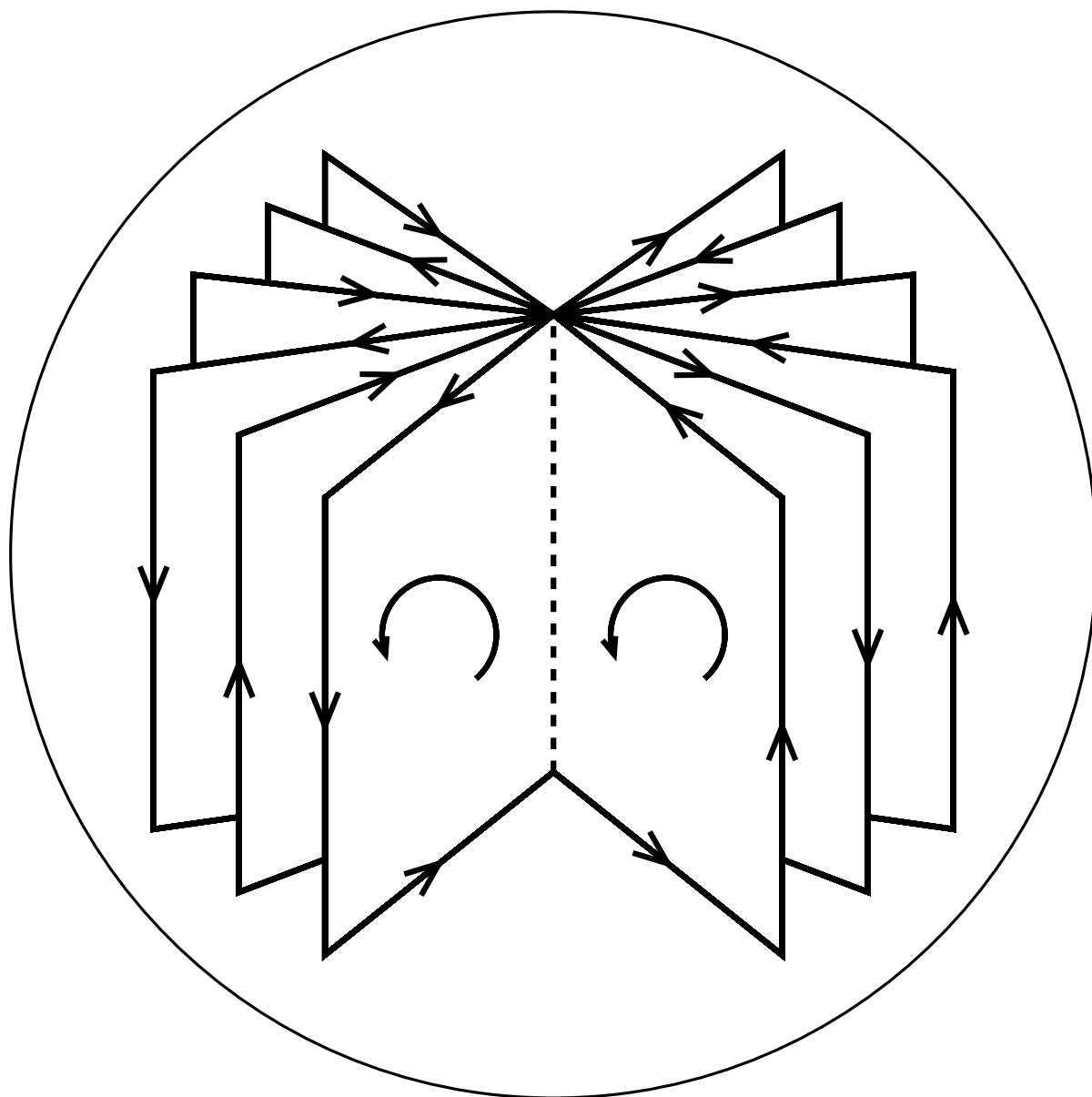


OTTMAR LOOS

ANALYSIS III



Institut für Mathematik
Universität Innsbruck
1999

Vorwort

Dieses Skriptum entstand aus meiner Vorlesung Analysis 3, die ich zuletzt im WS 1997/98 gehalten habe. Es setzt die Vorlesungen Analysis 1 (Differential- und Integralrechnung einer Variablen) und Analysis 2 (Differentialrechnung im \mathbf{R}^n und Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen) voraus.

Die Vorlesung behandelt die Integralrechnung im \mathbf{R}^n und zerfällt in natürlicher Weise in zwei Teile, einen analytischen und einen geometrischen.

Im *analytischen Teil* wird, nach einem einleitenden Paragraphen über Hilfsmittel aus der Topologie, in §§1–9 die Theorie des Lebesgue-Integrals im \mathbf{R}^n entwickelt. Hierbei verwende ich die von J. Kurzweil und E.J. McShane stammende Methode, das Lebesgue-Integral mit Hilfe Riemannscher Summen einzuführen. Diese Methode, die meines Wissens noch in keinem deutschsprachigen Lehrbuch zu finden ist, hat den großen Vorteil eines bruchlosen Übergangs vom Riemann-Integral zum Lebesgue-Integral. Ferner liefert sie eine sofortige Definition der Integrierbarkeit und des Integrals — der sonst übliche lange Anmarschweg über Treppenfunktionen, halbstetige Funktionen und das Ober- und Unterintegral entfällt. Tatsächlich spielen Treppenfunktionen bei diesem Aufbau keine besondere Rolle. Auch messbare Funktionen werden nicht benötigt, sie finden ihren natürlichen Platz besser in einer Vorlesung über Maßtheorie.

Der Satz von Fubini und die Konvergenzsätze werden erst für Funktionen auf Quadern bewiesen und dann durch einen Ausschöpfungsprozess auf den ganzen \mathbf{R}^n ausgedehnt. Nach der Behandlung der Standardeigenschaften von messbaren Mengen und Nullmengen folgt die Transformationsformel für C^2 -Diffeomorphismen. Diese stärkere, aber praktisch völlig ausreichende Voraussetzung ermöglicht einen relativ kurzen Beweis, der ohne die Vollständigkeit des Raumes L^1 auskommt. Im abschließenden §9 wird dann die Vollständigkeit L^p -Räume bewiesen. Hier wird auch gezeigt, dass die Treppenfunktionen in L^p dicht liegen. Damit ist der Anschluss an die üblichen Darstellungen der Lebesgue-Theorie hergestellt. Als Anwendung beweisen wir die Transformationsformel für C^1 -Diffeomorphismen.

Der *geometrische Teil* (§§10–16) enthält die Integralsätze von Gauß und Stokes in der Formulierung für Differentialformen. Besonderer Wert wurde darauf gelegt, bei den Integrationsbereichen genügend allgemeine Singularitäten zuzulassen.

Nach einem Abschnitt über alternierende Differentialformen betrachten wir sogenannte p -dimensionale *Dichten*. Dies sind die natürlichen Integranden für die Integration über p -dimensionale nicht orientierte Mengen im \mathbf{R}^n ; sie führen allerdings in der Literatur ein Schattendasein als die parametrischen Integranden der Variationsrechnung. Beispiele sind das p -dimensionale euklidische Oberflächenelement oder der Betrag $|\omega|$ einer p -Form ω . Für $p = n$ handelt es sich um die skalaren Dichten vom Gewicht 1 im Sinne von H. Weyl.

Als Nächstes führen wir die Klasse der p -dimensionalen *stückweise glatten Mengen* oder kurz *Stücke* ein. Über solche Mengen lassen sich Dichten, und unter Zuhilfenahme einer Orientierung auch Differentialformen, in natürlicher Weise integrieren, und für sie werden dann die Integralsätze formuliert. Bei der Wahl dieser Klasse waren zwei einander widersprechende Gesichtspunkte maßgebend: Einfachheit der Begriffsbildung und genügend große Allgemeinheit. Stücke in unserem Sinne sind kompakte Teilmengen des \mathbf{R}^n , die sich durch p -dimensionale Parameterbereiche und differenzierbare Abbildungen (mit geeigneten Regularitätsvoraussetzungen) parametrisieren lassen. Dadurch hält sich die Darstellung noch auf einem relativ einfachen Niveau; eine Entwicklung der Integrationstheorie auf Mannigfaltigkeiten, die eher in eine Vor-

lesung über Differentialgeometrie gehört, wird vermieden. Andererseits dürfen Stücke Singularitäten haben, die ja schon bei den einfachsten Fällen des Gaußschen Integralsatzes auftreten. Sie sind daher allgemeiner als kompakte Mannigfaltigkeiten — dass allerdings eine kompakte Untermannigfaltigkeit des \mathbf{R}^n ein Stück ist, beruht auf dem Satz von S.S. Cairns über die Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten. Schließlich sind Stücke in unserem Sinn rektifizierbar, haben also endliches p -dimensionales Maß — im Gegensatz zu den noch allgemeineren kompakten C^1 -Flächen, wie sie im Buch „Analysis 2“ von K. Königsberger zu finden sind.

Im Abschnitt über Orientierungen wurde auf eine rechnerisch leicht handhabbare Darstellung — ähnlich wie bei Differentialformen und Dichten — geachtet. Wir formulieren und beweisen dann den Gaußschen Integralsatz für stückweise glatt berandete kompakte Mengen, oder was auf dasselbe hinauskommt, für n -dimensionale Stücke, deren Rand ein $(n - 1)$ -dimensionales Stück ist. Der Beweis folgt dem heute üblichen Muster und erfordert eine Reihe von weitergehenden Hilfsmitteln wie Partitionen der Eins und p -dimensionale Nullmengen. Er wurde daher in einen eigenen Paragraphen verbannt, der zunächst auch übersprungen werden kann.

Beim Satz von Stokes habe ich mich bemüht, eine Formulierung zu finden, die auch singuläre Situationen erfasst. Oft wird unter dem Satz von Stokes in der Dimension p nur der Gaußsche Integralsatz für eine Menge verstanden, die ganz in einer glatten p -dimensionalen Untermannigfaltigkeit des \mathbf{R}^n liegen muss. Damit lässt sich nicht einmal das Beispiel eines Kegelmantels im \mathbf{R}^3 behandeln. Aus diesem Grunde habe ich den Satz von Stokes für ein p -dimensionales orientiertes Stück \mathfrak{X} als einen Satz über die Darstellbarkeit des Funktionals $\omega \mapsto \int_{\mathfrak{X}} d\omega$ als Integral $\int_{\mathfrak{Y}} \omega$ über ein geeignetes $(p - 1)$ -dimensionales orientiertes Stück \mathfrak{Y} formuliert. Ein solches $\mathfrak{Y} = \partial\mathfrak{X}$ ist dann eindeutig bestimmt und heißt die *Berandung* oder der *analytische Rand* von \mathfrak{X} . Dies ist motiviert durch die in der geometrischen Maßtheorie übliche Identifizierung von \mathfrak{X} mit dem Funktional $\psi \mapsto \int_{\mathfrak{X}} \psi$ auf dem Raum der Testformen und der sich daraus natürlich ergebenden Definition von $\partial\mathfrak{X}$.

Durch *i.j.k* wird auf Formel (*k*) im Unterabschnitt *i.j* verwiesen. Mit einem * versehene Paragraphen oder Unterabschnitte können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
0. Weitere topologische Begriffe im \mathbf{R}^n	1
1. Der Inhalt von Quadern	4
2. Das Integral über Quader	9
3. Der Satz von Fubini	18
4. Die Konvergenzsätze für Integrale über Quader	25
5. Integration über den \mathbf{R}^n	31
6. Messbare Mengen und Nullmengen	41
7. Integration über messbare Mengen	47
8. Die Transformationsformel	56
9.* Die L^p -Räume	64
10. Alternierende Differentialformen	71
11. Dichten	79
12. Stückweise glatte Mengen	86
13. Orientierungen und die Integration von Differentialformen	96
14. Der Gaußsche Integralsatz	103
15.* Beweis des Gaußschen Integralsatzes	112
16. Der Satz von Stokes	121
Bezeichnungen und Konventionen	132
Namen- und Sachverzeichnis	134

§0. Weitere topologische Begriffe im \mathbf{R}^n

Übersicht. Wir definieren die topologischen Begriffe abgeschlossene Hülle, offener Kern und Rand, und beweisen weitere Eigenschaften kompakter Mengen, die in Analysis 2 noch nicht behandelt wurden. Dieser Paragraph braucht nicht als erstes gelesen zu werden, sondern ist zum Nachblättern gedacht.

0.1. Wiederholung. Auf dem \mathbf{R}^n verwenden wir meist die Maximumnorm

$$|v| = \max(|v^1|, \dots, |v^n|)$$

und manchmal die Euklidische Norm

$$\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}.$$

Die offene „Kugel“ mit Mittelpunkt a und Radius r in der Maximumnorm ist

$$B_r(a) = \{x : |x - a| < r\};$$

das ist also der offene Würfel mit Mittelpunkt a und Durchmesser $2r$.

Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn sie unter Limesbildung abgeschlossen ist: Der Limes jeder (in \mathbf{R}^n) konvergenten Folge $a_k \in A$ liegt wieder in A .

Ein Punkt a einer Menge M ist ein *innerer Punkt*, wenn es keine Folge (a_k) im Komplement $\complement M = \mathbf{R}^n \setminus M$ gibt, sodass $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$. Nach Analysis 2, Satz 2.9 ist das gleichbedeutend damit, dass es ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r(a) \subset M$.

Eine Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ heißt *offen*, wenn sie nur aus inneren Punkten besteht. Äquivalente Charakterisierungen sind:

$$\begin{aligned} U \text{ ist offen} &\iff \complement U \text{ ist abgeschlossen} \\ &\iff \text{zu jedem } a \in U \text{ gibt es ein } r > 0 \text{ mit } B_r(a) \subset U. \end{aligned}$$

Eine Menge $V \subset \mathbf{R}^n$ heißt eine *Umgebung* von a , falls a ein innerer Punkt von V ist, oder gleichbedeutend, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r(a) \subset V$.

0.2. Offener Kern, abgeschlossene Hülle und Rand. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ beliebig. Wir setzen

$$\begin{aligned} M^\circ &:= \{a \in M : a \text{ innerer Punkt}\}, \\ \overline{M} &:= \{a \in \mathbf{R}^n : \text{es gibt eine Folge } (a_k) \text{ in } M \text{ mit } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a\}, \end{aligned}$$

genannt der *offene Kern* und die *abgeschlossene Hülle* von M . Offenbar gilt

$$M^\circ \subset M \subset \overline{M},$$

und wir definieren den *Rand* von M als

$$\text{Rd } M := \overline{M} \setminus M^\circ.$$

Die Randpunkte von M können teils zu M und teils zu $\complement M$ gehören.

0.3. Satz. Seien M, X, Y beliebige Teilmengen des \mathbf{R}^n .

(a) Die abgeschlossene Hülle ist charakterisiert durch

$$a \in \overline{M} \iff M \cap V \neq \emptyset \text{ für jede Umgebung } V \text{ von } a.$$

(b) Es gilt

$$\mathbb{C}(\overline{M}) = (\mathbb{C}M)^\circ.$$

(c) M° ist die größte offene Teilmenge von M , und \overline{M} ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von M .

(d) Es gelten die Regeln

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}, \quad \overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}, \quad (1)$$

$$(X \cap Y)^\circ = X^\circ \cap Y^\circ, \quad (X \cup Y)^\circ \supset X^\circ \cup Y^\circ, \quad (2)$$

Beweis. (a) Sei $a \in \overline{M}$, etwa $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ mit $a_k \in M$. Dann gibt es zu jeder Umgebung V von a ein k_0 mit $a_k \in V$ für alle $k \geq k_0$. Insbesondere ist $a_{k_0} \in M \cap V$. Zum Beweis der Umkehrung wähle ein $a_k \in M \cap B_{1/k}(a)$, für alle $k \in \mathbf{N}$. Dann ist (a_k) eine Folge in M mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$.

(b) Nach (a) ist a genau dann nicht in \overline{M} , wenn es eine Umgebung V von a mit $M \cap V = \emptyset$, also $V \subset \mathbb{C}M$, gibt, und das bedeutet gerade, dass a ein innerer Punkt von $\mathbb{C}M$ ist.

(c) Sei U eine offene Teilmenge von M . Dann ist jeder Punkt von U ein innerer Punkt von U und damit auch von M . Also ist $U \subset M^\circ$, und es bleibt noch die Offenheit von M° zu zeigen. Für $a \in M^\circ$ gibt es ein $r > 0$, sodass $B_r(a) \subset M$. Da die offene Kugel $B_r(a)$ offen ist, ist jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt von $B_r(a)$ und daher erst recht von M . Also gilt $B_r(a) \subset M^\circ$, und somit ist a ein innerer Punkt von M° .

Die zweite Aussage folgt hieraus wegen (b) und der Tatsache, dass sich offene und abgeschlossene Mengen bei Komplementbildung gerade vertauschen.

(d) Wegen (b) genügt es, die Formeln (1) zu beweisen. Aus der Definition der abgeschlossenen Hülle ist klar, dass die zweite Formel von (1) sowie die Inklusion „ \supset “ in der ersten Formel gilt. Also bleibt nur $\overline{X \cup Y} \subset \overline{X} \cup \overline{Y}$ zu zeigen. Sei $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ mit $a_k \in X \cup Y$. Falls $a_k \in X$ für unendlich viele $k \in \mathbf{N}$, so gibt es eine Teilfolge $a_{k_j} \in X$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = a$, und daher $a \in \overline{X}$. Analog schließt man, wenn $a_k \in Y$ für unendlich viele k . Da einer der beiden Fälle eintreten muss, sind wir fertig.

