Stückweise glatte Mengen und der Satz von Stokes: Zur Didaktik der Analysisvorlesung im 3. Semester

Ottmar Loos
Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, Technikerstr. 25/7
A-6020 Innsbruck, Austria
E-mail: ottmar.loos@uibk.ac.at

Holger Petersson zum 60. Geburtstag gewidmet

Einleitung

An den deutschsprachigen Universitäten hat sich für die Analysisvorlesungen in den ersten drei Semestern ein gewisser Stoffkanon etabliert, den man schlagwortartig folgendermaßen zusammenfassen kann:

Analysis 1: Differential- und Integralrechnung in einer Variablen,
Analysis 2: Differentialrechnung in mehreren Variablen, gewöhnliche Differentialgleichungen,
Analysis 3: Integralrechnung in mehreren Variablen.

Hierbei bietet — vom Standpunkt des Dozenten aus gesehen — die Vorlesung Analysis 1 die geringsten Schwierigkeiten, dicht gefolgt von der Vorlesung Analysis 2. Für beide gibt es eine Reihe ausgezeichneter Lehrbücher, die zudem in ihrer Stoffauswahl und Darstellung ohne große Änderung als Vorlage für eine Vorlesung dienen können. Mustergültig in dieser Hinsicht ist das Lehrbuch „Analysis 1“, und mit geringen Abstrichen auch „Analysis 2“, von O. Forster [**5**, **6**].

Für die Vorlesung Analysis 3 ist dies nach meinen Erfahrungen nicht mehr der Fall. Die Ursachen hierfür sind, wie üblich, zwei miteinander in Konflikt stehende Anforderungen an eine solche Vorlesung, nämlich

- Bewältigung (in der gegebenen Zeit von etwa 14 Wochen à 4 Stunden) eines Stoffes, der sowohl im Umfang wie im Niveau erheblich anspruchsvoller ist als der der beiden anderen Vorlesungen,
- unter Wahrung einer gewissen mathematischen Integrität, das heißt also: Vorführung (fast) aller Beweise sowie von Beispielen und motivierenden Erklärungen.

Der Stoff gliedert sich in natürlicher Weise in zwei Teile, einen analytischen und einen eher geometrischen. Unter dem analytischen Teil verstehe ich dabei die Entwicklung des Lebesgue-Integrals im $\mathbf{R}^n$ einschließlich der Konvergenzsätze, des Satzes von Fubini, der Transformationsformel, und der Behandlung parameterabhängiger Integrale, eventuell auch des Satzes von Fischer-Riesz. Manchmal, etwa in den Büchern von Heuser [**9**] oder Walter [**14**], wird noch das n-dimensionale Riemann-Integral gebracht. Die Tendenz geht jedoch sicherlich dahin, gleich mit dem Lebesgue-Integral zu beginnen. Hierfür gibt es mittlerweile mehrere sehr gut ausgearbeitete Zugänge [**1**, **7**, **10**, **14**]. Von Interesse ist vielleicht auch die von Kurzweil und McShane stammende Methode, das Lebesgue-Integral mit Hilfe Riemannscher Summen einzuführen, die im Vorwort von [**14**] erwähnt und in [**11**] dargestellt ist. Insgesamt scheint mir dieser Teil der Vorlesung Analysis 3 bereits recht kanonisch zu sein, und läßt sich bei Konzentration auf das Wesentliche, etwa Beweis der Konvergenzsätze, des Satzes von Fubini und der Transformationsformel nicht gerade unter den schwächsten Voraussetzungen, auch in einem halben Semester bewältigen.

Anders liegen die Dinge beim geometrischen Teil der Vorlesung Analysis 3. Damit meine ich die Entwicklung des Kalküls der alternierenden Differentialformen, die Integration über niederdimensionale Teilmengen des $\mathbf{R}^n$, und die Integralsätze von Gauß und Stokes. Ist in der Vorlesung über lineare Algebra eine gewisse Vorarbeit geleistet worden, so lassen sich die alternierenden Differentialformen recht schnell behandeln. Ein gewisser Standardstoff scheint sich herauskristallisiert zu haben: Äußeres Produkt, Normalform, äußere Ableitung, Zurückholen unter Abbildungen. Zur Motivation und Veranschaulichung ist [**8**, S. 176ff] unübertroffen.

