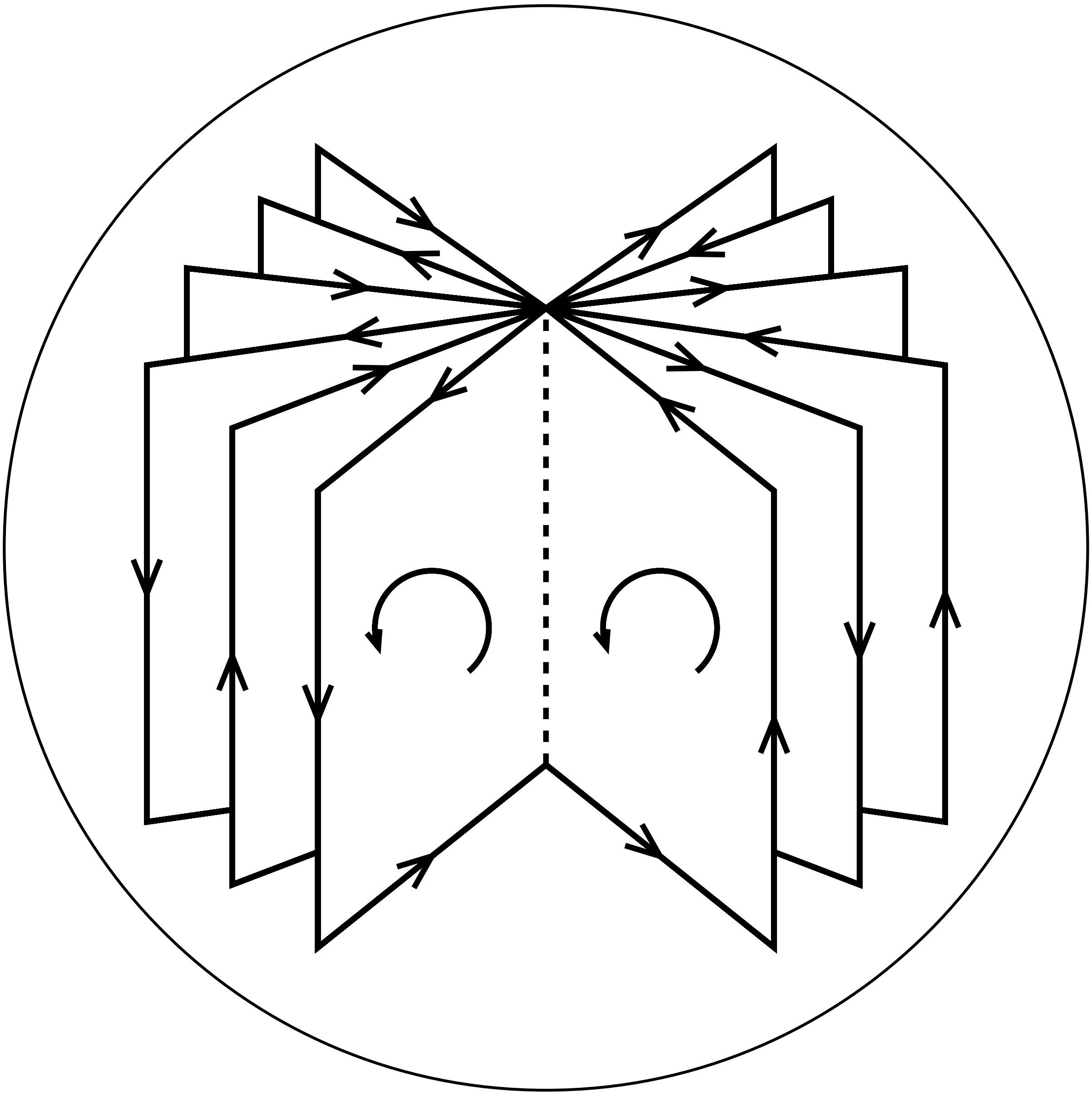
Ottmar Loos

Analysis III



Institut für Mathematik
Universität Innsbruck
1999

Vorwort

Dieses Skriptum entstand aus meiner Vorlesung Analysis 3, die ich zuletzt im WS 1997/98 gehalten habe. Es setzt die Vorlesungen Analysis 1 (Differential- und Integralrechnung einer Variablen) und Analysis 2 (Differentialrechnung im $\mathbf{R}^n$ und Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen) voraus.

Die Vorlesung behandelt die Integralrechnung im $\mathbf{R}^n$ und zerfällt in natürlicher Weise in zwei Teile, einen analytischen und einen geometrischen.

Im *analytischen Teil* wird, nach einem einleitenden Paragraphen über Hilfsmittel aus der Topologie, in §§1–9 die Theorie des Lebesgue-Integrals im $\mathbf{R}^n$ entwickelt. Hierbei verwende ich die von J. Kurzweil und E.J. McShane stammende Methode, das Lebesgue-Integral mit Hilfe Riemannscher Summen einzuführen. Diese Methode, die meines Wissens noch in keinem deutschsprachigen Lehrbuch zu finden ist, hat den grossen Vorteil eines bruchlosen Übergangs vom Riemann-Integral zum Lebesgue-Integral. Ferner liefert sie eine sofortige Definition der Integrierbarkeit und des Integrals — der sonst übliche lange Anmarschweg über Treppenfunktionen, halbstetige Funktionen und das Ober- und Unterintegral entfällt. Tatsächlich spielen Treppenfunktionen bei diesem Aufbau keine besondere Rolle. Auch messbare Funktionen werden nicht benötigt, sie finden ihren natürlichen Platz besser in einer Vorlesung über Masstheorie.

