c)\} && \text{(nach (4))} \\ &\subset [a,\ f(c)] && \text{(weil } c \leq f(c)\text{).} \end{aligned}$$

Das beweist (6).

Zu (3): Sei $T \subset C$ total geordnet und $s = \sup T$. Wir zeigen $s \in C$, d.h.,

$$f\big([a, s[\big) \subset [a, s]. \tag{7}$$

Dazu sei $x \in [a, s[$, also $x < s$. Dann ist x keine obere Schranke für T. Daher gibt es ein $t \in T$, das nicht $\leq x$ ist (also entweder $t > x$ oder t und x unvergleichbar). Wegen $t \leq f(t)$ ist dann erst recht $f(t)$ nicht $\leq x$, ansonsten wäre $t \leq f(t) \leq x$ und damit doch $t \leq x$. Weil $t \in T \subset C$, also insbesondere t ein Trennpunkt ist, folgt nach (5) (angewandt auf t statt c), daß $x \in [a, t]$. Weiter ist $x = t$ unmöglich, denn t ist ja nicht $\leq x$. Also gilt sogar $x \in [a, t[$. Nach (4) folgt nun $f(x) \in [a, t] \subset [a, s]$ (wegen $t \leq s$), und damit ist (7) gezeigt.

Schluß des Beweises des Fixpunktsatzes. Aus Lemma 2 folgt zunächst: X selbst ist total geordnet. Dazu seien $x, y \in X$. Weil x ein Trennpunkt ist, gilt nach (5) entweder $y \in [a, x]$ oder $y \in [f(x), \infty[$. Das bedeutet $y \leq x$ oder $y \geq f(x) \geq x$, wie behauptet.

Nun existiert also $z = \sup X$. Weiter ist $f(z) \geq z$ nach der vorausgesetzten Eigenschaft von f, und andrerseits $f(z) \leq z$ wegen der Supremumseigenschaft von z. Daher ist $z = f(z)$ ein Fixpunkt von f.

Beweis des Zornschen Lemmas. Sei $X \neq \emptyset$ eine induktiv geordnete Menge, und sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller total geordneten nicht leeren Teilmengen von X. Dann ist $\mathfrak{X} \neq \emptyset$, denn z.B. ist $\{x\} \in \mathfrak{X}$ für alle $x \in X$. Weiter ist $\mathfrak{X}$ partiell durch Inklusion geordnet: $S \leq T :\Longleftrightarrow S \subset T$. Es ist sogar strikt induktiv geordnet: Um das zu sehen, betrachte eine nicht leere Kette $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{X}$. Dann ist jedes $T \in \mathfrak{T}$ seinerseits eine nicht leere Kette in X. Wir setzen $S := \bigcup \mathfrak{T}$ und behaupten, daß $S = \sup \mathfrak{T}$ das gesuchte Supremum von $\mathfrak{T}$ ist.

Zunächst ist zu verifizieren, daß $S \in \mathfrak{X}$, also S selbst eine nicht leere Kette in X ist. Klarerweise ist $S \neq \emptyset$. Seien $x, y \in S$, etwa $x \in T_1$ und $y \in T_2$, für geeignete $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$. Weil $\mathfrak{T}$ durch Inklusion total geordnet ist, gilt entweder $T_1 \subset T_2$ oder $T_2 \subset T_1$. Im ersten Fall ist $x, y \in T_2$ und daher, weil T_2 total geordnet ist, $x \leq y$ oder $y \leq x$. Analog schließt man im zweiten Fall. Damit folgt nun $S = \sup \mathfrak{T}$ in $\mathfrak{X}$ sofort, weil in $\mathfrak{X}$ die Inklusion als Ordnungsrelation gewählt wurde.

Nach dem kleinen Zornschen Lemma hat also $\mathfrak{X}$ ein maximales Element, etwa M. Dies ist seinerseits eine nicht leere Kette in X, und weil X induktiv geordnet ist, gibt es eine obere Schranke m von M in X. Wir behaupten, daß dieses m ein maximales Element von X ist. Zum Beweis nehmen wir indirekt an, es gäbe ein $x \in X$ mit $x > m$. Dann ist $M' := M \cup \{x\}$ eine echte Obermenge von M, weil ja $x \notin M$, und es ist immer noch eine Kette, denn je zwei Elemente von M sind vergleichbar, und x ist wegen $y \leq m < x$ mit jedem Element $y \in M$ vergleichbar. Also ist $M' \in \mathfrak{X}$ echt größer als M, im Widerspruch zur Maximalität von M.