Es ist nach meiner Meinung der verbleibende Stoff, der die meisten Schwierigkeiten verursacht. Ein Blick in ältere Lehrbücher zeigt, daß bei der Behandlung der Flächenintegrale und Integralsätze der ohnehin im Vergleich zu heute wenig formale Stil neue Höhen (oder Tiefen) erreichen kann. Der Grund hierfür mag wohl darin zu suchen sein, daß ein exakter, allgemein akzeptierter Begriffsapparat noch gar nicht vorhanden war. Das Unbehagen über diese Situation brachte eine Reihe von Lösungsvorschlägen hervor, denen allesamt zwei Dinge gemeinsam sind: Bis man in der Lage ist, das Integral einer Differentialform sinnvoll hinzuschreiben, braucht es viele komplizierte Begriffsbildungen, und selbst dann ist man von der praktischen Berechnung eines solchen Integrals noch weit entfernt.

Diese Entwicklung hat dazu geführt, daß die Lehrbücher zur Analysis 3 immer umfangreicher geworden sind, und die bei [**5**] vorhandene so schöne Übereinstimmung zwischen Vorlesungsstoff und Lehrbuchstoff völlig verloren gegangen ist. Der bisherige Höhepunkt ist im Buch von Chatterji [**3**] zu finden, dessen erster Band (Analyse vectorielle) 592 Seiten umfaßt. Hierfür stehen (nach Auskunft des Autors im Vorwort) dem Dozenten 6 Wochen einer dreistündigen Vorlesung mit zweistündigen Übungen zur Verfügung. Aber auch in weniger extremen Fällen, etwa im Buch von Königsberger [**10**], ist das Mißverhältnis zwischen der Fülle des Stoffes und der zur Verfügung stehenden Zeit eklatant. Der Zweck dieses Artikels ist, einen möglichen Ausweg aus dem beschriebenen Dilemma zu skizzieren.

1. Integration über Flächen im $\mathbf{R}^n$

Überblickt man die gängige Literatur, so gibt es im wesentlichen zwei Zugänge zu diesem Thema. Entweder es wird über Ketten, also formale Linearkombinationen von Äquivalenzklassen differenzierbarer Abbildungen eines Parameterquaders $Q \subset \mathbf{R}^p$ in den $\mathbf{R}^n$, integriert, oder über (orientierte) Untermannigfaltigkeiten.

Der erste Zugang (siehe etwa [**2**, **8**, **13**]) führt über den leicht zu beweisenden Satzes von Gauß für einen Quader sehr schnell zur formalen Stokesformel für Ketten. Nichts gegen den Begriff der Kette an der richtigen Stelle — in der algebraischen Topologie —, aber für die Vorlesung Analysis 3 halte ich ihn für verfehlt. Nach meinen Erfahrungen hat ein Student der Mathematik im dritten Semester (und ein Student der Physik in jedem Semester) noch große Schwierigkeiten mit dem Begriff einer Äquivalenzklasse, und erst recht mit formalen Linearkombinationen. Der Zugang über Ketten wird in [**8**] noch weiter verfeinert zum Begriff der stückweise glatten Fläche mit stückweise glattem Rand (S. 135), definiert als eine Äquivalenzklasse semiregulärer Pflasterungen. Letztere bildet vom rein theoretischen Standpunkt aus ein sehr interessantes Konzept, dürfte aber einem Studenten im dritten Semester nur schwer vermittelbar sein.

Auf Grund dieser Nachteile erfreuen sich die Untermannigfaltigkeiten als Integrationsbereiche zunehmender Beliebtheit, siehe etwa [**1**, **3**, **7**, **10**, **12**]. Die Vorteile dieses Zuganges liegen auf der Hand: Endlich hat man es mit ehrlichen Teilmengen des $\mathbf{R}^n$ zu tun und nicht mit nebulosen formalen Linearkombinationen von Äquivalenzklassen. Vom rein theoretischen Standpunkt aus gesehen ist die Situation vollkommen befriedigend. Ihre Nachteile sind allerding auch nicht zu übersehen; die folgenden drei Punkte scheinen mir besonders erwähnenswert:

(i) Allein die Definition des Integrals einer Differentialform ω über eine orientierte Untermannigfaltigkeit M erfordert einen guten Teil der Theorie von Karten, Atlanten, Zerlegungen der Eins usw., wie sie normalerweise in einer Vorlesung über Differentialgeometrie oder Analysis auf Mannigfaltigkeiten in höheren Semestern behandelt wird.

(ii) Hat man sich schließlich bis zur Definition von $\int_M \omega$ durchgekämpft, so kann man ein solches Integral noch lange nicht ausrechnen; denn wie Barner und Flohr in [**1**, p. 397] sehr richtig bemerken:

„Die tatsächliche Berechnung von $\int_M \omega$ im konkreten Fall wird man natürlich nicht gemäß der Definition mit Hilfe einer Zerlegung der 1 vornehmen, sondern vielmehr versuchen, M durch geeignete „Zerschneidung" in einfache p-Flächenstücke aufzuteilen."