0.4. Satz. Sei $n = p + q$ und $X \subset \mathbf{R}^p, Y \subset \mathbf{R}^q$. Dann gelten die Formeln

$$\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}, \quad (1)$$

$$(X \times Y)^\circ = X^\circ \times Y^\circ, \quad (2)$$

$$\text{Rd}(X \times Y) = (\text{Rd } X \times \overline{Y}) \cup (\overline{X} \times \text{Rd } Y). \quad (3)$$

Beweis. Formel (1) ist klar auf Grund der Definitionen, denn eine Folge von Paaren $(a_k, b_k) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ konvergiert genau dann gegen (a, b) , wenn $a_k \rightarrow a$ und $b_k \rightarrow b$. Für (2) beachte, dass $(a, b) \in X^\circ \times Y^\circ$ genau dann, wenn es $r_i > 0$ gibt mit $B_{r_1}(a) \subset X$ und $B_{r_2}(b) \subset Y$. Sei $r = \min(r_1, r_2)$. Weil wir die Maximumnorm verwenden, ist $B_r(a, b) = B_r(a) \times B_r(b)$. Also ist (a, b) ein innerer Punkt von $X \times Y$. Die Umkehrung ist klar.

Allgemein gilt die mengentheoretische Formel

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = [(A \setminus C) \times B] \cup [A \times (B \setminus D)].$$

Daher folgt nach (1) und (2)

$$\begin{aligned} \text{Rd}(X \times Y) &= (\overline{X} \times \overline{Y}) \setminus (X^\circ \times Y^\circ) = [(\overline{X} \setminus X^\circ) \times \overline{Y}] \cup [\overline{X} \times (\overline{Y} \setminus Y^\circ)] \\ &= (\text{Rd } X \times \overline{Y}) \cup (\overline{X} \times \text{Rd } Y). \end{aligned}$$

0.5. Beispiele. (a) Für ein kompaktes Intervall $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ ist $I = \overline{I}$ und $I^\circ =]a, b[$, also $\text{Rd } I = \{a, b\}$.

(b) Ein (kompaktes) *Rechteck* im \mathbf{R}^2 ist ein Produkt von zwei kompakten Intervallen, etwa $R = [a, b] \times [c, d]$. Das Innere von R ist nach 0.4

$$R^\circ =]a, b[\times]c, d[.$$

Der Rand von R ist die Vereinigung der 4 eindimensionalen Strecken

$$\{a\} \times [c, d], \{b\} \times [c, d], [a, b] \times \{c\}, [a, b] \times \{d\}.$$

0.6. Kompakte Mengen. Wir erinnern an die folgende Definition (Analysis 2, §1): Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Limes wieder in K liegt. Nach Analysis 2, Satz 1.6 ist eine Teilmenge des \mathbf{R}^n genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Das direkte Produkt zweier kompakter Mengen $K_1 \subset \mathbf{R}^p$ und $K_2 \subset \mathbf{R}^q$ ist kompakt im \mathbf{R}^q . Das folgt leicht aus der eben erwähnten Charakterisierung oder auch direkt aus der Definition der Kompaktheit (Aufgabe!).

Der *Durchmesser* $\text{diam}(A)$ einer Menge A und der *Abstand* $d(A, B)$ von zwei Mengen A und B sind definiert als

$$\text{diam } A = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}, \quad d(A, B) = \inf\{|x - y| : x \in A, y \in B\}.$$

Wir beweisen nun eine Reihe weiterer wichtiger Eigenschaften kompakter Mengen.

0.7. Satz (Schachtelungsprinzip im \mathbf{R}^n). *Seien $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ kompakte nicht leere Mengen im \mathbf{R}^n mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diam } A_k = 0$. Dann ist $D := \bigcap_1^\infty A_k = \{a\}$ ein einziger Punkt.*

Beweis. D besteht nicht aus mehr als einem Punkt, denn wenn $a, b \in D$, so ist $|a - b| \leq \text{diam } A_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$, und daher $a = b$.

Zum Beweis, dass D nicht leer ist, wähle $a_k \in A_k$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Wegen der Kompaktheit von A_1 können wir, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ existiert. Weil die A_k absteigen, gilt $a_m \in A_k$ für alle $m \geq k$. Für $m \rightarrow \infty$ folgt daraus $a \in A_k$ wegen der Abgeschlossenheit von A_k . Da k beliebig war, ist $a \in D$, wie behauptet.

0.8. Satz. *Sei A abgeschlossen, K kompakt, und sei $A \cap K = \emptyset$. Dann ist der Abstand $d(A, K) > 0$.*

Beweis. Wäre $d(A, K) = 0$, dann gäbe es Folgen $a_k \in A$ und $b_k \in K$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - b_k| = 0$. Wegen der Kompaktheit von K können wir, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b \in K$ existiert. Dann folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = b \in A \cap K$ wegen der Abgeschlossenheit von A , Widerspruch.

0.9. Satz. Sei $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt und sei $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.

Beweis. Sei (b_k) eine Folge in $f(K)$ und sei etwa $b_k = f(a_k)$ für geeignete $a_k \in K$. Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine Teilfolge (a_{k_j}) mit $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{k_j} = a \in K$. Setze $b_{k_j} = f(a_{k_j})$. Dann folgt aus der Stetigkeit von f , dass $\lim_{j \rightarrow \infty} b_{k_j} = f(a) \in f(K)$.

0.10. Gleichmäßige Stetigkeit. Sei $D \subset \mathbf{R}^n$. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Offenbar ist dann f stetig auf D , aber die Umkehrung ist nicht richtig, Beispiel: $f(x) = x^2$ auf $D = \mathbf{R}$. Unter Zusatzvoraussetzungen kann man jedoch aus der gewöhnlichen Stetigkeit die gleichmäßige schließen:

0.11. Satz. Auf einer kompakten Menge ist eine stetige Abbildung gleichmäßig stetig.

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt. Wäre K kompakt und $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ nicht gleichmäßig stetig, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\delta = 1/k$ Punkte a_k und b_k in K existieren mit $|a_k - b_k| < 1/k$, aber $|f(a_k) - f(b_k)| \geq \varepsilon$. Wegen der Kompaktheit von K können wir, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \in K$ existiert. Dann ist auch $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$, und wegen der Stetigkeit von f in a folgt $\varepsilon \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |f(a_k) - f(b_k)| = |f(a) - f(a)| = 0$, Widerspruch.

Ein ähnliches Resultat gilt für lokal dehnungsbeschränkte Abbildungen:

0.12. Satz. Eine auf einer kompakten Menge lokal dehnungsbeschränkte Abbildung ist dehnungsbeschränkt.

Beweis. Angenommen, $K \subset \mathbf{R}^n$ ist kompakt und $f : K \rightarrow \mathbf{R}^m$ ist lokal dehnungsbeschränkt, erfüllt aber keine Lipschitzbedingung. Dann gäbe es zu jedem $k \in \mathbf{N}$ Punkte $a_k, b_k \in K$ mit $|f(a_k) - f(b_k)| > k|a_k - b_k|$. Wegen der Kompaktheit von K kann man, eventuell nach Übergang zu Teilfolgen, annehmen, dass $a_k \rightarrow a \in K$ und $b_k \rightarrow b \in K$ konvergieren. Weil f als lokal dehnungsbeschränkte Abbildung stetig ist, konvergiert die Folge $|f(a_k) - f(b_k)|$ gegen $|f(a) - f(b)|$, insbesondere ist sie beschränkt, etwa durch C . Daraus folgt $|a_k - b_k| \leq C/k \rightarrow 0$, also $a = b$. Wegen der lokalen Dehnungsbeschränktheit von f gibt es eine Umgebung V von a und ein $L > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in V$. Andererseits liegen a_k und b_k für alle genügend großen k in V , Widerspruch!

§1. Der Inhalt von Quadern

Übersicht. In diesem Paragraphen definieren wir den Inhalt eines kompakten Quaders als das Produkt seiner Seitenlängen. Wir führen den Begriff der Unterteilung eines Quaders in fast disjunkte Teilquader ein, und zeigen, dass der Inhalt die Summe der Inhalte der Teilquader ist.

1.1. Definitionen. Ein *Quader* im \mathbf{R}^n ist ein Produkt von kompakten Intervallen, etwa $Q = I_1 \times \dots \times I_n$, wobei $I_j = [a^j, b^j] \subset \mathbf{R}$. Insbesondere ist also $I_j = \emptyset$ falls $a^j > b^j$. Das Innere von Q ist nach 0.4 (mehrfach angewandt)

$$Q^\circ = (I_1)^\circ \times \dots \times (I_n)^\circ.$$

Der Quader heißt *ausgeartet*, falls $Q^\circ = \emptyset$ ist, mit anderen Worten: falls $a^j \geq b^j$ für mindestens ein j . Ein nicht ausgearteter Quader lässt sich aus seinem Inneren rekonstruieren:

$$\overline{Q^\circ} = Q \quad \text{falls } Q^\circ \neq \emptyset, \quad (1)$$

wie man sich leicht überlegt. Ferner ist klar, dass der Durchschnitt zweier Quader wieder ein Quader ist.

Der n -dimensionale *Inhalt* eines Quaders Q ist definiert als

$$\mu^n(Q) = \mu(Q) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n (b^j - a^j) & \text{falls } Q \neq \emptyset, \\ 0 & \text{falls } Q = \emptyset. \end{cases} \quad (2)$$

Für $n \leq 3$ stimmt das mit der anschaulichen Vorstellung vom Inhalt (Länge, Fläche, Rauminhalt) eines Intervalls bzw. Rechtecks bzw. dreidimensionalen Quaders überein. Offenbar gilt $\mu(Q) \geq 0$ und

$$\mu(Q) = 0 \quad \iff \quad Q \text{ ist ausgeartet.}$$

Ist ferner $Q = Q' \times Q''$ das direkte Produkt von zwei Quadern $Q' \subset \mathbf{R}^p$ und $Q'' \subset \mathbf{R}^q$, dann gilt

$$\mu^n(Q' \times Q'') = \mu^p(Q') \mu^q(Q''). \quad (3)$$

1.2. Unterteilungen. Sei E eine endliche Indexmenge. Eine endliche Familie $T = (Q_i)_{i \in E}$ von Quadern heißt *fast disjunkt*, wenn

$$\mu(Q_i \cap Q_j) = 0 \quad \text{für } i \neq j. \quad (1)$$

Da der Durchschnitt von zwei Quadern wieder ein Quader ist und die Quader vom Inhalt 0 genau die ausgearteten sind, ist (1) äquivalent zu

$$Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset \quad \text{für } i \neq j. \quad (2)$$

Im nichtausgearteten Fall gilt sogar

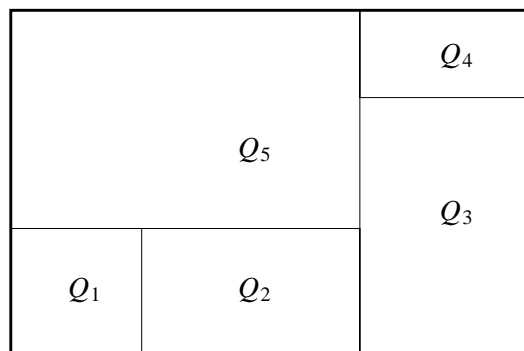
$$Q_i \cap Q_j = \emptyset \quad \text{für } i \neq j \text{ und } Q_i^\circ \neq \emptyset. \quad (3)$$

In der Tat ist $Q_i = \overline{Q_i^\circ}$, und allgemein gilt für disjunkte offene Mengen U und V , dass auch $U \cap \overline{V} = \emptyset$; denn wäre $a \in U \cap \overline{V}$, dann hätte jede Umgebung von a , also insbesondere U , nicht leeren Durchschnitt mit V .

Eine fast disjunkte Familie T heißt eine *Unterteilung* eines Quaders Q , wenn $Q_i \subset Q$ und

$$\bigcup_{i \in E} Q_i = Q. \quad (4)$$

Ein Beispiel im \mathbf{R}^2 ist etwa



Genaugenommen ist also eine Unterteilung eine Abbildung $T, i \mapsto T(i) = Q_i$, von E in die Menge aller Teilquader von Q mit den Eigenschaften (4) und (1). Insbesondere wird *nicht* verlangt, dass $Q_i \neq Q_j$ für $i \neq j$. Allerdings folgt aus $i \neq j$ und $Q_i = Q_j$ wegen (2), dass $Q_i^\circ = Q_j^\circ = \emptyset$, die Quader also ausgeartet sein müssen.

Wir zeigen weiter unten in 1.4, dass die ausgearteten Quader einer Unterteilung weggelassen werden können, ohne die Eigenschaft (4) zu zerstören. Dass wir sie trotzdem zulassen, macht gewisse Konstruktionen einfacher, bei denen sie automatisch auftreten können. Zum Beispiel sei $T' = (Q'_j)_{j \in F}$ eine Unterteilung eines weiteren Quaders Q' . Dann ist

$$T \cdot T' := (Q_i \cap Q'_j)_{(i,j) \in E \times F} \quad (5)$$

eine Unterteilung von $Q \cap Q'$, mit der neuen Indexmenge $E \times F$. Die Eigenschaft (4) ist klar, und (1) folgt aus

$$(Q_i \cap Q'_j)^\circ \cap (Q_k \cap Q'_l)^\circ = (Q_i^\circ \cap Q'_j^\circ) \cap (Q_k^\circ \cap Q'_l^\circ) = \emptyset \quad \text{für } (i, j) \neq (k, l).$$

Die Unterteilung (5) heißt das *Produkt* der Unterteilungen T und T' . Selbst wenn in T und T' keine ausgearteten Quader vorkommen, kann das in $T \cdot T'$ der Fall sein, wie man an Beispielen leicht sieht.

Seien Q' und Q'' fast disjunkte Quader, sodass $Q' \cup Q'' = Q$ wieder ein Quader ist, und seien $T' = (Q'_i)_{i \in E'}$ bzw. $T'' = (Q''_j)_{j \in E''}$ Unterteilungen von Q' bzw. Q'' . Dann bekommt man eine Unterteilung $T = T' \dot{\cup} T''$ von Q , genannt die *Zusammensetzung* von T' und T'' , mit der Indexmenge $E = E' \dot{\cup} E''$ (disjunkte Vereinigung), durch die Definition

$$Q_i = \begin{cases} Q'_i & \text{falls } i \in E', \\ Q''_i & \text{falls } i \in E''. \end{cases} \quad (6)$$

Es ist klar, wie man die Zusammensetzung von mehr als zwei Unterteilungen zu definieren hat.

1.3. Lemma. *Seien A und B Teilmengen des \mathbf{R}^n , sei A abgeschlossen und $A^\circ = B^\circ = \emptyset$. Dann ist auch $(A \cup B)^\circ = \emptyset$.*

Beweis. Sei $V = A \cup B$. Dann ist $V^\circ \cap \overset{\circ}{\cup} A$ offen (weil A abgeschlossen ist), und enthalten in B , denn $V^\circ \subset A \cup B$. Wegen $B^\circ = \emptyset$ folgt $V^\circ \cap \overset{\circ}{\cup} A = \emptyset$, also $V^\circ \subset A$. Da aber $A^\circ = \emptyset$, ergibt sich $V^\circ = \emptyset$.

1.4. Lemma. *Sei $T = (Q_i)_{i \in E}$ eine Unterteilung eines nicht ausgearteten Quaders Q , sei $E^* = \{i \in E : Q_i \text{ nicht ausgeartet}\}$, und sei F eine Teilmenge von E . Dann gilt:*

$$T' = (Q_i)_{i \in F} \quad \text{ist eine Unterteilung von } Q \quad \iff \quad F \supset E^*.$$

Insbesondere bilden die nichtausgearteten Quader einer Unterteilung immer noch eine Unterteilung.

Beweis. (a) Da die Q_i fast disjunkt sind, ist T' genau dann eine Unterteilung von Q , wenn die Vereinigung der Q_i ($i \in F$) ganz Q ist. Wir setzen

$$P := \bigcup_{i \in F} Q_i, \quad A = \bigcup_{i \notin F} Q_i.$$

und zeigen $P = Q$ unter der Voraussetzung $F \supset E^*$. Als endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind A und P abgeschlossen, es ist $Q = P \cup A$, und A hat nach Lemma 1.3 (und einer naheliegenden Induktion) keine inneren Punkte. Weiter ist $Q^\circ \setminus P = Q^\circ \cap \complement P$ offen und in A enthalten, also leer, woraus $Q^\circ \subset P$ und weiter $Q = \overline{Q^\circ} \subset P$ nach 1.1.1 folgt. Das ist die Behauptung.

(b) Umgekehrt sei T' eine Unterteilung von Q , aber es gebe einen Index $k \in E^* \setminus F$. Nach dem unter (a) Bewiesenen ist auch $(Q_i)_{i \in F \cap E^*}$ eine Unterteilung von Q . Weiter gilt $Q_i \cap Q_k^\circ = \emptyset$ für alle $i \in E^*$, $i \neq k$, nach 1.2.3. Nun erhalten wir den Widerspruch

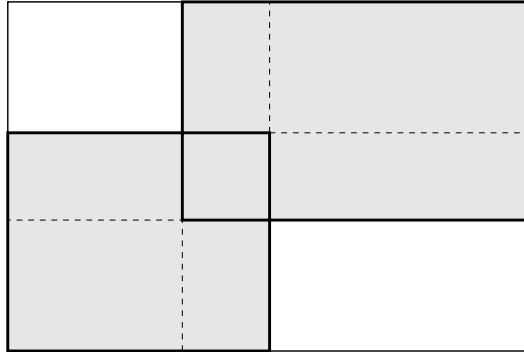
$$\emptyset \neq Q_k^\circ = Q_k^\circ \cap Q = \bigcup_{i \in F \cap E^*} Q_k^\circ \cap Q_i = \emptyset,$$

und die Behauptung folgt.