Der Satz von Fubini und die Konvergenzsätze werden erst für Funktionen auf Quadern bewiesen und dann durch einen Ausschöpfungsprozess auf den ganzen $\mathbf{R}^n$ ausgedehnt. Nach der Behandlung der Standardeigenschaften von messbaren Mengen und Nullmengen folgt die Transformationsformel für $\mathcal{C}^2$-Diffeomorphismen. Diese stärkere, aber praktisch völlig ausreichende Voraussetzung ermöglicht einen relativ kurzen Beweis, der ohne die Vollständigkeit des Raumes L^1 auskommt. Im abschliessenden §9 wird dann die Vollständigkeit L^p-Räume bewiesen. Hier wird auch gezeigt, dass die Treppenfunktionen in L^p dicht liegen. Damit ist der Anschluss an die üblichen Darstellungen der Lebesgue-Theorie hergestellt. Als Anwendung beweisen wir die Transformationsformel für $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismen.

Der *geometrische Teil* (§§10–16) enthält die Integralsätze von Gauss und Stokes in der Formulierung für Differentialformen. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, bei den Integrationsbereichen genügend allgemeine Singularitäten zuzulassen.

Nach einem Abschnitt über alternierende Differentialformen betrachten wir sogenannte p-dimensionale *Dichten*. Dies sind die natürlichen Integranden für die Integration über p-dimensionale nicht orientierte Mengen im $\mathbf{R}^n$; sie führen allerdings in der Literatur ein Schattendasein als die parametrischen Integranden der Variationsrechnung. Beispiele sind das p-dimensionale euklidische Oberflächenelement oder der Betrag $|\omega|$ einer p-Form ω. Für $p = n$ handelt es sich um die skalaren Dichten vom Gewicht 1 im Sinne von H. Weyl.

Als Nächstes führen wir die Klasse der p-dimensionalen *stückweise glatten Mengen* oder kurz *Stücke* ein. Über solche Mengen lassen sich Dichten, und unter Zuhilfenahme einer Orientierung auch Differentialformen, in natürlicher Weise integrieren, und für sie werden dann die Integralsätze formuliert. Bei der Wahl dieser Klasse waren zwei einander widersprechende Gesichtspunkte massgebend: Einfachheit der Begriffsbildung und genügend grosse Allgemeinheit. Stücke in unserem Sinne sind kompakte Teilmengen des $\mathbf{R}^n$, die sich durch p-dimensionale Parameterbereiche und differenzierbare Abbildungen (mit geeigneten Regularitätsvoraussetzungen) parametrisieren lassen. Dadurch hält sich die Darstellung noch auf einem relativ einfachen Niveau;

eine Entwicklung der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten, die eher in eine Vorlesung über Differentialgeometrie gehört, wird vermieden. Andererseits dürfen Stücke Singularitäten haben, die ja schon bei den einfachsten Fällen des Gaussschen Integralsatzes auftreten. Sie sind daher allgemeiner als kompakte Mannigfaltigkeiten — dass allerdings eine kompakte Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ ein Stück ist, beruht auf dem Satz von S.S. Cairns über die Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten. Schliesslich sind Stücke in unserem Sinn rektifizierbar, haben also endliches p-dimensionales Mass — im Gegensatz zu den noch allgemeineren kompakten $\mathcal{C}^1$-Flächen, wie sie im Buch „Analysis 2“ von K. Königsberger zu finden sind.

Im Abschnitt über Orientierungen wurde auf eine rechnerisch leicht handhabbare Darstellung — ähnlich wie bei Differentialformen und Dichten — geachtet. Wir formulieren und beweisen dann den Gaussschen Integralsatz für stückweise glatt berandete kompakte Mengen, oder was auf dasselbe hinauskommt, für n-dimensionale Stücke, deren Rand ein $(n-1)$-dimensionales Stück ist. Der Beweis folgt dem heute üblichen Muster und erfordert eine Reihe von weitergehenden Hilfsmitteln wie Partitionen der Eins und p-dimensionale Nullmengen. Er wurde daher in einen eigenen Paragraphen verbannt, der zunächst auch übersprungen werden kann.

Beim Satz von Stokes habe ich mich bemüht, eine Formulierung zu finden, die auch singuläre Situationen erfasst. Oft wird unter dem Satz von Stokes in der Dimension p nur der Gausssche Integralsatz für eine Menge verstanden, die ganz in einer glatten p-dimensionalen Untermannigfaltigkeit des $\mathbf{R}^n$ liegen muss. Damit lässt sich nicht einmal das Beispiel eines Kegelmantels im $\mathbf{R}^3$ behandeln. Aus diesem Grunde habe ich den Satz von Stokes für ein p-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{X}$ als einen Satz über die Darstellbarkeit des Funktionals $\omega \mapsto \int_{\mathfrak{X}} d\omega$ als Integral $\int_{\mathfrak{Y}} \omega$ über ein geeignetes $(p-1)$-dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{Y}$ formuliert. Ein solches $\mathfrak{Y} = \partial\mathfrak{X}$ ist dann eindeutig bestimmt und heisst die *Berandung* oder der *analytische Rand* von $\mathfrak{X}$. Dies ist motiviert durch die in der geometrischen Masstheorie übliche Identifizierung von $\mathfrak{X}$ mit dem Funktional $\psi \mapsto \int_{\mathfrak{X}} \psi$ auf dem Raum der Testformen und der sich daraus natürlich ergebenden Definition von $\partial\mathfrak{X}$.

Durch $i.j.k$ wird auf Formel (k) im Unterabschnitt $i.j$ verwiesen. Mit einem * versehene Paragraphen oder Unterabschnitte können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Innsbruck, im Februar 1999 O. Loos

Inhaltsverzeichnis