(iii) Für die Sätze von Gauß und Stokes genügen Untermannigfaltigkeiten als Integrationsbereiche nicht; schon im einfachsten Fall eines Quaders erstreckt sich das Randintegral über eine nicht glatte Menge. Die Beschränkung auf glatt berandete Gebiete wie etwa in [**1**, **7**] ist deshalb nicht befriedigend.

2. Stückweise glatte Mengen

Ich möchte nun eine Klasse von Bereichen für die niederdimensionale Integration im $\mathbf{R}^n$ angeben, mit deren Hilfe sich nach meiner Meinung die oben geschilderten Schwierigkeiten weitgehend vermeiden lassen.

Definition. Sei $p \geq 1$. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ heißt *stückweise glatt von der Dimension p* oder kurz ein *p-dimensionales Stück*, falls sie sich darstellen läßt als $X = F(P)$, wobei das Paar (F, P) die folgenden Bedingungen erfüllt: Es ist $P \subset \mathbf{R}^p$ ist kompakt, $F : P \to \mathbf{R}^n$ von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$, und es gibt eine im $\mathbf{R}^p$ offene Menge $U \subset P$ mit den Eigenschaften

(i) $P \setminus U$ ist eine Nullmenge,
(ii) U ist dicht in P,
(iii) die Einschränkung von F auf U ist eine injektive Immersion,
(iv) $F(U)$ und $F(P \setminus U)$ sind disjunkt.

Wir nennen dann F eine *Parametrisierung* von X mit *Parameterbereich* P, und U einen *Regularitätsbereich* von F. Unter einem 0-dimensionalen Stück verstehen wir einfach eine endliche Punktmenge im $\mathbf{R}^n$.

Hier sind eine Reihe von Bemerkungen angebracht.

(a) Die Idee zu dieser Definition verdanke ich den in [**14**, S. 238 ff.] eingeführten Flächen. Walter betrachtet eine Jordan-meßbare offene Menge $G \subset \mathbf{R}^p$ und eine Lipschitz-stetige Abbildung $\Phi : \overline{G} \to \mathbf{R}^n$, die auf G eine injektive Immersion ist, und für die $\Phi(G)$ und $\Phi(\operatorname{Rd} G)$ disjunkt sind. In diesem Fall heißt $\Phi(G)$ eine offene Fläche. Weiter sagt er:

„Gelegentlich betrachtet man auch die „abgeschlossene" Fläche $\Phi(\overline{G})$ und nennt $\Phi(\operatorname{Rd} G)$ den Rand und $\Phi(G)$ das Innere der Fläche."

Im Gegensatz dazu halte ich Walters abgeschlossene Fläche für das primäre Objekt. Dies erscheint aus folgendem Grund als vernünftig: Denken wir etwa an die Kugeloberfläche $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$, parametrisiert wie üblich durch spärische Koordinaten $x = \cos\varphi\cos\vartheta$, $y = \sin\varphi\cos\vartheta$, $z = \sin\vartheta$. Nach Entfernung eines halben Großkreises durch Nord- und Südpol aus der Sphäre entsteht eine offene Fläche im Walterschen Sinne, mit Parameterbereich $]a, a + 2\pi[\ \times\ ] - \pi/2, \pi/2[$ in der φ, ϑ-Ebene. Entfernung verschiedener solcher Halbgroßkreise, entsprechend verschiedenen Werten von a, liefert verschiedenen offene Flächen, die alle dieselbe abgeschlossene Fläche $\mathbf{S}^2$ ergeben. Das geometrisch wichtige Objekt ist also die abgeschlossene Fläche und nicht ein durch eine zufällige Parametrisierung bedingter relativ offener Teil davon.

(b) Gemäß unserer Definition ist ein Stück insbesondere jedenfalls eine kompakte Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Es wird keine Parametrisierung oder Äquivalenzklasse von Parametrisierungen ausgezeichnet. Dies erfordert natürlich dann einen Satz über den Zusammenhang verschiedener Parametrisierungen eines Stücks, um die Wohldefiniertheit des Integrals sicherzustellen, siehe §3. Hieraus ergibt sich auch, daß die Dimension p eines Stücks wohldefiniert ist. Die Beschränkung auf kompakte Stücke scheint mir für die Zwecke des dritten Semesters als ausreichend, obwohl man darüber geteilter Meinung sein kann. Daß nur beliebig oft differenzierbare Abbildungen betrachtet werden, dient lediglich der Bequemlichkeit; es wäre ohne weiteres möglich, wie bei Walter Parametrisierungen zuzulassen, die auf auf P dehnungsbeschränkt und auf U stetig differenzierbar sind.