1.5. Lemma und Definition. Sei $Q \subset \mathbf{R}^n$ ein Quader und \mathcal{F} eine endliche Familie von (nicht notwendig fast disjunkten) Teilquadern von Q . Dann gibt es eine Unterteilung $(Q_i)_{i \in E}$ von Q , sodass sich jeder Quader $R \in \mathcal{F}$ darstellen lässt als $R = \bigcup_{i \in E_R} Q_i$ für eine geeignete Teilmenge E_R von E . Falls alle Quader in \mathcal{F} nicht-ausgeartet sind, kann man auch die Q_i nicht ausgeartet wählen.

Eine solche Unterteilung heißt der Familie \mathcal{F} angepasst.

Anschaulich erhält man die Unterteilung durch Durchziehen der Seiten der Quader in \mathcal{F} :



Hier besteht \mathcal{F} aus den beiden schattierten stark umrandeten Quadern, die angepasste Unterteilung von Q hat 9 Teilquader.

Der formale *Beweis* erfolgt durch Induktion nach der Dimension n . Im Fall $n = 1$ sei $Q = [a, b]$ und sei $\{a_0 = a, a_1, \dots, a_m = b\}$ die nach der Größe geordnete Menge der Randpunkte von Q und der Quader in \mathcal{F} . Dann leistet $E := \{1, \dots, m\}$ und $Q_i := [a_{i-1}, a_i]$ das Gewünschte.

Für den Induktionsschritt schreiben wir $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$, $Q = Q' \times Q''$, und bezeichnen mit pr_1 und pr_2 die Projektionen auf den ersten und zweiten Faktor. Dann bilden die $\text{pr}_1(R)$ bzw. $\text{pr}_2(R)$, $R \in \mathcal{F}$, endliche Familien von Quadern in Q' bzw. Q'' . Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also Unterteilungen $(Q'_i)_{i \in E'}$ von Q' und $(Q''_j)_{j \in E''}$ von Q'' , sodass für alle $R \in \mathcal{F}$

$$\text{pr}_1(R) = \bigcup_{i \in E'_R} Q'_i \quad \text{und} \quad \text{pr}_2(R) = \bigcup_{j \in E''_R} Q''_j,$$

mit geeigneten Teilmengen $E'_R \subset E'$ und $E''_R \subset E''$. Dann ist $(Q'_i \times Q''_j)_{(i,j) \in E' \times E''}$ eine Unterteilung von Q , und sie hat wegen

$$R = \text{pr}_1(R) \times \text{pr}_2(R) = \bigcup_{(i,j) \in E'_R \times E''_R} Q'_i \times Q''_j$$

die gewünschte Eigenschaft.

Schließlich folgt die letzte Aussage leicht aus Lemma 1.4.

1.6. Lemma. Sei $R = P \times Q \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ ein nicht ausgearteter Quader und sei $(R_k)_{k \in K}$ eine nicht ausgeartete Unterteilung von R . Dann gibt es nicht ausgeartete Unterteilungen $(P_i)_{i \in E}$ von P und $(Q_j)_{j \in F}$ von Q , sodass für jedes $k \in K$

$$\text{pr}_1(R_k) = \bigcup_{i \in E_k} P_i, \quad \text{pr}_2(R_k) = \bigcup_{j \in F_k} Q_j, \quad (1)$$

mit geeigneten Teilmengen $E_k \subset E$ und $F_k \subset F$. Diese Teilmengen sind eindeutig bestimmt, und sie erfüllen überdies

$$\dot{\bigcup}_{k \in K} (E_k \times F_k) = E \times F \quad (2)$$

Beweis. Die Projektionen der R_k in den \mathbf{R}^p bzw. \mathbf{R}^q bilden endliche Familien von nicht ausgearteten Quadern. Wähle dazu angepasste nicht ausgeartete Unterteilungen $(P_i)_{i \in E}$ und $(Q_j)_{j \in F}$ wie in Lemma 1.5. Dann gilt (1) mit geeigneten E_k und F_k . Weil die R_k nicht ausgeartet und fast disjunkt sind, sind die E_k und F_k eindeutig bestimmt, und die Mengen $E_k \times F_k$ sind paarweise disjunkt.

Sei G linke Seite von (2). Dann ist sowohl $(P_i \times Q_j)_{(i,j) \in E \times F}$ als auch $(P_i \times Q_j)_{(i,j) \in G}$ eine Unterteilung von R , weil ja $(R_k)_{k \in K}$ eine Unterteilung von R ist und somit die Vereinigung der R_k ganz R ist. Da man nach Lemma 1.4 in einer Unterteilung keine nicht ausgearteten Quader weglassen kann, folgt $G = E \times F$.

Nun können wir endlich den zwar anschaulich einleuchtenden, aber nicht trivialen Satz von der Additivität des Inhalts bei Unterteilungen beweisen:

1.7. Satz (Additivität des Inhalts). Ist $(R_k)_{k \in K}$ eine Unterteilung des Quaders $R \subset \mathbf{R}^n$, so gilt

$$\mu(R) = \sum_{k \in K} \mu(R_k).$$

Beweis. Durch Induktion nach der Dimension n . Weil ausgeartete Teilquader das Maß 0 haben und nach Lemma 1.4 in einer Unterteilung weggelassen werden können, nehmen wir an, dass alle R_k nicht ausgeartet sind. Im Fall $n = 1$ kann man nach einer Umindizierung erreichen, dass $R_k = [a_{k-1}, a_k]$, wobei $a_0 < a_1 < \dots < a_m$ und $R = [a_0, a_m]$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^m \mu(R_k) = \sum_{k=1}^m (a_k - a_{k-1}) = a_m - a_0 = \mu(R).$$

Für den Induktionsschritt sei $n = p + q$ mit $p < n$ und $q < n$, und entsprechend $R = P \times Q \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$. Wähle $(P_i)_{i \in E}$ und $(Q_j)_{j \in F}$ wie in Lemma 1.6. Wegen 1.6.1 ist dann $(P_i)_{i \in E_k}$ eine Unterteilung von $\text{pr}_1(R_k)$ und Analoges gilt für $\text{pr}_2(R_k)$. Also folgt aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} \mu(R_k) &= \mu(\text{pr}_1(R_k) \times \text{pr}_2(R_k)) = \mu(\text{pr}_1(R_k))\mu(\text{pr}_2(R_k)) \\ &= \left(\sum_{i \in E_k} \mu(P_i) \right) \left(\sum_{j \in F_k} \mu(Q_j) \right) \\ &= \sum_{(i,j) \in E_k \times F_k} \mu(P_i)\mu(Q_j). \end{aligned}$$

Durch Summation über k folgt nun

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \mu(R_k) &= \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in E_k \times F_k} \mu(P_i) \mu(Q_j) = \sum_{(i,j) \in E \times F} \mu(P_i) \mu(Q_j) \quad (\text{nach 1.6.2}) \\ &= \left(\sum_{i \in E} \mu(P_i) \right) \left(\sum_{j \in F} \mu(Q_j) \right) = \mu(P) \mu(Q) \quad (\text{nach Induktionsannahme}) \\ &= \mu(R), \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

1.8. Satz. *Jede endliche Familie $(R_k)_{k \in K}$ von fast disjunkten Teilquadern eines Quaders R lässt sich zu einer Unterteilung von R erweitern.*

Beweis. Wähle eine angepasste Unterteilung $(Q_i)_{i \in E}$ von R und für jedes $k \in K$ eine Teilmenge E_k mit $R_k = \bigcup_{i \in E_k} Q_i$ wie in Lemma 1.5. Definiere eine neue Indexmenge

$$F := K \dot{\cup} \left(E \setminus \bigcup_{k \in K} E_k \right),$$

und setze

$$P_j := \begin{cases} R_j & \text{falls } j \in K, \\ E_j & \text{falls } j \in F \setminus K. \end{cases}$$

Dann ist $(P_j)_{j \in F}$ eine Unterteilung mit den gewünschten Eigenschaften: Die Vereinigung der P_j ist klarerweise ganz R . Zum Beweis, dass sie fast disjunkt sind, bleibt, weil dies für die R_k und die Q_i schon der Fall ist, nur noch $P_j^\circ \cap P_k^\circ = \emptyset$ im Fall zu zeigen, dass $k \in K$ und $j \in F \setminus K$. Es genügt, $P_j = Q_j$ und $P_k = R_k$ als nicht ausgeartet anzunehmen. Sei E_k^* die Menge aller $i \in E_k$, sodass Q_i nicht ausgeartet ist. Dann gilt $R_k = \bigcup_{i \in E_k^*} Q_i$ nach Lemma 1.4, und wegen 1.2.3 folgt aus $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$, dass $Q_i \cap Q_j^\circ = \emptyset$. Also ist nun sogar $R_k \cap Q_j^\circ = \left(\bigcup_{i \in E_k^*} Q_i \right) \cap Q_j^\circ = \emptyset$.

1.9. Korollar (Subadditivität des Inhalts). *Sei $(R_k)_{k \in K}$ eine endliche Familie von fast disjunkten Teilquadern von R . Dann ist $\sum_{k \in K} \mu(R_k) \leq \mu(R)$.*

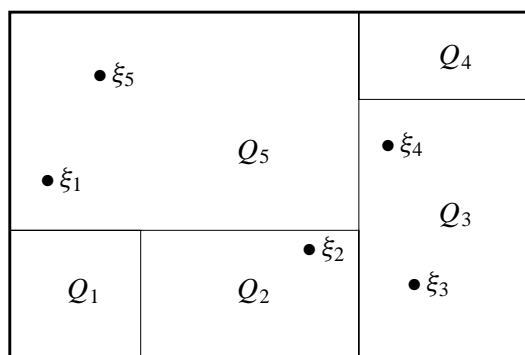
Das folgt sofort aus 1.8 und 1.7.

§2. Das Integral über Quader

Übersicht. Wir definieren die Riemannsche Summe $S_Z(f)$ einer Funktion f auf einem Quader bezüglich einer Zerlegung (Unterteilung mit Stützstellen) Z . Nach einer auf J. Kurzweil und E.J. McShane zurückgehenden Methode wird die Feinheit einer Zerlegung bezüglich einer positiven Funktion, und damit der Limes der Riemannschen Summen $S_Z(f)$ erklärt. Dieser Limes ist, falls er existiert, bereits das Lebesgue-Integral von f . Wir beweisen die grundlegenden Eigenschaften des Integrals: Linearität, Positivität, absolute Integrierbarkeit und die Integraldreiecksungleichung. Hilfsmittel sind das Verträglichmachen von zwei Zerlegungen und das Cauchy Kriterium, aus dem auch leicht die Integrierbarkeit stetiger Funktionen folgt.

2.1. Q -feine Zerlegungen und Riemannsche Summen. Eine (gestützte) Zerlegung eines Quaders Q ist eine endliche Familie $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$, wobei $T = (Q_i)_{i \in E}$ eine Unterteilung von Q ist und die ξ_i , die sogenannten *Stützstellen* der Zerlegung,

Punkte in Q sind.



Es wird also ausdrücklich zugelassen, dass die Stützstelle ξ_i nicht im zugehörigen Teilquader Q_i liegt! Würde man $\xi_i \in Q_i$ verlangen, dann wären wichtige Konstruktionen, etwa die in 2.8 beschriebene, nicht mehr durchführbar.

Sei $f: Q \rightarrow \mathbf{R}$ eine beliebige Funktion. Die *Riemannsche Summe* von f bezüglich Z ist

$$S_Z(f) = \sum_{i \in E} f(\xi_i) \mu(Q_i). \quad (1)$$

Wie bei einer Variablen kann man $S_Z(f)$, jedenfalls für $f \geq 0$, als eine Approximation an den $(n+1)$ -dimensionalen Rauminhalt der Ordinatenmenge von f deuten, die durch den Graphen von f , den Quader Q und die durch die Seiten von Q gehenden vertikalen Hyperebenen begrenzt wird.

Um die Güte dieser Approximation zu messen, benützen wir den folgenden Feinheitsbegriff für Zerlegungen. Wie in 0.1 sei $|v|$ die Maximumnorm eines Vektors $v \in \mathbf{R}^n$ und $B_r(a)$ der offene Würfel mit Mittelpunkt a und Seitenlänge $2r$. Nun sei ϱ eine beliebige positive Funktion auf Q (oder einer größeren Menge). Eine Zerlegung Z von Q heißt ϱ -*fein* oder *feiner als* ϱ , geschrieben $Z < \varrho$, wenn

$$Q_i \subset B_{\varrho(\xi_i)}(\xi_i) \quad (2)$$

für jedes $i \in E$ gilt. Die Feinheitsbedingung besagt also, dass die Teilquader Q_i von den Stützstellen nicht weiter als $\varrho(\xi_i)$ entfernt sind. Klarerweise erfüllt die Feinheitsrelation die folgende Transitivitätseigenschaft:

$$Z < \varrho \quad \text{und} \quad \varrho \leq \varrho' \quad \implies \quad Z < \varrho'. \quad (3)$$

Wie bei Unterteilungen kann man auch zwei Zerlegungen Z' und Z'' von relativ disjunkten Quadern Q' und Q'' zu einer Zerlegung Z der Vereinigung $Q' \cup Q''$ zusammensetzen, sofern diese Vereinigung wieder ein Quader ist, indem man zusätzlich zu 1.2.6 die Stützstellen von Z durch

$$\xi_i = \begin{cases} \xi'_i & \text{falls } i \in E' \\ \xi''_i & \text{falls } i \in E'' \end{cases}$$

definiert. Dabei folgt aus der ϱ -Feinheit von Z' und Z'' die von Z . Analoges gilt für die Zusammensetzung von mehr als zwei Zerlegungen. Das benützen wir beim Beweis des folgenden wichtigen Lemmas.

2

2.2. Lemma. Sei $\varrho: Q \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ eine beliebige positive Funktion. Dann gibt es Zerlegungen Z von Q mit $Z < \varrho$.

Beweis. Angenommen, es gäbe kein solches Z . Unterteile Q durch Halbieren aller Seiten in 2^n Teilquader. Dann gibt es auch für mindestens einen Teilquader keine ϱ -feine Zerlegung, denn sonst könnte man die Zerlegungen der Teilquader zusammensetzen und bekäme eine ϱ -feine Zerlegung für Q . Durch fortwährendes Halbieren erhält man also eine Folge $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ von Quadern, deren Durchmesser gegen Null gehen und von denen keiner eine ϱ -feine Zerlegung besitzt. Nach dem Schachtelungsprinzip 0.7 besteht der Durchschnitt aller Q_k aus genau einem Punkt a . Dann ist aber $Q_k \subset B_{\varrho(a)}(a)$ für genügend großes k , und somit ist (a, Q_k) trivialerweise eine ϱ -feine Zerlegung von Q_k (mit nur einem Teilquader und einer Stützstelle), Widerspruch!

2.3. Definition des Integrals. Eine reelle Funktion f auf Q heißt *integrierbar*, wenn der Limes der Riemannschen Summen

$$\lim_Z S_Z(f) = A \quad (1)$$

im folgenden Sinne existiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass für jede Zerlegung Z von Q gilt:

$$Z < \varrho \implies |S_Z(f) - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

In diesem Fall nennt man $A \in \mathbf{R}$ das *Integral von f über Q* und verwendet eine der folgenden Schreibweisen:

$$A = \int_Q f = \int_Q f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \cdots dx^n = \int_Q f(x) dx = \int_Q f(x) d\mu(x).$$

Die Menge der integrierbaren Funktionen auf Q bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}^1(Q).$$

Hierbei soll der Buchstabe \mathcal{L} an den französischen Mathematiker H. Lebesgue (1875–1941) erinnern, auf den diese Integrationstheorie, allerdings nicht die hier verwendete Methode, zurückgeht, und der obere Index 1 andeuten, dass f^1 (und nicht eine höhere Potenz von f , wie später betrachtet) integrierbar ist. Damit diese Definition einen Sinn hat, müssen wir zeigen, dass das Integral, falls es existiert, eindeutig bestimmt ist. Angenommen, es gilt (2) für A_1 und A_2 . Dann gibt es Funktionen ϱ_1 und ϱ_2 , sodass für alle Zerlegungen $Z_j < \varrho_j$ gilt: $|S_{Z_j} - A_j| < \varepsilon$ ($j = 1, 2$). Sei $\varrho = \min(\varrho_1, \varrho_2)$. Nach Lemma 2.2 gibt es ein $Z < \varrho$. Damit folgt $Z < \varrho_j$ nach 2.1.3 und somit $|A_1 - A_2| \leq |A_1 - S_Z(f)| + |S_Z(f) - A_2| < 2\varepsilon$. Da ε beliebig war, muss $A_1 = A_2$ sein.

Schließlich treffen wir die folgende Vereinbarung: Ist f eine auf einer Obermenge von Q definierte Funktion, so nennen wir *f über Q integrierbar*, falls dies für die Restriktion $f|_Q$ der Fall ist, und schreiben einfach $\int_Q f$ anstelle von $\int_Q (f|_Q)$.

2.4.* Das Integral als Netzlimes. Der Limes 2.3.1 lässt sich folgendermaßen als der Limes eines Netzes auffassen. Sei Λ die Menge aller Paare (Z, ϱ) , wobei Z eine Zerlegung von Q feiner als ϱ sei. Dann ist Λ mit der Relation

$$(Z, \varrho) \prec (Z', \varrho') \iff \varrho \leq \varrho'$$

eine nach unten gerichtete Menge. In der Tat gibt es zu $(Z_i, \varrho_i) \in \Lambda$ ($i = 1, 2$) nach Lemma 2.2 eine Zerlegung $Z \prec \min(\varrho_1, \varrho_2)$, und dann gilt $(Z, \varrho) \prec (Z_i, \varrho_i)$. Daher ist, für eine gegebene Funktion f auf Q , die Abbildung $\sigma_f : \Lambda \rightarrow \mathbf{R}$, $\sigma_f(Z, \varrho) := S_Z(f)$, ein Netz in \mathbf{R} . Nach der allgemeinen Limesdefinition für Netze gilt $\lim \sigma_f = A$ dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $(Z_0, \varrho_0) \in \Lambda$ gibt, sodass $|\sigma_f(Z, \varrho) - A| < \varepsilon$ für alle $(Z, \varrho) \prec (Z_0, \varrho_0)$. Mit Hilfe von 2.1.3 ist nun leicht zu sehen, dass dies zu 2.3.1 äquivalent ist.

2.5. Beispiele. (a) Die konstante Funktion 1 auf Q ist integrierbar und hat das Integral

$$\int_Q 1 = \mu(Q), \quad (1)$$

denn nach Satz 1.7 hat jede Riemannsche Summe $S_Z(1)$ den Wert $\mu(Q)$.

(b) Etwas allgemeiner sei $P \subset Q$ ein Teilquader von Q und sei $f = \chi_P$ die charakteristische Funktion von P :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in P, \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus P, \end{cases}$$

definiert. Dann ist f über Q integrierbar und $\int_Q f = \mu(P)$.

Zum Beweis sei, für $\delta > 0$, P_δ der um δ nach aussen vergrößerte Quader, also

$$P_\delta = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, P) \leq \delta\} = \prod_{j=1}^n [a^j - \delta, b^j + \delta],$$

wenn etwa P das Produkt der Intervalle $[a^j, b^j]$ ist. Offenbar ist $\mu(P_\delta)$ ein Polynom vom Grad n in δ , mit konstantem Term $\mu(P)$.

Wir definieren eine positive Funktion ϱ_δ auf Q durch

$$\varrho_\delta(x) = \begin{cases} d(x, P) & \text{falls } x \in Q \setminus P, \\ \delta & \text{falls } x \in P, \end{cases}$$

und betrachten eine ϱ_δ -feine Zerlegung $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ von Q . Sei $E_P = \{i \in E : \xi_i \in P\}$. Nach Definition von f gilt dann $S_Z(f) = \sum_{i \in E_P} \mu(Q_i)$. Weiter folgt aus der Definition von ϱ_δ , dass $Q_i \subset Q \setminus P$ für $i \notin E_P$, während $Q_i \subset P_\delta$ für $i \in E_P$. Hieraus ersieht man, dass

$$P \subset \bigcup_{i \in E_P} Q_i \subset P_\delta.$$

Die $(P \cap Q_i)_{i \in E_P}$ bilden offenbar eine Unterteilung von P . Daher folgt wegen 1.7 und 1.9

$$\mu(P) = \sum_{i \in E_P} \mu(P \cap Q_i) \leq \sum_{i \in E_P} \mu(Q_i) = S_Z(f) \leq \mu(P_\delta).$$

Wegen $\lim_{\delta \downarrow 0} \mu(P_\delta) = \mu(P)$ gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ , sodass $\mu(P_\delta) < \mu(P) + \varepsilon$. Dann ist $|S_Z(f) - \mu(P)| < \varepsilon$ für alle $Z \prec \varrho_\delta$, und die Behauptung ist bewiesen.

Wir kommen nun zu den grundlegenden Eigenschaften des Integrals: Linearität, Monotonie, Translationsinvarianz und dem Verhalten unter Homothetien.

2.6. Satz. Sei Q ein Quader.

(a) $\mathcal{L}^1(Q)$ ist ein reeller Vektorraum und das Integral $\int_Q : \mathcal{L}^1(Q) \rightarrow \mathbf{R}$ ist \mathbf{R} -linear:

$$\int_Q (f + g) = \int_Q f + \int_Q g, \quad \int_Q (cf) = c \int_Q f, \quad (1)$$

für $f, g \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $c \in \mathbf{R}$.

(b) Sind f und g integrierbar, dann gilt

$$f \leq g \implies \int_Q f \leq \int_Q g. \quad (2)$$

Insbesondere ist das Integral einer nichtnegativen Funktion nicht negativ.

(c) Sei $t_v : x \mapsto v + x$ die Translation um den Vektor v . Dann gilt: $f \in \mathcal{L}^1(t_v(Q)) \iff f \circ t_v \in \mathcal{L}^1(Q)$, und in diesem Fall gilt

$$\int_{t_v(Q)} f = \int_Q f \circ t_v. \quad (3)$$

(d) Sei $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ die Homothetie um den Faktor $\lambda (\neq 0)$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(h_\lambda(Q)) \iff f \circ h_\lambda \in \mathcal{L}^1(Q)$, und in diesem Fall ist

$$\int_{h_\lambda(Q)} f = |\lambda|^n \int_Q f \circ h_\lambda. \quad (4)$$

Beweis. (a) Klarerweise ist $S_Z(f)$ linear in f :

$$S_Z(f + g) = S_Z(f) + S_Z(g), \quad S_Z(cf) = cS_Z(f). \quad (5)$$

Setze $A = \int_Q f$ und $B = \int_Q g$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle positive Funktionen ϱ_1, ϱ_2 auf Q mit $|S_Z(f) - A| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_1$ und $|S_Z(g) - B| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_2$. Definiere $\varrho(x) := \min(\varrho_1(x), \varrho_2(x))$. Dann ist für alle $Z \prec \varrho$ wegen 2.1.3 auch $Z \prec \varrho_i$ und folglich nach 2.3.2 und der Dreiecksungleichung

$$|S_Z(f + g) - (A + B)| \leq |S_Z(f) - A| + |S_Z(g) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $f + g \in \mathcal{L}^1(Q)$ und es gilt die erste Formel von (1). Der Beweis der zweiten Formel von (1) wird dem Leser überlassen.

(b) Wegen (1) genügt es zu zeigen, dass $A \geq 0$, falls $f \geq 0$. Nach 2.1.1 ist klar, dass alle $S_Z(f) \geq 0$ sind. Wäre $A < 0$, dann wähle zu $\varepsilon := -A/2$ eine Funktion ϱ wie in der Definition der Integrierbarkeit. Für eine Zerlegung $Z \prec \varrho$ gilt dann $S_Z(f) - A < -A/2$ oder $S_Z(f) < A/2 < 0$, Widerspruch.

(c) Offenbar führt t_v Quader in Quader über und ändert den Inhalt von Quadern nicht. Sei f über $Q' = t_v(Q)$ integrierbar mit Integral $A = \int_{Q'} f$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ' eine positive Funktion auf Q' mit $|S_{Z'} f - A| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z' \prec \varrho'$ von Q' . Definiere ϱ auf Q durch $\varrho(x) = \varrho'(t_v(x))$, und sei $Z = (\xi_i, Q_i)$ eine ϱ -feine Zerlegung von Q . Dann ist $t_v(Z) = (v + \xi_i, v + Q_i)$ eine ϱ' -feine Zerlegung von Q' und folglich

$$|S_{t_v(Z)}(f) - A| = \left| \sum f(v + \xi_i) \mu(t_v(Q_i)) - A \right| = \left| \sum (f \circ t_v)(\xi_i) \mu(Q_i) - A \right| < \varepsilon.$$

Also ist $f \circ t_v$ über Q integrierbar und hat das Integral A . Die umgekehrte Richtung erhält man durch Anwendung des soeben Bewiesenen auf $t_{-v} = t_v^{-1}$.

(d) Wieder ist das Bild eines Quaders P unter h_λ ein Quader, mit Inhalt $\mu(h_\lambda(P)) = |\lambda|^n \mu(P)$. Sei f über $Q' = h_\lambda(Q)$ integrierbar mit Integral A . Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ' eine positive Funktion auf Q' mit $|S_{Z'} f - A| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z' \prec \varrho'$ von Q' . Definiere ϱ auf Q durch $\varrho(x) = \varrho'(\lambda x)/|\lambda|$. Man überlegt sich leicht (Aufgabe!): Ist Z eine ϱ -feine Zerlegung von Q , dann ist $h_\lambda(Z)$ eine ϱ' -feine Zerlegung von Q' . Es folgt

$$\begin{aligned} |S_{h_\lambda(Z)}(f) - A| &= \left| \sum f(\lambda \xi_i) \mu(h_\lambda(Q_i)) - A \right| \\ &= \left| |\lambda|^n \sum (f \circ h_\lambda)(\xi_i) \mu(Q_i) - A \right| \\ &= |\lambda|^n \cdot \left| S_Z(f \circ h_\lambda) - \frac{A}{|\lambda|^n} \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Integrierbarkeit von $f \circ h_\lambda$ und die behauptete Formel. Die Umkehrung erhält man wieder aus $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

2.7. Cauchy Kriterium für Integrierbarkeit. Sei $f: Q \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion auf dem Quader Q .

(a) Ist f integrierbar und ϱ zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wie in der Definition 2.3.2 gewählt, dann gilt

$$|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < 2\varepsilon \quad (1)$$

für alle Zerlegungen Z, Z' feiner als ϱ .

(b) Umgekehrt gebe es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass $|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z, Z' \prec \varrho$. Dann ist f integrierbar.

Beweis. (a) Nach 2.3.2 und der Dreiecksungleichung ist $|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| \leq |S_Z(f) - A| + |A - S_{Z'}(f)| < \varepsilon + \varepsilon$.

(b) Zu $\varepsilon_k = 1/k$ wähle ϱ_k derart, dass $|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < 1/k$ für alle Zerlegungen $Z, Z' \prec \varrho_k$. Indem man eventuell ϱ_k durch $\min(\varrho_1, \dots, \varrho_k)$ ersetzt, kann man annehmen, dass $\varrho_m \leq \varrho_k$ für $m \geq k$ gilt. Weiter sei, für jedes $k \in \mathbf{N}$, Z_k eine Zerlegung feiner als ϱ_k , und $A_k = S_{Z_k}(f)$. Dann konvergiert die Zahlenfolge (A_k) nach dem Cauchy Kriterium für Folgen: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbf{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$. Für alle $k, m \geq N$ gilt dann

$$|A_k - A_m| = |S_{Z_k}(f) - S_{Z_m}(f)| < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

weil ja $Z_k \prec \varrho_k \leq \varrho_N$ und $Z_m \prec \varrho_m \leq \varrho_N$. Also existiert $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ nach dem Cauchy Kriterium für Folgen.

Nun zeigen wir, dass $A = \int_Q f$ ist. Dazu sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle k so groß, dass $1/k \leq \varepsilon/2$ und $|A_k - A| < \varepsilon/2$, und setze $\varrho := \varrho_k$. Für alle $Z \prec \varrho$ gilt dann nach (ii), weil Z und Z_k feiner als ϱ_k sind,

$$|S_Z(f) - A| \leq |S_Z(f) - A_k| + |A_k - A| < \frac{1}{k} + |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.8. Verträgliche Zerlegungen. Zwei Zerlegungen Z und Z' von Q heißen *verträglich*, wenn sie dieselbe Unterteilung von Q benutzen und sich nur in den Stützstellen unterscheiden, also etwa durch

$$Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}, \quad Z' = (\xi'_i, Q_i)_{i \in E}$$

gegeben sind. In diesem Fall lassen sich ihre Riemannschen Summen leicht vergleichen, denn

$$S_Z(f) - S_{Z'}(f) = \sum_{i \in E} (f(\xi_i) - f(\xi'_i)) \mu(Q_i). \quad (1)$$

Wir zeigen nun, dass man zwei nicht verträgliche Zerlegungen immer durch verträgliche ersetzen kann, ohne ihre Feinheit oder ihre Riemannschen Summen zu ändern. Dieser Prozess wird in Zukunft oft verwendet werden.

Seien also $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ und $Z' = (\xi'_j, Q'_j)_{j \in F}$ zwei beliebige Zerlegungen von Q , mit den zugehörigen Unterteilungen $T = (Q_i)_{i \in E}$ und $T' = (Q'_j)_{j \in F}$. Wir definieren zwei neue Zerlegungen

$$Z \cdot T' = (\tilde{\xi}_{ij}, Q_i \cap Q'_j)_{(i,j) \in E \times F}, \quad T \cdot Z' = (\tilde{\xi}'_{ij}, Q_i \cap Q'_j)_{(i,j) \in E \times F} \quad (2)$$

indem wir als Unterteilung für beide neuen Zerlegungen das Produkt $T \cdot T'$ der Unterteilungen wie in 1.2.5 nehmen und die neuen Stützstellen folgendermaßen festlegen:

$$\tilde{\xi}_{ij} = \xi_i, \quad \tilde{\xi}'_{ij} = \xi'_j. \quad (3)$$

Die Menge der Stützstellen von Z und $Z \cdot T'$ ist also dieselbe geblieben, nicht aber die Indizierung. Beim Übergang von Z zu $Z \cdot T'$ bleibt die Feinheit erhalten:

$$Z \prec \varrho \implies Z \cdot T' \prec \varrho. \quad (4)$$

Zum Beweis braucht man nur zu bemerken, dass $Q_i \cap Q'_j \subset Q_i \subset B_{\varrho(\xi_i)}(\xi_i) = B_{\varrho(\tilde{\xi}_{ij})}(\tilde{\xi}_{ij})$ wegen (3), für alle $(i, j) \in E \times F$. Weiter ändert sich auch die Riemannsche Summe einer beliebigen Funktion f nicht:

$$S_Z(f) = S_{Z \cdot T'}(f), \quad (5)$$

denn wegen der Additivität des Inhalts (Satz 1.7) und (3) gilt

$$\begin{aligned} S_{Z \cdot T'}(f) &= \sum_{(i,j) \in E \times F} f(\tilde{\xi}_{ij}) \mu(Q_i \cap Q'_j) = \sum_{i \in E} f(\xi_i) \sum_{j \in F} \mu(Q_i \cap Q'_j) \\ &= \sum_{i \in E} f(\xi_i) \mu(Q_i) = S_Z(f). \end{aligned}$$

Analoges gilt natürlich für $T \cdot Z'$. Also sind nun $Z \cdot T'$ und $T \cdot Z'$ verträgliche Zerlegungen, die dieselbe Feinheit wie die Ausgangszerlegungen haben und dieselben Riemannschen Summen liefern. Wir bemerken abschließend, dass diese Methode wesentlich davon Gebrauch macht, dass die Stützstellen nicht in den zugehörigen Teilquadern liegen müssen. Selbst wenn das für Z und Z' der Fall gewesen sein sollte, wird es im Allgemeinen für $Z \cdot T'$ und $T \cdot Z'$ nicht mehr gelten.

2.9. Satz. *Eine stetige Funktion f auf einem kompakten Quader Q ist integrierbar.*

Beweis. Wir benützen das Cauchy Kriterium 2.7(b). Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil f in jedem Punkt $x \in Q$ stetig ist, gibt es ein (im Allgemeinen von x abhängiges) $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in Q$ mit $|x - y| < \delta$. Wähle für jedes $x \in Q$ ein solches $\delta = \delta_x$ und setze $\varrho(x) = \delta_x$. Nun seien Z und Z' zwei ϱ -feine Zerlegungen von Q . Wegen 2.8 kann man annehmen, dass $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ und $Z' = (\xi'_i, Q_i)_{i \in E}$

verträglich sind. Ferner können wir annehmen, dass die Q_i nicht leer sind, denn leere Q_i liefern keinen Beitrag zur Riemannschen Summe. Wähle nun in jedem Teilquader Q_i einen Punkt a_i . Dann gilt

$$|f(\xi_i) - f(\xi'_i)| \leq |f(\xi_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(\xi'_i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \quad (1)$$

weil ja $|a_i - \xi_i| < \varrho(\xi_i)$ und $|a_i - \xi'_i| < \varrho(\xi'_i)$ nach Definition einer ϱ -feinen Zerlegung in 2.1.2. Also folgt wegen 2.8.1 und der Additivität des Inhalts

$$|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| \leq \sum_{i \in E} |f(\xi_i) - f(\xi'_i)| \mu(Q_i) \leq \sum_{i \in E} 2\varepsilon \mu(Q_i) = 2\varepsilon \mu(Q).$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f nach dem Cauchy Kriterium integrierbar.

2.10. Korollar. Sei Q ein nicht ausgearteter Quader und sei f eine stetige nicht negative Funktion auf Q mit $f(a) > 0$ für mindestens ein $a \in Q$. Dann ist $\int_Q f > 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon := f(a)/2$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$, und folglich $f(x) \geq \varepsilon$, für alle $x \in B_\delta(a)$. Sei $P = \overline{B_{\delta/2}(a)} \cap Q$. Dann ist auch P nicht ausgeartet, und es gilt $f \geq \varepsilon \chi_P$. Aus der Monotonie des Integrals und 2.5(b) folgt $\int_Q f \geq \varepsilon \mu(P) > 0$.