(c) Ein Regularitätsbereich U einer Parametrisierung F von X ist keineswegs eindeutig bestimmt. Oft ist U das Innere von P, aber es wäre unzweckmäßig, sich auf diesen Fall festzulegen. Durch Entfernen einer relativ abgeschlossenen Nullmenge aus einem Regularitätsbereich erhält man wieder einen solchen. Diese Flexibilität erweist sich als sehr nützlich.

(d) Die Bedingungen (iii) und (iv) in der Definition garantieren, daß $F(U)$ eine eingebettete, zu U diffeomorphe Untermannigfaltigkeit ist, die zudem wegen (ii) in X dicht liegt. Die Restmenge $X \setminus F(U) = F(P \setminus U)$ ist als Bild einer p-dimensionalen Nullmenge unter einer dehnungsbeschränkten Abbildung eine kompakte Menge vom p-dimensionalen Hausdorffmaß 0. Stücke sind also insbesondere kompakte $\mathcal{C}^1$-Flächen im Sinn von [**10**]; sie sind jedoch insofern spezieller, als sie endliches p-dimensionales Maß haben, und damit stetige Funktionen bzw. Differentialformen über sie integrierbar sind. Ich halte das eher für einen Vorteil: mit Kurven unendlicher Bogenlänge als Rändern von beschränkten Gebieten möchte man sich im dritten Semester nicht unbedingt abgeben müssen. Auch ermöglicht dies die in §4 gegebene Formulierung des Satzes von Stokes, die wesentlich darauf beruht, ein Stück als einen Strom, also ein Funktional auf dem Raum der Testformen, aufzufassen. Aber natürlich ist dadurch der für Stücke formulierte Gaußsche Satz nicht so allgemein wie etwa der in [**10**].

(e) Der Parameterbereich P braucht keineswegs zusammenhängend zu sein. Ähnlich wie in [**14**, S. 286] lassen sich damit leicht „fast disjunkte“ Vereinigungen von Stücken bilden. Ferner folgt auf diese Weise aus dem Satz von Cairns und Whitehead über die Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten, daß jede kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ ein Stück ist. Natürlich gehört dieser Satz nicht zum Repertoire der Vorlesung Analysis 3, aber es ist doch beruhigend zu wissen, daß man mit Stücken gegenüber der Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten nichts verliert.

(f) Schließlich ist leicht zu sehen [**11**, Lemma 12.5], daß die n-dimensionalen Stücke des $\mathbf{R}^n$ genau diejenigen kompakten Teilmengen sind, deren Rand eine Nullmenge ist, und die gleich dem Abschluß ihres Inneren sind.

3. Integration über Stücke

Der angekündigte Satz über den Parameterwechsel lautet nun folgendermaßen.

Satz. *Sei X ein nichtleeres Stück. Für $i = 1, 2$ seien F_i Parametrisierungen von X mit Parameterbereichen $P_i \subset \mathbf{R}^{p_i}$. Dann gibt es Regularitätsbereiche $V_i \subset P_i$, sodaß $F_1(V_1) = F_2(V_2)$. Es gilt $p_1 = p_2$, und die Abbildung $\Psi = F_2^{-1} \circ F_1 \colon V_1 \to V_2$ ist ein Diffeomorphismus.*

Für den Beweis sei auf [**11**, Satz 12.11] verwiesen. — Da das Komplement eines Regularitätsbereiches nach (i) der Definition eines Stücks eine p-dimensionale Nullmenge ist, folgt hieraus und aus der Transformationsformel sowie bekannten Eigenschaften der Gramschen Determinante Gr leicht die Wohldefiniertheit und Existenz des Oberflächenintegrals

$$\int_X f\, do_p := \int_P (f \circ F)(u^1, \ldots, u^p) \mathrm{Gr}\Big(\frac{\partial F}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial u^p}\Big)^{1/2} du^1 \cdots du^p$$

einer stetigen Funktion f. Damit ist das Ziel erreicht, die Integration über eine genügend allgemeine Klasse niederdimensionaler Mengen im $\mathbf{R}^n$ so einzuführen, daß die Definition des Integrals direkt zur Berechnung des Integrals verwendet werden kann und die Wohldefiniertheit des Integrals ohne großen Aufwand möglich ist.