2.11. Lemma. Sei $f \in \mathcal{L}^1(Q)$, und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ wie in der Definition des Integrals 2.3.2. Ferner seien Z_1 bzw. Z_2 zwei verträgliche ϱ -feine Zerlegungen zur selben Unterteilung $(Q_i)_{i \in E}$, mit den Stützstellen ξ_i bzw. η_i . Dann gilt

$$\sum_{i \in E} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \mu(Q_i) < 2\varepsilon. \quad (1)$$

Beweis. Definiere Zerlegungen Z_3 und Z_4 zur selben Unterteilung und den neuen Stützstellen ξ'_i bzw. η'_i durch

$$\xi'_i := \begin{cases} \xi_i & \text{falls } f(\xi_i) \geq f(\eta_i), \\ \eta_i & \text{falls } f(\xi_i) < f(\eta_i), \end{cases} \quad \eta'_i := \begin{cases} \xi_i & \text{falls } f(\xi_i) < f(\eta_i), \\ \eta_i & \text{falls } f(\xi_i) \geq f(\eta_i). \end{cases}$$

Dann sind auch Z_3 und Z_4 feiner als ϱ , und es gilt nach Definition

$$f(\xi'_i) - f(\eta'_i) = |f(\xi_i) - f(\eta_i)|.$$

Nach dem Cauchy Kriterium 2.7.1 ist daher

$$S_{Z_3}(f) - S_{Z_4}(f) = \sum_{i \in E} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \mu(Q_i) < 2\varepsilon.$$

2.12. Satz. Wenn $f: Q \rightarrow \mathbf{R}$ integrierbar ist, dann ist es auch die Funktion $|f|$, und es gilt die Integral-Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|. \quad (1)$$

Beweis. Wir zeigen die Integrierbarkeit von $|f|$ mit dem Cauchy Kriterium. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle ϱ wie in 2.3.2. Seien Z_1 und Z_2 zwei ϱ -feine Zerlegungen, die wir

nach 2.8 als verträglich, mit denselben Teilquadern Q_i und Stützstellen ξ_i bzw. η_i annehmen können. Dann gilt unter Verwendung von Dreiecksungleichung, umgekehrter Dreiecksungleichung und Lemma 2.11,

$$\begin{aligned} |S_{Z_1}(|f|) - S_{Z_2}(|f|)| &= \left| \sum_{i \in E} (|f(\xi_i)| - |f(\eta_i)|) \mu(Q_i) \right| \\ &\leq \sum_{i \in E} \left| |f(\xi_i)| - |f(\eta_i)| \right| \mu(Q_i) \\ &\leq \sum_{i \in E} |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \mu(Q_i) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $|f|$ integrierbar.

Sei $A = \int_Q f$ und $B = \int_Q |f|$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle ϱ so, dass $|A - S_Z(f)| < \varepsilon$ und $|B - S_Z(|f|)| < \varepsilon$ für alle $Z \prec \varrho$. Aus der Dreiecksungleichung und 2.1.1 sieht man sofort

$$|S_Z(f)| \leq S_Z(|f|).$$

Daher folgt

$$|A| \leq |A - S_Z(f)| + |S_Z(f)| \leq \varepsilon + S_Z(|f|) \leq \varepsilon + |S_Z(|f|) - B| + B \leq 2\varepsilon + B.$$

Da ε beliebig war, ist $|A| \leq B$, wie behauptet.

2.13. Korollar. Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(Q)$, dann sind auch die Funktionen $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, sowie $f_+ := \max(f, 0)$ und $f_- := -\min(f, 0)$ (genannt der positive bzw. negative Anteil) integrierbar.

Beweis. Das folgt aus

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \quad (1)$$

2.14. Integration vektorwertiger Funktionen. Eine vektorwertige Funktion $f = (f^1, \dots, f^k) : Q \rightarrow \mathbf{R}^k$ heißt integrierbar, wenn jede Komponente f^j von f integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das Integral als den Vektor $\int_Q f = (\int_Q f^1, \dots, \int_Q f^k)$. Insbesondere ist damit auch die Integrierbarkeit und das Integral komplexwertiger Funktionen erklärt.

Wie in 2.6 sieht man, dass die integrierbaren Funktionen auf Q mit Werten im \mathbf{R}^k einen reellen Vektorraum $\mathcal{L}^1(Q; \mathbf{R}^k)$ bilden, und dass das Integral $\int_Q : \mathcal{L}^1(Q; \mathbf{R}^k) \rightarrow \mathbf{R}^k$ eine \mathbf{R} -lineare Abbildung ist. Im Fall komplexwertiger Funktionen ist $\mathcal{L}^1(Q; \mathbf{C})$ sogar ein komplexer Vektorraum und das Integral ist komplex-linear, wie man sich leicht überlegt. Als Analogon von Satz 2.12 haben wir das folgende Ergebnis.

2.15. Satz. Sei $f : Q \rightarrow \mathbf{R}^k$ integrierbar und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbf{R}^k . Dann ist auch die Funktion $\|f\|$ integrierbar, und es gilt die Ungleichung

$$\left\| \int_Q f \right\| \leq \int_Q \|f\|. \quad (1)$$

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle, für jede Komponente f^j von f , ein ϱ_j wie in 2.3.2, und sei $\varrho = \min(\varrho_1, \dots, \varrho_k)$. Seien Z_1 und Z_2 zwei ϱ -feine Zerlegungen von

Q , die wir als verträglich annehmen können. Dann gilt, ähnlich wie im Beweis von 2.12,

$$\begin{aligned}
|S_{Z_1}(\|f\|) - S_{Z_2}(\|f\|)| &= \left| \sum_{i \in E} (\|f(\xi_i)\| - \|f(\eta_i)\|) \mu(Q_i) \right| \\
&\leq \sum_{i \in E} \left| \|f(\xi_i)\| - \|f(\eta_i)\| \right| \mu(Q_i) \\
&\leq \sum_{i \in E} \|f(\xi_i) - f(\eta_i)\| \mu(Q_i) \\
&\leq \sum_{i \in E} \sum_{j=1}^k |f^j(\xi_i) - f^j(\eta_i)| \|e_j\| \mu(Q_i) \\
&= \sum_{j=1}^k \|e_j\| \sum_{i \in E} |f^j(\xi_i) - f^j(\eta_i)| \mu(Q_i) < \left(\sum_{j=1}^k \|e_j\| \right) \cdot 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies die Integrierbarkeit von $\|f\|$ nach dem Cauchy Kriterium. Nun folgt die Ungleichung (1) wie im Beweis von 2.12 aus $\|S_Z(f)\| \leq S_Z(\|f\|)$ durch Grenzübergang.

§3. Der Satz von Fubini

Übersicht. Wir beweisen den Satz von Fubini, der die Berechnung eines Mehrfachintegrals als iteriertes Einfachintegral gestattet, und deshalb für praktische Rechnungen sehr wichtig ist. Weiter zeigen wir die Integrierbarkeit von Funktionen des Typs $f(x)g(y)$, und bestätigen die anschauliche Interpretation des Integrals einer nicht negativen Funktion als Maß ihrer Ordinatenmenge.

3.1. Lemma. Seien $P \subset \mathbf{R}^p$ und $Q \subset \mathbf{R}^q$ Quader, sei $R = P \times Q \subset \mathbf{R}^{p+q}$, und sei ϱ eine positive Funktion auf R . Für jedes $y \in Q$ sei $\varrho^y = \varrho(-, y)$ die Funktion $x \mapsto \varrho(x, y)$ auf P . Ferner sei für jedes $y \in Q$ eine ϱ^y -feine Zerlegung $Z^y = (\xi_i^y, P_i^y)_{i \in E^y}$ von P gegeben. Definiere die positive Funktion ϱ' auf Q durch

$$\varrho'(y) = \min\{\varrho(\xi_i^y, y) : i \in E^y\}. \quad (1)$$

Sei $Z' = (\eta_j, Q_j)_{j \in F}$ eine ϱ' -feine Zerlegung von Q , und definiere

$$\zeta_{ij} = (\xi_i^{\eta_j}, \eta_j), \quad R_{ij} = P_i^{\eta_j} \times Q_j \quad (2)$$

für alle $(i, j) \in K := \bigcup_{j \in F} E^{\eta_j} \times \{j\}$. Dann ist $Z = (\zeta_{ij}, R_{ij})_{(i,j) \in K}$ eine ϱ -feine Zerlegung von $P \times Q$.

Beweis. Zunächst ist Z eine Zerlegung von R , denn

$$R = P \times Q = P \times \bigcup_{j \in F} Q_j = \bigcup_{j \in F} (P \times Q_j) = \bigcup_{j \in F} \bigcup_{i \in E^{\eta_j}} P_i^{\eta_j} \times Q_j = \bigcup_{(i,j) \in K} R_{ij},$$

und dass die R_{ij} fast disjunkt sind, folgt sofort aus der relativen Disjunktheit der P_i^y und der Q_j . Nun zeigen wir $Z \prec \varrho$, also

$$R_{ij} \subset B_{\varrho(\zeta_{ij})}(\zeta_{ij}).$$

Sei $z = (x, y) \in P_i^{\eta_j} \times Q_j = R_{ij}$. Dann gilt, weil wir die Maximumnorm verwenden,

$$|z - \zeta_{ij}| = |(x, y) - (\xi_i^{\eta_j}, \eta_j)| = \max(|x - \xi_i^{\eta_j}|, |y - \eta_j|).$$

Da $x \in P_i^{\eta_j} \subset B_{\varrho(\xi_i^{\eta_j}, \eta_j)}(\xi_i^{\eta_j})$, gilt $|x - \xi_i^{\eta_j}| < \varrho(\xi_i^{\eta_j}, \eta_j) = \varrho(\zeta_{ij})$. Weiter ist $y \in Q_j \subset B_{\varrho'(\eta_j)}(\eta_j)$, und somit

$$|y - \eta_j| < \varrho'(\eta_j) \leq \varrho(\xi_i^{\eta_j}, \eta_j) = \varrho(\zeta_{ij}),$$

nach Definition von ϱ' . Daraus folgt die Behauptung.

3.2. Satz von Fubini für Quader. Seien $P \subset \mathbf{R}^p$ und $Q \subset \mathbf{R}^q$ kompakte Quader und sei $f \in \mathcal{L}^1(P \times Q)$. Für jedes $y \in Q$ sei die Funktion $f^y = f(-, y)$ über P integrierbar. Dann ist die Funktion $g(y) := \int_P f^y = \int_P f(x, y) dx$ über Q integrierbar, und es gilt

$$\int_Q g = \int_Q \left(\int_P f(x, y) dx \right) dy = \int_{P \times Q} f. \quad (1)$$

Analog gilt: Wenn für jedes $x \in P$ die Funktion $f_x = f(x, -)$ über Q integrierbar ist, dann ist $h(x) = \int_Q f_x = \int_Q f(x, y) dy$ über P integrierbar, und es gilt

$$\int_P \left(\int_Q f(x, y) dy \right) dx = \int_{P \times Q} f. \quad (2)$$

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es, (1) zu beweisen. Sei $A = \int_{P \times Q} f$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir müssen zeigen, dass es eine positive Funktion ϱ' auf Q gibt, sodass $|S_{Z'}(g) - A| < \varepsilon$ gilt, für alle Zerlegungen $Z' \prec \varrho'$ von Q . Die Beweisidee ist, eine geeignete Zerlegung Z von $P \times Q$ zu finden und dann die Dreiecksungleichung zu verwenden:

$$|S_{Z'}(g) - A| \leq |S_{Z'}(g) - S_Z(f)| + |S_Z(f) - A|. \quad (3)$$

Hier wird der zweite Term deswegen beliebig klein, weil f integrierbar und A das Integral von f ist. Wähle also zunächst eine positive Funktion ϱ auf $P \times Q$ so, dass $|S_Z(f) - A| < \varepsilon$ für alle ϱ -feinen Zerlegungen Z von $P \times Q$. Nun wähle, für jedes $y \in Q$, eine Zerlegung Z^y von P so, dass $Z^y \prec \varrho^y$ und noch so fein, dass $|S_{Z^y}(f^y) - g(y)| < \varepsilon$. Das ist möglich, weil ja nach Voraussetzung $f^y \in \mathcal{L}^1(P)$, mit Integral $g(y)$. Zu diesen Zerlegungen Z^y definiere nun ϱ' wie in 3.1.1, und sei Z' eine ϱ' -feine Zerlegung von Q . Weiter sei Z die aus Z' und den Z^y wie in Lemma 3.1 konstruierte ϱ -feine Zerlegung von $P \times Q$. Dann ist $|S_Z(f) - A| < \varepsilon$, und weiter, weil $\mu(R_{ij}) = \mu(P_i^{\eta_j})\mu(Q_j)$,

$$\begin{aligned} |S_{Z'}(g) - S_Z(f)| &= \left| \sum_{j \in F} g(\eta_j) \mu(Q_j) - \sum_{j \in F} \sum_{i \in E^{\eta_j}} f(\zeta_{ij}) \mu(R_{ij}) \right| \\ &\leq \sum_{j \in F} \left| g(\eta_j) - \sum_{i \in E^{\eta_j}} f(\zeta_{ij}) \mu(P_i^{\eta_j}) \right| \mu(Q_j) \\ &= \sum_{j \in F} |g(\eta_j) - S_{Z^{\eta_j}}(f^{\eta_j})| \mu(Q_j) \\ &\leq \sum_{j \in F} \varepsilon \mu(Q_j) = \varepsilon \mu(Q). \end{aligned}$$

Also folgt nun aus (3), dass $|S_{Z'}(g) - A| < \varepsilon \mu(Q) + \varepsilon = \varepsilon(1 + \mu(Q))$, und weil ε beliebig war, die Behauptung.

3.3. Bemerkung. Die vorstehende Version des Satzes von Fubini lässt sich noch verbessern. Die Voraussetzung der Integrierbarkeit von f^y für alle $y \in Q$ ist nämlich für fast alle y (d.h., für alle $y \in Q$ mit Ausnahme einer Nullmenge N , siehe 5.9) automatisch erfüllt. Definiert man dann $g(y)$ für $y \in N$ irgendwie (z. B. durch 0), dann gilt wieder $\int_Q g = \int_{P \times Q} f$, siehe 5.14.

3.4. Korollar. Sei $Q = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ ein kompakter Quader und f eine stetige Funktion auf Q . Dann ist

$$\int_Q f = \int_{a^n}^{b^n} \left(\dots \left(\int_{a^1}^{b^1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \right) \dots \right) dx^n.$$

Dabei kommt es auf die Integrationsreihenfolge nicht an.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n . Für $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Nun gelte die Formel für $n - 1$. Nach Satz 2.9 ist f integrierbar. Weiter ist für jedes $y \in [a^n, b^n]$ die Funktion $f^y(x^1, \dots, x^{n-1}) = f(x^1, \dots, x^{n-1}, y)$ stetig auf $P = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^{n-1}, b^{n-1}]$ und damit integrierbar. Also ist nach dem Satz von Fubini

$$\int_Q f = \int_{a^n}^{b^n} \left(\int_P f^y \right) dy = \int_{a^n}^{b^n} \left(\int_{a^1}^{b^1} \dots \int_{a^{n-1}}^{b^{n-1}} f(x^1, \dots, x^{n-1}, x^n) dx^1 \dots dx^{n-1} \right) dx^n,$$

und die Behauptung folgt nach Induktionsannahme. Dass es auf die Integrationsreihenfolge nicht ankommt, sieht man durch wiederholte Anwendung von 3.2.1 und 3.2.2.

3.5. Beispiele. (a) Durch geschickte Wahl der Integrationsreihenfolge kann man sich oft die Arbeit erleichtern:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_1^2 x^3 e^{x^2 y} dx \right) dy &= \int_1^2 x^3 dx \left(\int_0^1 e^{x^2 y} dy \right) = \int_1^2 dx \left(x^3 \cdot \frac{1}{x^2} e^{x^2 y} \Big|_0^1 \right) \\ &= \int_1^2 x(e^{x^2} - 1) dx = \frac{1}{2}(e^4 - e - 3). \end{aligned}$$

(b) Aus der Existenz der iterierten Integrale folgt nicht, dass sie gleich sind: Ein Beispiel ist die Funktion $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{für } x > 0 \text{ und } y > 0, \\ 1 & \text{für } x = 0 \text{ und } y > 0, \\ -1 & \text{für } x > 0 \text{ und } y = 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \text{ und } y = 0. \end{cases}$$

Details als Aufgabe!

(c) Aus der Existenz und Gleichheit der iterierten Integrale folgt nicht die Existenz des Integrals: Betrachte dazu die Funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

auf dem Rechteck $R = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Dann ist für jedes $y \in [-1, 1]$ die Funktion f^y über $[-1, 1]$ integrierbar. Für $y = 0$ ist das klar, denn $f^0 = 0$ nach Definition von f , und für $y \neq 0$ ist

$$g(y) = \int_{[-1, 1]} f^y(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{xy dx}{(x^2 + y^2)^2} dx = 0,$$



weil der Integrand eine ungerade Funktion von x ist und das Integrationsintervall symmetrisch zum Nullpunkt liegt. Aus Symmetriegründen ist analog $h(x) = \int_{-1}^1 f_x(y) dy = 0$. Also existieren die iterierten Integrale und sind gleich:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy &= \int_{-1}^1 g(y) dy = 0 \\ &= \int_{-1}^1 h(x) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Trotzdem ist f nicht über R integrierbar, denn sonst müsste nach dem nächsten Paragraphen bewiesenen Satz 4.1(a) f auch über das Teilquadrat $R_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ integrierbar sein. Hier ist nun, für festes $y \in]0, 1]$, f^y über $[0, 1]$ integrierbar mit Integral

$$g(y) = \int_0^1 f^y = \int_0^1 \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{1}{y} - \frac{y}{1 + y^2},$$

und für $y = 0$ ist wieder $g(0) = \int_0^1 f^0 = 0$. Nach dem Satz von Fubini ist daher die Funktion g über $[0, 1]$ integrierbar. Die Funktion $y \mapsto y/(1 + y^2)$ ist auf $[0, 1]$ stetig und somit integrierbar. Also folgt nun, dass die Funktion

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für } 0 < y \leq 1, \\ 0 & \text{für } y = 0, \end{cases}$$

über $[0, 1]$ integrierbar ist. Das ist aber, wie aus Analysis 1 bekannt, nicht der Fall, Widerspruch!

Wir zeigen nun die Integrierbarkeit von Funktionen des Typs $f(x)g(y)$ über $P \times Q$ unter der Voraussetzung, dass f über P und g über Q integrierbar ist. Dazu erst ein Lemma:

3.6. Lemma. Sei $R = P \times Q \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$ ein nicht ausgearteter Quader.

(a) Sei ϱ eine positive Funktion auf R und sei $Z = (\zeta_k, R_k)_{k \in K}$ eine ϱ -feine Zerlegung von R . Dann gibt es Unterteilungen $(P_i)_{i \in E}$ von P und $(Q_j)_{j \in F}$ von Q sowie Punkte $\zeta_{ij} \in R$, sodass

$$Z' = (\zeta_{ij}, P_i \times Q_j)_{(i,j) \in E \times F} \quad (1)$$

eine ϱ -feine Zerlegung von R ist, und die Riemannschen Summen bezüglich Z und Z' dieselben sind:

$$S_Z(h) = S_{Z'}(h) \quad \text{für alle Funktionen } h \text{ auf } R. \quad (2)$$

(b) Sei speziell $\varrho(x, y) = \min(\varrho_1(x), \varrho_2(y))$ mit positiven Funktionen ϱ_1 auf P und ϱ_2 auf Q . Sei Z' wie in (1) und seien ξ_{ij} und η_{ij} die Komponenten von ζ_{ij} in P und Q . Ferner sei $\varphi: E \rightarrow F$ eine beliebige Abbildung. Dann ist

$$Z_1(\varphi) := (\xi_{i, \varphi(i)}, P_i)_{i \in E} \quad (3)$$

eine ϱ_1 -feine Zerlegung von P . Analog liefert eine Abbildung $\psi: F \rightarrow E$ eine ϱ_2 -feine Zerlegung $Z_2(\psi)$ von Q .

Beweis. (a) Da die ausgearteten Quader unter den R_k keinen Beitrag zur Riemannschen Summe liefern und nach Lemma 1.4 auch in der Unterteilung weggelassen werden können, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass alle R_k nicht ausgeartet sind. Wir wählen nun Zerlegungen $(P_i)_{i \in E}$ von P und $(Q_j)_{j \in F}$ sowie Teilmengen $E_k \subset E$ und $F_k \subset F$ wie in Lemma 1.6. Dann gibt es zu jedem $(i, j) \in E \times F$ genau ein $k = k(i, j) \in K$ mit $(i, j) \in E_k \times F_k$, also $P_i \times Q_j \subset R_k$. Setzen wir $\zeta_{ij} := \zeta_{k(i, j)}$, so ist die durch (1) definierte Zerlegung Z' von R feiner als ϱ ; denn

$$P_i \times Q_j \subset R_k \subset B_{\varrho(\zeta_k)}(\zeta_k) = B_{\varrho(\zeta_{ij})}(\zeta_{ij}).$$

Schließlich folgt die Eigenschaft (2) aus 1.6.1 und 1.6.2 und der Additivität des Inhalts:

$$\begin{aligned} S_Z(h) &= \sum_{k \in K} h(\zeta_k) \mu(R_k) = \sum_{k \in K} h(\zeta_k) \sum_{(i, j) \in E_k \times F_k} \mu(P_i \times Q_j) \\ &= \sum_{(i, j) \in E \times F} h(\zeta_{ij}) \mu(P_i \times Q_j) = S_{Z'}(h). \end{aligned}$$

(b) Sei $x \in P_i$ und $j = \varphi(i)$. Wählt man ein beliebiges $y \in Q_j$, so ist

$$|x - \xi_{ij}| \leq \max(|x - \xi_{ij}|, |y - \eta_{ij}|) = |(x, y) - (\xi_{ij}, \eta_{ij})| < \varrho(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \leq \varrho_1(\xi_{ij})$$

nach Definition von ϱ , und weil wir die Maximumnorm verwenden.

3.7. Satz. Seien $P \subset \mathbf{R}^p$ und $Q \subset \mathbf{R}^q$ Quader und $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und $g \in \mathcal{L}^1(Q)$. Definiere die Funktion $f \otimes g$ auf $P \times Q$, genannt das Tensorprodukt von f und g , durch $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. Dann ist $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(P \times Q)$ und es gilt

$$\int_{P \times Q} (f \otimes g) = \left(\int_P f \right) \left(\int_Q g \right). \quad (1)$$

Beweis. Zunächst genügt es, den Satz für den Fall zu beweisen, dass P und Q nicht ausgeartet sind; denn auf einem ausgearteten Quader ist jede Funktion integrierbar mit Integral Null (Aufgabe!). Indem wir f und g in positiven und negativen Anteil zerlegen, können wir wegen 2.13 ohne Beschränkung der Allgemeinheit f und g als nicht negativ annehmen. Sei $A = \int_P f$ und $B = \int_Q g$, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle positive Funktionen ϱ_1 auf P und ϱ_2 auf Q wie in der Definition des Integrals, und definiere $\varrho : P \times Q \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ durch $\varrho(x, y) = \min(\varrho_1(x), \varrho_2(y))$. Weiter sei Z eine ϱ -feine Zerlegung von $P \times Q$. Nach Lemma 3.6(a) können wir annehmen, dass Z die Form $Z = ((\xi_{ij}, \eta_{ij}), P_i \times Q_j)_{(i, j) \in E \times F}$ hat, wobei $(P_i)_{i \in E}$ und $(Q_j)_{j \in F}$ Unterteilungen von P bzw. Q sind.

Da E und F endlich sind, gibt es Abbildungen $\varphi_{\pm} : E \rightarrow F$ und $\psi_{\pm} : F \rightarrow E$, sodass

$$f(\xi_{i, \varphi_-(i)}) \leq f(\xi_{ij}) \leq f(\xi_{i, \varphi_+(i)}), \quad (2)$$

$$g(\eta_{\psi_-(j), j}) \leq g(\eta_{ij}) \leq g(\eta_{\psi_+(j), j}), \quad (3)$$

für alle $i \in E$, $j \in F$. Seien $Z_1^{\pm} = Z_1(\varphi_{\pm})$ und analog Z_2^{\pm} die dadurch wie in 3.6(b) definierten Zerlegungen von P und Q . Dann folgt aus (2) und (3)

$$\begin{aligned} S_{Z_1^-}(f) S_{Z_2^-}(g) &= \left(\sum_{i \in E} f(\xi_{i, \varphi_-(i)}) \mu(P_i) \right) \left(\sum_{j \in F} g(\eta_{\psi_-(j), j}) \mu(Q_j) \right) \\ &\leq \sum_{(i, j) \in E \times F} f(\xi_{ij}) g(\eta_{ij}) \mu(P_i) \mu(Q_j) = S_Z(f \otimes g), \end{aligned} \quad (4)$$

und analog

$$S_Z(f \otimes g) \leq S_{Z_1^+}(f)S_{Z_2^+}(g). \quad (5)$$

Andrerseits ist

$$S_{Z_1^\pm}(f) = A + \varepsilon_1^\pm, \quad S_{Z_2^\pm}(g) = B + \varepsilon_2^\pm,$$

mit $|\varepsilon_k^\pm| < \varepsilon$. Setzt man dies in (4) und (5) ein, so ergibt sich leicht

$$|S_Z(f \otimes g) - AB| \leq \varepsilon(A + B + \varepsilon),$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $f \otimes g$ integrierbar mit Integral AB .

3.8. Definition (integrierbare Mengen, Ordinatenmenge). Die charakteristische Funktion einer beliebigen Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^n$ ist

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{falls } x \notin M. \end{cases}$$

Sei Q ein kompakter Quader. Eine Teilmenge $M \subset Q$ heißt *integrierbar*, falls χ_M über Q integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir das *Maß von M* als

$$\mu(M) = \int_Q \chi_M. \quad (1)$$

Insbesondere ist wegen 2.6.2 Q selbst integrierbar, und das Maß von Q ist der in 1.1.2 definierte Inhalt $\mu(Q)$. Wir werden später (Satz 5.5(d)) sehen, dass die Integrierbarkeit und das Maß von M nicht von der Wahl des M enthaltenden Quaders Q abhängen, über den in (1) integriert wird.

Für eine nicht negative Funktion g auf Q definieren wir die *Ordinatenmenge von g* als

$$O(g) := \{(x, y) \in Q \times \mathbf{R} : 0 \leq y \leq g(x)\} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Der folgende Satz besagt: Das Integral einer beschränkten Funktion ist, der Anschauung gemäß, genau das Maß der Ordinatenmenge. Die Voraussetzung der Beschränktheit von g ist nicht wesentlich, siehe 7.5.

3.9. Satz. Sei $g \geq 0$ eine beschränkte Funktion auf Q . Dann sind äquivalent:

- (i) $g \in \mathcal{L}^1(Q)$;
- (ii) Die Ordinatenmenge $O(g)$ ist integrierbar.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist

$$\int_Q g = \mu(O(g)). \quad (1)$$

Beweis. (i) \implies (ii): Sei etwa $0 \leq g \leq C$ und sei $R := Q \times P$ mit $P = [0, C]$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\varrho_1 : Q \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ wie in der Definition des Integrals und setze $\varrho(x, y) = \min(\varrho_1(x), \varepsilon)$, für $(x, y) \in R$. Ferner sei $f = \chi_{O(g)}$ die charakteristische Funktion von $O(g)$. Nun sei Z eine ϱ -feine Zerlegung von R , die wir nach 3.6(a) in der Form 3.6.1 annehmen können. Seien $\varphi_\pm : E \rightarrow F$ wie in 3.7.2 und sei $c_i^\pm = g(\xi_{i, \varphi_\pm(i)})$. Dann gilt also $0 \leq c_i^- \leq c_i^+ \leq C$, und die Zerlegungen $Z_1^\pm = Z_1(\varphi_\pm)$ sind nach Lemma 3.6(b) ϱ_1 -feine Zerlegungen von Q . Ferner sei

$$a_{ij} = f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \eta_{ij} \leq g(\xi_{ij}), \\ 0 & \text{falls } \eta_{ij} > g(\xi_{ij}) \end{cases},$$

sowie

$$a_{ij}^{\pm} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \eta_{ij} \leq c_i^{\pm} \\ 0 & \text{falls } \eta_{ij} > c_i^{\pm}. \end{cases}$$

Dann gilt $a_{ij}^- \leq a_{ij} \leq a_{ij}^+$, und daher

$$\sum_{j \in F} a_{ij}^- \mu(P_j) \leq \sum_{j \in F} a_{ij} \mu(P_j) \leq \sum_{j \in F} a_{ij}^+ \mu(P_j).$$

Für festes $i \in E$ betrachte die konstante Abbildung $\psi : F \rightarrow E$, $\psi(j) = i$. Nach Lemma 3.6(b) ist $Z_2(\psi) = (\eta_{ij}, P_j)_{j \in F}$ eine ε -feine Zerlegung von $[0, C]$. Wir können die P_j in aufsteigender Reihenfolge durchnummerieren, also etwa $P_j = [y_{j-1}, y_j]$ und $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_p = C$ annehmen. Die ε -Feinheit von $Z_2(\psi)$ besagt dann $|\eta_{ij} - y_{j-1}| < \varepsilon$ und $|\eta_{ij} - y_j| < \varepsilon$, und impliziert $y_j - y_{j-1} < 2\varepsilon$.

Falls $y_j \leq c_i^- - \varepsilon$, so ist $\eta_{ij} < c_i^-$ und daher ist $a_{ij}^- = 1$. Sei k der größte unter den Indizes $j \in \{0, \dots, p\}$, sodass $y_j \leq c_i^- - \varepsilon$. Dann gilt $y_k \geq c_i^- - 3\varepsilon$; denn wäre $y_k < c_i^- - 3\varepsilon$, dann wäre $y_{k+1} = (y_{k+1} - y_k) + y_k < 2\varepsilon + c_i^- - 3\varepsilon = c_i^- - \varepsilon$, im Widerspruch zur Definition von k . Nun folgt

$$\sum_{j \in F} a_{ij}^- \mu(P_j) \geq \sum_{j=1}^k 1 \cdot (y_j - y_{j-1}) = y_k \geq c_i^- - 3\varepsilon. \quad (2)$$

Eine ähnliche Überlegung zeigt

$$\sum_{j \in F} a_{ij}^+ \mu(P_j) \leq c_i^+ + 3\varepsilon. \quad (3)$$

Daher folgt durch Multiplikation mit $\mu(Q_i)$ und Summation über $i \in E$:

$$\begin{aligned} S_{Z_1^-}(g) - 3\varepsilon\mu(Q) &= \sum_{i \in E} (c_i^- - 3\varepsilon)\mu(Q_i) \leq \sum_{i \in E} \left(\sum_{j \in F} a_{ij}^- \mu(P_j) \right) \mu(Q_i) \\ &\leq \sum_{i \in E} \left(\sum_{j \in F} a_{ij} \mu(P_j) \right) \mu(Q_i) = S_Z(f) \\ &\leq \sum_{i \in E} \left(\sum_{j \in F} a_{ij}^+ \mu(P_j) \right) \mu(Q_i) \leq \sum_{i \in E} (c_i^+ + 3\varepsilon)\mu(Q_i) \\ &= S_{Z_1^+}(g) + 3\varepsilon\mu(Q). \end{aligned}$$

Wegen $Z_1^{\pm} \prec \varrho_1$ ist weiter $|S_{Z_1^{\pm}}(g) - \int_Q g| < \varepsilon$, und somit folgt $|S_Z(f) - \int_Q g| \leq \varepsilon(1 + 3\mu(Q))$. Dies zeigt die Integrierbarkeit von f und die Formel (1).

(ii) \implies (i): Für jedes $x \in Q$ ist f_x die charakteristische Funktion von $[0, g(x)] \subset [0, C]$. Daher (vgl. Beispiel 2.5(b)) ist f_x über P integrierbar mit Integral $\int_P f_x = g(x)$, und nach dem Satz von Fubini folgt $g \in \mathcal{L}^1(Q)$.

§4. Die Konvergenzsätze für Integrale über Quader

Übersicht. In diesem Abschnitt beweisen wir die fundamentalen Konvergenzsätze der Lebesgueschen Integrationstheorie: den Satz von der monotonen Konvergenz 4.4 und den Satz von der majorisierten Konvergenz 4.7. Diese Sätze gestatten die Vertauschung von Limes und Integral unter sehr schwachen Bedingungen, und ohne sie geht gar nichts.

4.1. Satz. Sei f eine Funktion auf dem Quader Q .

(a) Ist f über Q integrierbar, dann auch über jeden Teilquader $P \subset Q$, und es gilt

$$\int_P |f| \leq \int_Q |f|. \quad (1)$$

(b) Umgekehrt sei $(P_j)_{j \in F}$ eine Unterteilung des Quaders Q und sei f für alle $j \in F$ über P_j integrierbar. Dann ist f über Q integrierbar und es gilt

$$\int_Q f = \sum_{j \in F} \int_{P_j} f. \quad (2)$$

Beweis. (a) Nach 1.8 gibt es eine Unterteilung P_j von Q , sodass $P = P_k$ einer der Teilquader ist. Wir zeigen die Integrierbarkeit von $f_k := f|_{P_k}$ mit dem Cauchy-kriterium 2.7. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass $|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < \varepsilon$ für alle ϱ -feinen Zerlegungen Z und Z' von Q . Nun seien Z_k und Z'_k zwei ϱ -feine Zerlegungen von P_k . Für jeden Index $j \neq k$ in F wähle eine ϱ -feine Zerlegung Z_j von P_j , und füge Z_k bzw. Z'_k mit den übrigen Z_j zu Zerlegungen Z bzw. Z' von ganz Q wie in 2.1 zusammen. Dann sind Z und Z' wieder ϱ -fein, und es folgt

$$\begin{aligned} \varepsilon > |S_Z(f) - S_{Z'}(f)| &= \left| S_{Z_k}(f_k) + \left(\sum_{j \neq k} S_{Z_j}(f_j) \right) - S_{Z'_k}(f_k) - \left(\sum_{j \neq k} S_{Z_j}(f_j) \right) \right| \\ &= |S_{Z_k}(f_k) - S_{Z'_k}(f_k)|. \end{aligned}$$

Also ist f_k integrierbar. Die Abschätzung (1) folgt aus (2) angewandt auf $|f|$.

(b) Sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $A_j = \int_{P_j} f$. Für jedes $j \in F$ wähle eine positive Funktion ϱ_j auf P_j , sodass $|S_Z(f_j) - A_j| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_j$ von P_j . Für jedes $x \in Q$ sei

$$\delta(x) = \inf\{d(x, P_j) : x \notin P_j, j \in F\}$$

das Infimum der Abstände von x zu allen Quadern P_j , in denen x nicht liegt. Wegen der Endlichkeit von F ist $\delta(x)$ positiv oder $+\infty$ (als Infimum der leeren Menge), falls x in allen P_j liegen sollte. Jedenfalls gilt

$$B_{\delta(x)}(x) \cap P_j = \emptyset \quad \text{für } x \notin P_j. \quad (3)$$

Nun definiere die positive Funktion ϱ auf Q durch

$$\varrho(x) := \min\{\delta(x), \varrho_j(x) : x \in P_j, j \in F\},$$

und betrachte eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ von Q . Für jedes $j \in F$ sei

$$E_j := \{i \in E : \xi_i \in P_j\}. \quad (4)$$

Dann gilt

$$Q_i \cap P_j = \emptyset \quad \text{für } i \notin E_j. \quad (5)$$

In der Tat ist $Q_i \subset B_{\varrho(\xi_i)}(\xi_i)$, weil Z feiner als ϱ ist. Andererseits ist $\varrho(\xi_i) \leq \delta(\xi_i)$ nach Definition von ϱ . Weiter folgt aus $i \notin E_j$ nach (4), dass $\xi_i \notin P_j$ und daher sogar $B_{\delta(\xi_i)}(\xi_i) \cap P_j = \emptyset$ nach (3).