Zur Integration von Differentialformen braucht man Orientierungen. Wir definieren erst den *regulären Teil* X_{reg} eines p-dimensionalen Stückes X als die Vereinigung aller $F(U)$, wobei F eine beliebige Parametrisierung von X und U ein beliebiger Regularitätsbereich von F ist. Es ist leicht zu sehen, daß X_{reg} eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ ist. Das (möglicherweise leere) Komplement $X_{\mathrm{sing}} = X \setminus X_{\mathrm{reg}}$ ist kompakt und heißt der *singuläre Teil* von X. Im Fall der Sphäre etwa ist durch Nachschaltung von Drehungen hinter die Parametrisierung durch sphärische

Koordinaten leicht zu sehen, daß der singuläre Teil leer ist. Für ein n-dimensionales Stück X im $\mathbf{R}^n$ ist X_{reg} das Innere und X_{sing} der Rand von X.

Da ein Stück X in jedem Punkt von X_{reg} glatt ist, stellt sich umgekehrt die Frage, ob jeder glatte Punkt von X zu X_{reg} gehört. Die Antwort ist ja [**11**, Satz 12.15], der Beweis ist aber nicht einfach. Andrerseits wird von diesem Satz nicht weiter Gebrauch gemacht.

Nun definieren wir eine *Orientierung* von X als eine Orientierung von X_{reg}, etwa ξ. Für jede Parametrisierung F von X mit Regularitätsbereich U induziert dann ξ eine Orientierung $F^*(\xi)$ von U, und das Integral einer stetigen p-Form ω über das orientierte Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ wird definiert durch

$$\int_{\mathfrak{X}} \omega := \int_{(U, F^*(\xi))} F^*(\omega).$$

Wieder ist die Wohldefiniertheit eine leichte Folgerung aus der Transformationsformel und dem Satz über den Parameterwechsel.

Unsere Definition hat den folgenden etwas merkwürdigen Effekt: Ein glattes kompaktes Möbiusband mit Rand ist zwar, wie erwartet, ein nicht orientierbares Stück. Es wird jedoch orientierbar, wenn man es quer zur Mittellinie knickt; denn dann ist der reguläre Teil diffeomorph zu einem offenen Rechteck. Andererseits ist das geknickte Möbiusband nicht berandet im Sinne von §4, und daher gilt dafür keine Stokesformel.

Die Verwendung von Orientierungen bei der Integration von Differentialformen ist natürlich eine zusätzliche Komplikation. Sie liegt aber in der Natur der Sache und läßt sich durch einen kalkülmäßigen Formalismus, dessen Erläuterung hier jedoch zu weit führen würde (siehe [**11**, §13]), vereinfachen. Bei der Verwendung von Ketten als Integrationsobjekten kann man Orientierungen ganz unterdrücken, wie dies etwa in [**8**] geschieht. Ob allerdings dadurch der Begriffsapparat der semiregulären Pflasterungen gerechtfertigt ist, sei dahingestellt.

4. Die Sätze von Gauß und Stokes

Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ heißt *stückweise glatt berandet*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) X ist kompakt und gleich dem Abschluß ihres Inneren;

(ii) der Rand Y von X ist ein $(n-1)$-dimensionales Stück.

Da ein niederdimensionales Stück eine Nullmenge im $\mathbf{R}^n$ ist, folgt aus der Charakterisierung (f) der n-dimensionalen Stücke in §2, daß wir die Bedingung (i) in der Definition auch durch

(i)′ X ist ein n-dimensionales Stück

ersetzen können.

Man zeigt dann wie üblich, daß die Punkte des regulären Teils von Y reguläre Randpunkte von X sind. Insbesondere ist in diesen Punkten die äußere Normale wohldefiniert, und damit besitzt Y die durch eine Orientierung ξ von X induzierte Orientierung nach der äußeren Normalen, etwa η . Mit den Definitionen $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ und $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ lautet der *Integralsatz von Gauß in der Formulierung für Stücke* dann

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\mathfrak{Y}} \omega, \tag{1}$$

für jede stetig differenzierbare $(n-1)$-Form ω auf X. Der Beweis des Gaußschen Satzes folgt im Großen und Ganzen dem Muster der Beweise in [**3**, **10**, **12**], erfordert also einigen Aufwand. Insbesondere kommen nun doch die vorher so verpönten Zerlegungen der Eins ins Spiel. Trotzdem glaube ich, daß der hier skizzierte Zugang seine Vorteile hat; denn der Gaußsche Satz ist auch ohne Kenntnis des Beweises sehr gut verständlich und anwendbar.