Wir behaupten nun, dass $Z_j := (\xi_i, P_j \cap Q_i)_{i \in E_j}$ eine ϱ_j -feine Zerlegung von P_j ist. Zunächst sind nach Definition von E_j die Stützstellen ξ_i für $i \in E_j$ wirklich in P_j . Weiter ist klar, dass die $P_j \cap Q_i$ fast disjunkt sind, denn die Q_i sind es. Wir zeigen

$$\bigcup_{i \in E_j} (P_j \cap Q_i) = P_j. \quad (6)$$

Dabei ist die linke Seite trivialerweise in der rechten enthalten. Umgekehrt sei $x \in P_j$. Weil Q die Vereinigung der Q_i ist, gibt es ein $i \in E$ mit $x \in Q_i$. Dann ist aber $i \in E_j$, denn sonst wäre $Q_i \cap P_j$ nach (5) leer. Damit ist x in der linken Seite von (6) enthalten. Schließlich ist $\varrho|_{P_j} \leq \varrho_j$ und somit folgt $Z_j \prec \varrho_j$ aus $Z \prec \varrho$.

Wir betrachten jetzt die Riemannschen Summen zu den Zerlegungen Z und Z_j und behaupten

$$S_Z(f) = \sum_{j \in F} S_{Z_j}(f_j). \quad (7)$$

Zum Beweis dieser Formel beachte, dass $\mu(Q_i \cap P_j) = 0$ für $i \notin E_j$ wegen (5), und somit wegen der Additivität des Inhalts

$$\begin{aligned} \sum_{j \in F} S_{Z_j}(f_j) &= \sum_{j \in F} \sum_{i \in E_j} f(\xi_i) \mu(P_j \cap Q_i) = \sum_{j \in F} \sum_{i \in E} f(\xi_i) \mu(P_j \cap Q_i) \\ &= \sum_{i \in E} \sum_{j \in F} f(\xi_i) \mu(P_j \cap Q_i) = \sum_{i \in E} f(\xi_i) \sum_{j \in F} \mu(P_j \cap Q_i) \\ &= \sum_{i \in E} f(\xi_i) \mu(Q_i) = S_Z(f). \end{aligned}$$

Schließlich folgt nun mit (7) und der Dreiecksungleichung

$$\left| S_Z(f) - \sum_{j \in F} A_j \right| \leq \sum_{j \in F} |S_{Z_j}(f_j) - A_j| \leq \varepsilon \text{Card}(F),$$

und daraus die Behauptung, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Bemerkung. Hiermit ist folgendes *noch nicht bewiesen*: Wenn $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und P in einem größeren Quader Q enthalten ist, dann ist die Nullfortsetzung von f über Q integrierbar mit demselben Integral. Dies werden wir erst am Ende dieses Paragraphen (4.11) zeigen können. Die Schwierigkeit liegt darin, dass der Rand von P für $n > 1$ nicht mehr endlich ist, und daher die Einschränkung von f auf den Rand nicht beschränkt zu sein braucht.

4.2. Partielle Zerlegungen. Sei Q ein Quader. Eine *partielle Zerlegung* von Q ist eine endliche Familie $Z' = (\xi_i, Q_i)_{i \in E'}$, sodass die ξ_i in Q liegen, und die Q_i fast disjunkt sind. Der Unterschied zu einer Zerlegung ist also nur, dass die Vereinigung der Q_i nicht ganz Q sein muss. Ist ϱ eine positive Funktion auf Q , so heißt Z' feiner als ϱ , wenn 2.1.2 für alle $i \in E'$ gilt. Partielle Zerlegungen tauchen beim Beweis des Satzes von der monotonen Konvergenz auf.

Wir behaupten, dass jede ϱ -feine partielle Zerlegung durch Weglassen gewisser Teilquader und Stützstellen aus einer ϱ -feinen Zerlegung von ganz Q entsteht, anders ausgedrückt: Jede partielle Zerlegung lässt sich durch Hinzunahme geeigneter Teilquader und Stützstellen zu einer ϱ -feinen Zerlegung erweitern. Zum *Beweis* wähle zunächst (nach 1.8) eine Unterteilung $(Q_i)_{i \in E}$ von Q mit $E' \subset E$. Für jeden Teilquader Q_j ($j \in E \setminus E'$) sei Z_j eine ϱ -feine Zerlegung von Q_j . Dann hat die Zusammensetzung der Zerlegungen Z_j ($j \in E \setminus E'$) mit den jeweils nur aus einem Teilquader und einer Stützstelle bestehenden Zerlegungen (ξ_i, Q_i) von Q_i ($i \in E'$) die gewünschte Eigenschaft.

4.3. Lemma von Henstock. Sei $f \in \mathcal{L}^1(Q)$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ eine positive Funktion auf Q wie in der Definition des Integrals 2.3.2, also $|\int_Q f - S_Z(f)| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho$. Sei $Z' = (\xi_i, Q_i)_{i \in E'}$ eine partielle ϱ -feine Zerlegung. Dann gilt

$$\sum_{i \in E'} \int_{Q_i} |f - f(\xi_i)| \leq 2\varepsilon. \quad (1)$$

Beweis. Nach 4.2 gibt es eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ von ganz Q mit $E' \subset E$. Weil in der Summe (1) nur nicht negative Terme vorkommen, genügt es also, (1) für E an Stelle von E' zu beweisen. Definiere die Funktion g_i auf Q_i durch $g_i(x) := |f(x) - f(\xi_i)|$. Nach Satz 4.1, Satz 2.6 und Satz 2.12 ist dann $g_i \in \mathcal{L}^1(Q_i)$. Daher gibt es zu jedem $\alpha > 0$ eine positive Funktion ϱ_i auf Q_i , sodass $|\int_{Q_i} g_i - S_{Z_i}(g_i)| < \alpha$ für jede Zerlegung $Z_i \prec \varrho_i$ von Q_i . Wähle nun für jedes $i \in E$ eine Zerlegung $Z_i \prec \min(\varrho_i, \varrho|_{Q_i})$ von Q_i . Dann folgt, wenn etwa $Z_i = (\eta_{ij}, P_{ij})_{j \in F_i}$:

$$\int_{Q_i} g_i \leq \left| \int_{Q_i} g_i - S_{Z_i}(g_i) \right| + S_{Z_i}(g_i) \leq \alpha + \sum_{j \in F_i} |f(\eta_{ij}) - f(\xi_i)| \mu(P_{ij}). \quad (2)$$

Summiere (2) über alle $i \in E$:

$$\sum_{i \in E} \int_{Q_i} g_i \leq \alpha \operatorname{Card}(E) + \sum_{i \in E} \sum_{j \in F_i} |f(\eta_{ij}) - f(\xi_i)| \mu(P_{ij}), \quad (3)$$

und definiere zwei verträgliche ϱ -feine Zerlegungen Z' und Z'' von Q folgendermaßen: Die von beiden benützte Unterteilung ist die Zusammensetzung der Unterteilungen zu den Z_i (siehe 1.2), also $(P_{ij})_{(i,j) \in K}$ wobei die Indexmenge K durch

$$K = \bigcup_{i \in E} \{i\} \times F_i,$$

gegeben ist, und die Stützstellen sind $\xi'_{ij} := \xi_i$ bzw. $\xi''_{ij} := \eta_{ij}$ wie oben. Wegen $Z_i \prec \varrho|_{Q_i}$ ist klar, dass Z' und Z'' feiner als ϱ sind. Die auf der rechten Seite von (3) auftretende Doppelsumme ist dann gerade $\sum_{k \in K} |f(\xi'_k) - f(\xi''_k)| \mu(P_k)$, und daher nach 2.11 kleiner als 2ε . Es folgt

$$\sum_{i \in E} \int_{Q_i} g_i < \alpha \operatorname{Card}(E) + 2\varepsilon.$$

Weil $\alpha > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung für $\alpha \downarrow 0$.

4.4. Satz von der monotonen Konvergenz (B. Levi). Sei Q ein Quader, sei (f_k) eine monoton wachsende Folge von integrierbaren Funktionen auf Q , die punktweise gegen eine Funktion f auf Q konvergiere:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in Q.$$

Die (dann ebenfalls monoton wachsende) Folge der Integrale $A_k = \int_Q f_k$ sei beschränkt und somit konvergent, etwa $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A$. Dann ist f über Q integrierbar und es gilt $\int_Q f = A$, man darf also Limes und Integral vertauschen:

$$\int_Q \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k. \quad (1)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $l \in \mathbf{N}$ so, dass

$$A - \varepsilon < A_l \leq A. \quad (2)$$

Für jedes $k \in \mathbf{N}$ wähle eine positive Funktion ϱ_k auf Q so, dass für alle Zerlegungen Z von Q gilt

$$Z \prec \varrho_k \implies |S_Z(f_k) - A_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}. \quad (3)$$

Das ist möglich, weil nach Voraussetzung f_k integrierbar ist mit Integral A_k . Für jedes $x \in Q$ wähle einen Index $\nu(x) \in \mathbf{N}$ mit $\nu(x) \geq l$ und

$$0 \leq f(x) - f_{\nu(x)}(x) < \varepsilon. \quad (4)$$

Das ist wegen $f_k(x) \uparrow f(x)$ möglich. Nun definiere ϱ auf Q durch

$$\varrho(x) = \varrho_{\nu(x)}(x), \quad (5)$$

und betrachte eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ von Q . Wir müssen $|S_Z(f) - A|$ abschätzen. Dazu setzen wir $n_i := \nu(\xi_i)$ für $i \in E$, schreiben mit der Dreiecksungleichung

$$|S_Z(f) - A| \leq |S_Z(f) - B| + |B - C| + |C - A|, \quad (6)$$

wobei

$$B := \sum_{i \in E} f_{n_i}(\xi_i) \mu(Q_i), \quad C := \sum_{i \in E} \int_{Q_i} f_{n_i},$$

und schätzen die in (6) rechts stehenden Terme einzeln ab. Zunächst ist, weil $f \geq f_k$ und wegen (4)

$$0 \leq S_Z(f) - B = \sum_{i \in E} (f(\xi_i) - f_{n_i}(\xi_i)) \mu(Q_i) \leq \sum_{i \in E} \varepsilon \mu(Q_i) = \varepsilon \mu(Q).$$

Weiter gilt wegen $\int_{Q_i} f_k(\xi) = f_k(\xi) \mu(Q_i)$ und der Integraldreiecksungleichung,

$$\begin{aligned} |B - C| &= \left| \sum_{i \in E} [f_{n_i}(\xi_i) \mu(Q_i) - \int_{Q_i} f_{n_i}] \right| = \left| \sum_{i \in E} \int_{Q_i} (f_{n_i} - f_{n_i}(\xi_i)) \right| \\ &\leq \sum_{i \in E} \left| \int_{Q_i} (f_{n_i} - f_{n_i}(\xi_i)) \right| \leq \sum_{i \in E} \int_{Q_i} |f_{n_i} - f_{n_i}(\xi_i)| =: (*). \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von (*) zerlegen wir zunächst die Indexmenge $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, wobei $E_k = \{i \in E : n_i = k\}$. Weil E endlich ist, gibt es ein $m \in \mathbf{N}$ mit $E_k = \emptyset$ für alle $k > m$. Damit lässt sich (*) schreiben als

$$(*) = \sum_{k=1}^m \sum_{i \in E_k} \int_{Q_i} |f_k - f_k(\xi_i)|.$$

Nun bildet $(\xi_i, Q_i)_{i \in E_k}$ eine Q_k -feine partielle Zerlegung von Q , denn für $i \in E_k$ ist $n_i = v(\xi_i) = k$ und folglich $Q_i \subset B_{Q(\xi_i)}(\xi_i) = B_{Q_k(\xi)}(\xi_i)$ wegen (5). Also folgt nach (3) und Lemma 4.3, dass

$$\sum_{i \in E_k} \int_{Q_i} |f_k - f_k(\xi_i)| \leq 2 \frac{\varepsilon}{2^k},$$

und damit weiter

$$|B - C| \leq (*) \leq \sum_{k=1}^m 2 \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2 \frac{\varepsilon}{2^k} = 2\varepsilon.$$

Schließlich ist $l \leq v(\xi_i) = n_i \leq m$ für alle $i \in E$, und daher wegen (2), der Monotonie der Folge f_k und 4.1(b),

$$\begin{aligned} A - \varepsilon < A_l &= \int_Q f_l = \sum_{i \in E} \int_{Q_i} f_l \\ &\leq \sum_{i \in E} \int_{Q_i} f_{n_i} = C \leq \sum_{i \in E} \int_{Q_i} f_m = \int_Q f_m = A_m \leq A, \end{aligned}$$

sodass $|C - A| < \varepsilon$. Nun ergibt sich insgesamt

$$|S_Z(f) - A| \leq \varepsilon \mu(Q) + 2\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(3 + \mu(Q)),$$

und weil ε beliebig war, folgt die Behauptung.

4.5. Korollar. Sei (f_k) eine monoton fallende Folge von über Q integrierbaren Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion f auf Q konvergiere. Die Folge der Integrale $\int_Q f_k$ sei beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und es gilt $\int_Q f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k$.

Beweis. Wende den Satz von der monotonen Konvergenz auf die Folge $(-f_k)$ an.

4.6. Korollar. Seien $f_k \in \mathcal{L}^1(Q)$ nicht negative Funktionen. Die Reihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ sei für alle $x \in Q$ konvergent. Ferner sei $A := \sum_{k=0}^{\infty} \int_Q f_k < \infty$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $A = \int_Q f$.

Beweis. Wende den Satz von der monotonen Konvergenz auf die Folge $\sum_{j=0}^k f_j$ der Partialsummen an.

4.7. Satz von der majorisierten Konvergenz (H. Lebesgue). Sei (f_k) eine Folge integrierbarer Funktionen auf einem Quader Q , die punktweise gegen eine Funktion f auf Q konvergiere. Es gebe eine Funktion $g \in \mathcal{L}^1(Q)$ mit $|f_k(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in Q$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und es gilt $\int_Q f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k$.

Beweis. Setze $g_k(x) := \sup\{f_j(x) : j \geq k\}$. Die Zahlenfolge $f_j(x)$ ist konvergiert und somit beschränkt, sodass das Supremum existiert. Weiter ist (Aufgabe!) $g_k(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} g_{kl}(x)$ wobei $g_{kl}(x) := \max(f_k(x), \dots, f_{k+l}(x))$. Nach 2.13 gilt $g_{kl} \in \mathcal{L}^1(Q)$. Bei festem k bilden die $g_{kl}(x)$ offenbar eine monoton wachsende Folge: $g_{kl}(x) \leq g_{k,l+1}(x) \leq \dots$, und es gilt $-g(x) \leq g_{kl}(x) \leq g(x)$, also

$$\int_Q g_{kl} \leq \int_Q g =: M.$$

Daher ist nach dem Satz von der monotonen Konvergenz $g_k = \lim_{l \rightarrow \infty} g_{kl} \in \mathcal{L}^1(Q)$. Die g_k sind andererseits monoton fallend und $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x)$, weil die Folge $f_k(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert. Ferner ist $g_k(x) \geq g_{kl}(x) \geq -g(x)$ und somit $\int_Q g_k \geq -M$. Daher ist nun, nach 4.5, $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und

$$\int_Q f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q g_k.$$

Analog zeigt man, dass $h_k(x) := \inf\{f_j(x) : j \geq k\}$ integrierbar ist und $\int_Q f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q h_k$. Da schließlich $h_k \leq f_k \leq g_k$ (klar nach Definition), folgt

$$\int_Q h_k \leq \int_Q f_k \leq \int_Q g_k$$

und daraus für $k \rightarrow \infty$ die Behauptung.

4.8. Beispiel. Wenn (f_k) eine punktweise konvergente Folge integrierbarer Funktionen ist, so ist im Allgemeinen Limes und Integral nicht vertauschbar, selbst wenn die Grenzfunktion integrierbar ist. Das sieht man am Beispiel $Q = [0, 1]$ und

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{für } 0 < x < \frac{1}{k}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Folge konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion, aber $\int_Q f_k = 1$ für alle k .

4.9. Satz. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(Q)$ und sei f beschränkt. Dann ist auch $fg \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Beweis. Wir behandeln erst den Spezialfall, dass f und g beschränkt sind, etwa durch $C > 0$. Für verträgliche Zerlegungen $Z = (\xi_i, Q_i)$ und $Z' = (\eta_i, Q_i)$ gilt dann

$$\begin{aligned} |S_Z(fg) - S_{Z'}(fg)| &= \left| \sum (f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\eta_i)g(\eta_i))\mu(Q_i) \right| \\ &\leq \sum \left(|f(\xi_i)g(\xi_i) - f(\xi_i)g(\eta_i)| + |f(\xi_i)g(\eta_i) - f(\eta_i)g(\eta_i)| \right) \mu(Q_i) \\ &\leq C \cdot \sum |g(\xi_i) - g(\eta_i)|\mu(Q_i) + C \cdot \sum |f(\xi_i) - f(\eta_i)|\mu(Q_i). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Integrierbarkeit von fg nach Lemma 2.11 und dem Cauchy Kriterium 2.7.