Unter dem *Satz von Stokes* verstehe ich die niederdimensionale Variante des Gaußschen Satzes im folgenden Sinne: Anstelle einer stückweise glatt berandeten Menge tritt ein p-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$, anstelle des topologischen Randes tritt ein geeignet definiertes $(p-1)$-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$. Dann besagt der Satz von Stokes die Gültigkeit der Formel (1) für alle stetig differenzierbaren $(p-1)$-Formen ω auf einer offenen Umgebung von X. Insbesondere wird *nicht* verlangt, daß X in eine p-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ einbettbar ist. Dies wäre viel zu einschränkend und würde schon das einfache Beispiel eines Kegelmantels X im $\mathbf{R}^3$ mit Randkreis Y nicht erfassen. Trotzdem wird in allen mir bekannten Darstellungen der Analysis 3, die ihre Integrationstheorie auf Untermannigfaltigkeiten betreiben, nur dieser Fall behandelt. Hier erweist sich die Theorie der semiregulären Pflasterungen von Grauert-Lieb [**8**] als überlegen; das Beispiel des Kegelmantels ist in ihrem Formalismus leicht zu behandeln.

Die Hauptschwierigkeit beim Satz von Stokes in der oben genannten Fassung steckt natürlich in den harmlos klingenden Worten „*… ein geeignet definiertes $(p-1)$-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$*.“ Als topologischer Rand von X kann Y nicht genommen werden, weil X für $p < n$ gleich seinem Rand ist. Versuche, genügend allgemeine hinreichende Bedingungen zu formulieren, unter denen $\mathfrak{Y}$ existiert, werden sehr schnell sehr kompliziert, siehe §5. Andererseits interessiert $\mathfrak{Y}$ nur insofern, als es die Formel (1) wahr macht. Daher scheint es naheliegend, umgekehrt vorzugehen und folgende Definition zu treffen.

Definition. Ein p-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{X}$ heißt *berandet*, falls es ein $(p-1)$-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{Y}$ gibt, sodaß Formel (1) für alle Testformen ω (d.h., Formen von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ mit kompaktem Träger) der Stufe $p-1$ gilt. In diesem Fall heißt $\mathfrak{Y}$ eine *Berandung* von $\mathfrak{X}$.

In der Sprache der geometrischen Maßtheorie [**4**] besagt diese Definition: Der $(p-1)$-Strom $\omega \mapsto \int_{\mathfrak{X}} d\omega$, der ja üblicherweise als Rand des p-Stroms $\varphi \mapsto \int_{\mathfrak{X}} \varphi$ bezeichnet wird, ist darstellbar durch Integration über $\mathfrak{Y}$.

Auch hier sind eine Reihe von Bemerkungen angebracht.

(a) Falls eine Berandung existiert, ist sie eindeutig bestimmt [**11**, Kor. 16.6]. Daher ist es sinnvoll, von *der* Berandung von $\mathfrak{X}$ zu sprechen und sie wie gewohnt mit $\mathfrak{Y} = \partial\mathfrak{X}$ zu bezeichnen. Damit gewinnt die Stokesformel ihre übliche Gestalt

$$\int_{\partial\mathfrak{X}} \omega = \int_{\mathfrak{X}} d\omega. \tag{2}$$

(b) Die Definition ist zum Rechnen von Beispielen recht gut geeignet, denn es ist oft leicht zu sehen oder zu erraten, wie man die Berandung zu definieren hat, und dann die Formel (2) zu verifizieren, so etwa im Beispiel des Kegelmantels. Allgemein ist $Y \subset X_{\text{sing}}$ [**11**, Satz 16.8], aber Gleichheit muß natürlich nicht gelten.

(c) In der Definition der Berandung wird die Gültigkeit der Formel (2) nur für Testformen verlangt. Dies ist das in der geometrischen Maßtheorie bzw. Distributionentheorie übliche Vorgehen. Als eigentlichen Satz von Stokes wird man dann die Gültigkeit von (2) für alle stetig differenzierbare Differentialformen auf einer offenen Umgebung von X ansehen, und durch Approximation beweisen [**11**, Satz 16.10].

(d) Unsere Definition liefert für $p = n$ genau die oben betrachteten stückweise glatt berandeten Mengen: Der Gaußsche Integralsatz in der Formulierung für Stücke besagt, daß ein n-dimensionales Stück X mit stückweise glattem Rand im obigen Sinne berandet ist. Die Umkehrung wird in [**11**, Satz 16.14] bewiesen.

(e) Die Nichtexistenz der Berandung eines Stückes $\mathfrak{X}$ kann ihren Grund in der zu komplizierten Geometrie des singulären Teils X_{sing} oder im schlechten Verhalten der Orientierung ξ haben. Insbesondere ist die Existenz der Berandung keine rein geometrische Eigenschaft des Stückes X, sondern hängt auch wesentlich von der Orientierung ξ ab. Es kann ohne weiteres vorkommen, daß (X, ξ) berandet ist, aber diese Eigenschaft bei Wahl einer anderen Orientierung ξ' verloren geht.

(f) Ein orientiertes p-dimensionales Stück $\mathfrak{Z}$ heißt *geschlossen*, wenn es berandet und seine Berandung leer ist. Dabei schreiben wir dem leeren Stück mit seiner ebenfalls leeren Orientierung jede Dimension zu und bezeichnen es mit 0. Nach Definition bedeutet also $\partial\mathfrak{Z} = 0$ nichts anderes als

$\int_3 d\omega = 0$ für alle Testformen ω der Stufe $p-1$. Aus der Regel $dd\alpha = 0$ für Differentialformen folgt dann trivialerweise, daß die Berandung eines berandeten orientierten Stückes $\mathfrak{X}$ stets geschlossen ist, also die Regel $\partial\partial\mathfrak{X} = 0$. Nicht singuläre Stücke sind automatisch geschlossen [**11**, 16.12].

5. Hinreichende Bedingungen für die Existenz der Berandung

Die im vorigen Abschnitt geschilderte Version des Satzes von Stokes ist zwar von einem pragmatischen Standpunkt aus befriedigend und erlaubt auch die Behandlung singulärer Situationen. Sie könnte jedoch den Eindruck erwecken, daß mit einem der typischen Mathematikertricks die eigentliche Schwierigkeit „wegdefiniert“ wurde. Es fehlen nämlich noch genügend allgemeine hinreichende Bedingungen dafür, daß ein orientiertes Stück der Dimension $p < n$ berandet ist. Solche Bedingungen sollen jetzt angegeben werden. Sie setzen ein gewisses Maß an Differentialgeometrie voraus und sind, entsprechend der bisher entwickelten Philosophie, nicht als Teil einer Vorlesung Analysis 3 gedacht, sondern haben eher theoretisches Interesse. Für praktische Zwecke ist die direkte Verifikation der Stokesformel oft einfacher.

Definition. Sei X ein p-dimensionales Stück. Ein Punkt $a \in X_{\text{sing}}$ heißt ein *verallgemeinerter glatter Randpunkt*, wenn es eine offene Umgebung V von a im $\mathbf{R}^n$ und ein $m \geq 1$ gibt, sodaß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $X \cap V = M_1 \cup \cdots \cup M_m$ ist die Vereinigung von endlich vielen p-dimensionalen Mannigfaltigkeiten M_i mit Rand R_i.

Hier ist R_i der Rand von M_i im üblichen Sinne der Differentialgeometrie. Dies ist also eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, und in der Nähe eines Punktes $b \in R_i$ sieht M_i aus wie ein abgeschlossener Halbraum im $\mathbf{R}^p$.

(ii) Es gilt $R_1 = R_2 = \ldots = R_m = X_{\text{sing}} \cap V$.

Insbesondere ist also $X_{\text{sing}} \cap V$ eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

(iii) Die $M_i \setminus R_i$ sind disjunkt.

Anschaulich gesehen ist also $X \cap V$ ein „Buch“ mit „Rücken“ $X_{\text{sing}} \cap V$ und „Blättern“ M_i. Wir nennen $m = m(a)$ die *Vielfachheit* von a.

Aus der Definition ist klar, daß $X_{\text{sing}} \cap V$ wieder aus verallgemeinerten glatten Randpunkten besteht und somit die Menge S der verallgemeinerten glatten Randpunkte von $\mathfrak{X}$ offen in X_{sing} ist. Ferner ist $X_{\text{sing}} \cap V = S \cap V$ eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Da jeder Punkt $a \in S$ eine solche Umgebung V besitzt, ist S eine $(p-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ferner ist die Vielfachheit eine lokal konstante Funktion auf S. Im Falle $p = n$ oder wenn X in einer p-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ liegt, ist $m(a) = 1$. Bezeichnen wir mit S_0 bzw. S_1 die Menge der $a \in S$, für die $m(a)$ gerade bzw. ungerade ist, so zerfällt S in die disjunkte Vereinigung der relativ offenen Teilmengen S_0 und S_1.

Nun sei ξ eine Orientierung von X, und sei $a \in S$ ein verallgemeinerter glatter Randpunkt. Wir verwenden die oben eingeführten Bezeichnungen. Weil $M_i \setminus R_i$ in X_{reg} offen ist, definiert ξ auf jedem $M_i \setminus R_i$ eine Orientierung ξ_i. Nach bekannten Tatsachen über orientierte Mannigfaltigkeiten mit Rand induziert ξ_i eine Orientierung η_i von $R_i = S \cap V$ nach der äußeren Normalen. Da der Tangentialraum von S in a genau zwei Orientierungen besitzt, gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $k \geq l$, sodaß $k + l = m(a)$ und, nach geeigneter Umnumerierung, $\eta_1(a) = \ldots = \eta_k(a) = -\eta_{k+1}(a) = \ldots = -\eta_{k+l}(a)$. Wir nennen $k - l$ die *Vielfachheit von a bezüglich der Orientierung ξ* und bezeichnen sie mit $m_\xi(a)$. Auch sie ist eine lokal konstante Funktion auf S und erfüllt offenbar $m(a) \equiv m_\xi(a) \bmod 2$.

Satz. *Sei $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ ein orientiertes p-dimensionales Stück im $\mathbf{R}^n$ mit singulärem Teil X_{sing}, und sei $S \subset X_{\text{sing}}$ die Menge der verallgemeinerten glatten Randpunkte von $\mathfrak{X}$. Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:*

(i) *es existiere eine Konstante $C > 0$, sodaß für jeden kompakten Würfel W mit Radius r*

gilt:

$$\int_{X\cap W} do_p \leq C \cdot r^p,$$

(ii) $X_{\text{sing}} \setminus S$ *ist eine* $(p-1)$*-dimensionale Nullmenge,*

(iii) *es gibt ein* $(p-1)$*-dimensionales Stück* Y *mit* $Y_{\text{reg}} = S_1$,

(iv) *es gilt* $m_\xi(a) \leq 1$ *für alle* $a \in S$.

Dann induziert ξ *eine Orientierung* η *von* Y *und* $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ *ist die Berandung von* $\mathfrak{X}$.

Bemerkungen. (a) Die Voraussetzungen (i) und (iv) sind automatisch erfüllt, falls X in einer p-dimensionalen Untermannigfaltigkeit enthalten ist.

(b) Es gibt höchstens ein Y mit (iii), weil der reguläre Teil eines Stücks in diesem dicht liegt.

(c) Für einen Punkt $a \in S_1$ ist etwa $m(a) = 2l + 1$ und daher wegen (iv), mit den oben eingeführten Bezeichnungen, $\eta_1(a) = \ldots = \eta_{l+1}(a) = -\eta_{l+2}(a) = \ldots = -\eta_{2l+1}(a)$. Die Orientierungen $\eta_i(a)$ heben sich also bis auf eine paarweise auf, und diese liefert dann die induzierte Orientierung $\eta(a) = \eta_1(a)$.

(d) Der Beweis des Satzes verläuft mit geringen Modifikationen wie der des Satzes von Gauß.

(e) Dieser Satz liefert nur hinreichende, aber keineswegs notwendige Bedingungen für die Existenz der Berandung eines orientierten Stücks $\mathfrak{X}$ und rechtfertigt so einmal mehr die in §4 vorgestellte Version des Stokesschen Satzes. Beispielsweise sei X eine Spirale um den Nullpunkt, gegeben durch die Parametrisierung $F(t) = \exp(-1/\sqrt{t})(\cos t^{-1}, \sin t^{-1})$ für $0 < t \leq 1$ und $F(0) = 0$. Hier ist $X_{\text{sing}} = \{0, F(1)\}$ und S besteht nur aus dem Punkt $F(1)$. Also ist $X_{\text{sing}} \setminus S$ keine 0-dimensionale Nullmenge. Auch die Voraussetzung (i) ist im Nullpunkt verletzt. Trotzdem ist sofort zu sehen, daß X mit seiner naheliegenden Orientierung berandet ist. Die Berandung besteht wie erwartet aus den beiden Punkten 0 und $F(1)$, versehen mit den Vorzeichen -1 und $+1$.

Literatur

[**1**] M. Barner und F. Flohr, *Analysis 2*, Walter de Gruyter, 1983.

[**2**] C. Blatter, *Analysis 2*, Springer-Verlag, 1992.

[**3**] S. D. Chatterji, *Cours d'Analyse*, vol. 1, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.

[**4**] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

[**5**] O. Forster, *Analysis 1*, Vieweg, 1992.

[**6**] ———, *Analysis 2*, Vieweg, 1993.

[**7**] ———, *Analysis 3*, Vieweg, 1996.

[**8**] H. Grauert und I. Lieb, *Differential- und Integralrechnung 3*, Springer-Verlag, 1977.

[**9**] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*, Teubner, 1988.

[**10**] K. Königsberger, *Analysis 2*, Springer-Verlag, 1997.

[**11**] O. Loos, *Analysis 3*, Vorlesungsausarbeitung, Institut für Mathematik, Universität Innsbruck, 1999.

[**12**] H.-J. Reiffen und H. W. Trapp, *Einführung in die Analysis 3*, B.I. Hochschultaschenbücher, 1973.

[**13**] W. Rudin, *Analysis*, Oldenbourg, 1998.

[**14**] W. Walter, *Analysis 2*, Springer-Verlag, 1992.