Nun sei g nicht notwendig beschränkt. Durch Zerlegung in positiven und negativen Anteil (vgl. 2.13) sieht man, dass es genügt, den Fall $g \geq 0$ zu betrachten. Setze $g_k := \min(g, k)$. Dann ist $g_k \in \mathcal{L}^1(Q)$ beschränkt und integrierbar, also auch fg_k nach dem schon Bewiesenen. Ferner gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} fg_k = fg$ punktweise und $|fg_k| \leq Cg_k \leq Cg \in \mathcal{L}^1(Q)$. Also ist fg nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz integrierbar.



4.10. Satz. Sei f eine Funktion auf Q , die im Innern von Q verschwindet. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $\int_Q f = 0$.

Beweis. Wir können Q nicht ausgeartet annehmen, denn auf einem ausgearteten Quader ist jede Funktion integrierbar mit Integral 0. Sei zuerst wieder f beschränkt, etwa durch $C > 0$, und sei $Q = \prod_{j=1}^n [a^j, b^j]$ sowie $\delta = \min(b^1 - a^1, \dots, b^n - a^n)$ die Länge der kleinsten Seite von Q . Für ein $\varepsilon \in]0, \delta/2[$ sei $Q^\varepsilon = \prod_{j=1}^n [a^j + \varepsilon, b^j - \varepsilon]$ der nach innen um ε geschrumpfte Quader, und sei $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ eine ε -feine Zerlegung von Q . Ferner sei $F = \{i \in E : \xi_i \notin Q^\circ\}$. Für $i \in F$ ist dann $Q_i \cap Q^\varepsilon \subset B_\varepsilon(\xi_i) \cap Q^\varepsilon = \emptyset$. Daher bildet Q^ε zusammen mit den Q_i ($i \in F$) eine fast disjunkte Familie von Teilquadern von Q und folglich gilt nach 1.9

$$\sum_{i \in F} \mu(Q_i) \leq \mu(Q) - \mu(Q^\varepsilon).$$

Weiter ist

$$\mu(Q) - \mu(Q^\varepsilon) = \prod_1^n (b^j - a^j) - \prod_1^n (b^j - a^j - 2\varepsilon) = \varepsilon h(\varepsilon)$$

ein Polynom vom Grad n ohne konstanten Term, sodass eine Abschätzung $|h(\varepsilon)| \leq M$ mit einer geeigneten Konstanten M für alle $\varepsilon \in]0, \delta/2]$ existiert. Damit erhalten wir

$$|S_Z(f)| \leq \sum_{i \in F} |f(\xi_i)| \mu(Q_i) \leq C \cdot \sum_{i \in F} \mu(Q_i) \leq C \cdot \varepsilon h(\varepsilon) \leq C \cdot M \cdot \varepsilon.$$

Das zeigt $f \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $\int_Q f = 0$.

Nun sei f nicht notwendig beschränkt. Durch Zerlegung in positiven und negativen Anteil genügt es, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Dann sind die Funktionen $f_k = \min(f, k)$ beschränkt und verschwinden auf Q° , sind also integrierbar mit Integral 0. Weiter ist f der punktweise monoton wachsende Limes der f_k . Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von der monotonen Konvergenz.

4.11. Korollar. Seien $P \subset Q$ Quader und sei $f \in \mathcal{L}^1(P)$. Setze f fort zu einer Funktion \tilde{f} auf Q durch $\tilde{f}(x) := 0$ für $x \in Q \setminus P$. Dann ist $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1(Q)$ und es gilt $\int_P f = \int_Q \tilde{f}$.

Beweis. Nach 1.8 gibt es eine Unterteilung von Q , die aus P und gewissen weiteren Quadern P_j besteht. Dann verschwindet \tilde{f} auf allen P_j° , ist also nach 4.10 über P_j integrierbar. Nun folgt die Behauptung aus 4.1(b).

§5. Integration über den \mathbf{R}^n

Übersicht. Wir dehnen die bisher entwickelte Integrationstheorie auf Quadern — elementare Eigenschaften, Satz von Fubini, Konvergenzsätze — durch einen Ausschöpfungsprozess auf den ganzen \mathbf{R}^n aus. Ferner definieren wir unwesentliche Funktionen und Nullmengen (5.9) und beweisen verbesserte Versionen des Satzes von Fubini (5.14, 5.15) und der Konvergenzsätze (5.13), bei denen die Voraussetzungen auf ein Minimum reduziert sind.

5.1. Lokal integrierbare und integrierbare Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ heißt *lokal integrierbar*, wenn sie über jeden kompakten Quader Q integrierbar ist. Zum Beispiel ist nach Satz 2.9 jede stetige Funktion auf \mathbf{R}^n lokal integrierbar. Wir bezeichnen mit

$$\mathcal{L}_{\text{loc}}^1 = \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n)$$

die Menge der lokal integrierbaren Funktionen auf dem \mathbf{R}^n . Für eine lokal integrierbare Funktion f definieren wir die

$$v_1(f) := \sup \left\{ \int_Q |f| : Q \text{ kompakter Quader} \right\}, \quad (1)$$

wobei dies formal als ∞ zu betrachten ist, falls die unter dem Supremum stehende Menge reeller Zahlen unbeschränkt ist. In jedem Fall ist also $v_1(f) \in [0, \infty] = [0, \infty[\dot{\cup} \{\infty\}$. Für den Umgang mit dem Symbol ∞ treffen wir die Vereinbarungen

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad a \leq \infty, \quad a \cdot \infty = \begin{cases} \infty & \text{falls } a > 0, \\ 0 & \text{falls } a = 0, \end{cases} \quad (2)$$

für alle $a \in [0, \infty]$. Dagegen werden Ausdrücke wie $a - \infty$, $\infty - \infty$, a/∞ und dergleichen nicht definiert.

Eine lokal integrierbare Funktion heißt (global) *integrierbar* oder *summierbar*, falls $v_1(f) < \infty$. Die Menge der integrierbaren Funktionen auf \mathbf{R}^n bezeichnen wir mit

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n).$$

Die eigentliche Definition des Integrals einer Funktion $f \in \mathcal{L}^1$ erfordert etwas Vorarbeit. Unter einer *Seminorm* auf einem Vektorraum \mathbf{V} verstehen wir eine Funktion $\|\cdot\|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}_+$ mit $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ und $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in \mathbf{V}$ und λ im Grundkörper. Der Unterschied zu einer Norm ist also nur der, dass aus $\|v\| = 0$ nicht $v = 0$ folgen muss.

5.2. Satz. (a) Für $f, g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und $\lambda \in \mathbf{R}$ gelten die Regeln

$$v_1(f + g) \leq v_1(f) + v_1(g), \quad v_1(\lambda f) = |\lambda| \cdot v_1(f).$$

(b) $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und $\mathcal{L}^1 \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ sind Vektorräume, und

$$\|f\|_1 := v_1(f) \quad (f \in \mathcal{L}^1)$$

definiert eine Seminorm auf \mathcal{L}^1 , genannt die 1-Norm. Mit f und g sind auch der Betrag $|f|$, der positive und negative Anteil f_{\pm} und das Maximum und Minimum $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ in $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ bzw. \mathcal{L}^1 enthalten.

(c) Ist f integrierbar (bzw. lokal integrierbar) und ist g lokal integrierbar und beschränkt, dann ist auch fg integrierbar (bzw. lokal integrierbar).

(d) (Majorantenkriterium) Ist $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ und $|f| \leq g \in \mathcal{L}^1$, dann ist $f \in \mathcal{L}^1$.

Beweis. (a) folgt leicht aus $|f + g| \leq |f| + |g|$ und den bekannten Eigenschaften des Integrals über Quader. Nach (a) sind endliche Summen und skalare Vielfache von Funktionen in \mathcal{L}^1 wieder summierbar, und damit ist \mathcal{L}^1 ein Vektorraum. Der Rest der Behauptungen in (b) folgt aus 2.6 und 2.12. Schließlich ist (c) eine Folgerung von Satz 4.9, und für (d) verwendet man die Monotonie des Integrals über Quader, aus der $v_1(f) \leq v_1(g) < \infty$ folgt.

5.3. Definition und Konsistenz des Integrals. Sei zunächst $0 \leq f_+ \in \mathcal{L}^1$ eine nicht negative integrierbare Funktion. Dann definieren wir

$$\int f_+ := \int_{\mathbf{R}^n} f_+ := \|f_+\|_1 \quad \left(= \sup \left\{ \int_Q f_+ : Q \text{ kompakter Quader} \right\} \right). \quad (1)$$

Für beliebiges $f = f_+ - f_- \in \mathcal{L}^1$, zerlegt in positiven und negativen Anteil, setzen wir

$$\int f := \int f_+ - \int f_-.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass diese Definition mit der des Integrals über Quader im folgenden Sinne *konsistent* ist: Eine Funktion f auf \mathbf{R}^n , die ausserhalb eines Quaders P verschwindet, ist genau dann über \mathbf{R}^n integrierbar, wenn sie über P integrierbar ist, und in diesem Fall ist $\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_P f$. Wir identifizieren daher oft eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1(P)$ mit der Nullfortsetzung auf den ganzen \mathbf{R}^n .

Zum *Beweis* können wir nach Zerlegung in positiven und negativen Anteil $f \geq 0$ annehmen. Sei $f \in \mathcal{L}^1(P)$ und Q ein beliebiger Quader. Nach 4.1(a) ist f über $P \cap Q$ integrierbar, und daher ist nach 4.11 f über Q integrierbar, mit Integral $\int_Q f = \int_{P \cap Q} f \leq \int_P f$. Hieraus folgt $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f = \|f\|_1 = \int_P f$. Umgekehrt sei $f \in \mathcal{L}^1$ und verschwinde ausserhalb von P . Dann ist $\int_Q f = \int_P f$ für alle Quader $Q \supset P$ nach 4.11, und daher auch $\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_P f$.

Eine *vektorwertige* Funktion $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ heißt f lokal integrierbar bzw. integrierbar, wenn dies für jede Komponente der Fall ist. Das Integral von f wird dann komponentenweise erklärt. Insbesondere ist damit die (lokale) Integrierbarkeit und das Integral komplexwertiger Funktionen definiert. Die komplexwertigen (lokal) integrierbaren Funktionen bilden sogar einen komplexen Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ bzw. $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$, und das Integral ist eine \mathbf{C} -lineare Abbildung von $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ nach \mathbf{C} . Viele der folgenden Sätze gelten mit naheliegenden Änderungen auch für vektorwertige bzw. komplexwertige Funktionen. Die Details seien dem Leser überlassen.

Es ist nützlich zu wissen, dass sich das Integral auch als Limes einer Folge darstellen lässt. Dazu definieren wir allgemein: Eine *Ausschöpfung* einer Menge M ist eine Folge von Teilmengen (M_k) von M , deren Vereinigung ganz M ist.

Speziell sei $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ eine Ausschöpfung des \mathbf{R}^n durch aufsteigende kompakte Quader. Dann konvergieren die Folgen der linken bzw. rechten Endpunkte der Intervalle, aus denen die Q_k bestehen, gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$, und folglich ist jeder kompakte Quader Q in einem der Q_k enthalten (Aufgabe!). Zum Beispiel haben die Quader $Q_k = B_k(0)$ diese Eigenschaft. Damit gilt:

5.4. Lemma. Sei (Q_k) eine aufsteigende Ausschöpfung des \mathbf{R}^n durch kompakte Quader.

(a) Sei f eine Funktion, die über jedes Q_k integrierbar ist, und für die

$$s := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_k} |f| < \infty \quad (1)$$

ist. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1$ und $\|f\|_1 = s$.

(b) Sei $f \in \mathcal{L}^1$. Dann ist

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_k} f. \quad (2)$$

Beweis. (a) Die Funktion f ist lokal integrierbar, denn wenn etwa $Q \subset Q_k$, dann ist f über Q_k und somit nach 4.1(a) auch über Q integrierbar. Der Limes in (1) existiert als Limes einer monoton wachsenden Folge, und offenbar ist $s \leq \nu_1(f)$. Da umgekehrt jedes Q in einem Q_k enthalten ist, gilt auch $\int_Q |f| \leq \int_{Q_k} |f| \leq s$ und damit $\nu_1(f) \leq s$. Also ist f integrierbar.

(b) Für $f \geq 0$ ist (2) nach Definition des Integrals klar. Für beliebiges f folgt (2) durch Zerlegen in positiven und negativen Anteil aus der Linearität der rechten Seite in f und der Definition des Integrals.

Bemerkung. Aus der Existenz des Limes (2) für eine Funktion $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ folgt noch nicht die Integrierbarkeit! Beispiel: $f(x) = x$ auf \mathbf{R}^1 und $Q_k = [-k, k]$.

Die elementaren Eigenschaften des Integrals über den \mathbf{R}^n sind im folgenden Satz zusammengefasst.

5.5. Satz. (a) Das Integral $\int : \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ ist eine \mathbf{R} -lineare Abbildung.

(b) Das Integral ist monoton: Aus $f \leq g$ folgt $\int f \leq \int g$.

(c) Das Integral ist translationsinvariant: $f \in \mathcal{L}^1 \iff f \circ t_v \in \mathcal{L}^1$, und dann gilt $\int f = \int f \circ t_v$.

(d) Für die Homothetie $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ gilt $f \in \mathcal{L}^1 \iff f \circ h_\lambda \in \mathcal{L}^1$, und in diesem Fall ist $\int f = |\lambda|^n \int f \circ h_\lambda$.

(e) Mit $f \in \mathcal{L}^1$ ist auch $|f| \in \mathcal{L}^1$, und es gilt die Integraldreiecksungleichung

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| = \|f\|_1. \quad (1)$$

Beweis. Dies folgt leicht aus 5.3, 5.4 und den entsprechenden Eigenschaften des Integrals über Quader in 2.6 und 2.12. Die Details seien dem Leser überlassen.

5.6. Die Konvergenzsätze in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. (a) (Satz von der monotonen Konvergenz) Seien $f_k \in \mathcal{L}^1$, die Folge (f_k) konvergiere punktweise monoton wachsend gegen eine Funktion f auf \mathbf{R}^n , und die Integralfolge $(\int f_k)$ sei beschränkt. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1$ und es gilt

$$\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k. \quad (1)$$

(b) (Satz von der majorisierten Konvergenz) Es seien $f_k \in \mathcal{L}^1$ punktweise gegen eine Funktion f konvergent, und es sei $|f_k| \leq g$ für ein $g \in \mathcal{L}^1$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1$ und es gilt (1).

Beweis. (a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $f_k \geq 0$ annehmen, sonst ersetze f_k durch $f_k - f_1$. Dann ist auch $f \geq 0$. Die Integralfolge $A_k := \int f_k$ ist nach 5.5(b) monoton wachsend, und nach Voraussetzung beschränkt, also konvergent, etwa gegen A . Für jeden kompakten Quader Q und jedes k ist

$$\int_Q f_k \leq \int f_k = A_k \leq A.$$

Hieraus folgt: Die Restriktionen $f_k|_Q$ genügen den Voraussetzungen des Satzes 4.4 von Levi für Q . Also ist $f|_Q \in \mathcal{L}^1(Q)$ und weil Q beliebig war, folgt $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$. Wiederum nach dem Satz von Levi für Q gilt

$$\int_Q f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_Q f_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A.$$

Nimmt man hier das Supremum über alle Q , dann folgt $v_1(f) < \infty$, also $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f \leq A$, wegen 5.3.1. Andererseits ist $f_k \leq f$ und somit $A_k = \int f_k \leq \int f$. Das zeigt $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \leq \int f$ und wir sind fertig.

(b) Der Satz von der majorisierten Konvergenz ist eine formale Folgerung aus dem Satz von der monotonen Konvergenz. Daher lässt sich der Beweis von 4.7 wörtlich übernehmen, wenn man das dortige \int_Q überall durch $\int_{\mathbf{R}^n}$ ersetzt.

5.7. Satz von Fubini für den \mathbf{R}^n . Sei $n = p + q$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Für alle $y \in \mathbf{R}^q$ sei $f^y: x \mapsto f(x, y)$ über \mathbf{R}^p integrierbar. Dann ist die Funktion $g(y) := \int_{\mathbf{R}^p} f^y$ über \mathbf{R}^q integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbf{R}^n} f = \int_{\mathbf{R}^q} g. \quad (1)$$

Beweis. Nach Zerlegung in positiven und negativen Anteil können wir $f \geq 0$ annehmen. Seien $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ und $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ Ausschöpfungen des \mathbf{R}^p und \mathbf{R}^q durch kompakte Quader, und sei

$$A_{km} := \int_{P_k \times Q_m} f \leq A := \int_{\mathbf{R}^n} f.$$

Dann sind die A_{km} sowohl in k wie in m monoton wachsend, und man überlegt sich leicht, dass

$$A = \sup\{A_{km} : k, m \in \mathbf{N}\} = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m, \quad \text{wobei} \quad B_m := \lim_{k \rightarrow \infty} A_{km}. \quad (2)$$

Da $f^y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p) \subset \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^p)$, ist die Funktion $g_{km}(y) := \int_{P_k} f^y$ für $y \in Q_m$ wohldefiniert. Nach dem Satz von Fubini für Quader 3.2, angewandt auf $f|_{P_k \times Q_m}$, ist $g_{km} \in \mathcal{L}^1(Q_m)$, mit Integral $\int_{Q_m} g_{km} = A_{km}$. Für $y \in Q_m$ ist weiter nach 5.4.2

$$g(y) = \int_{\mathbf{R}^p} f^y = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{P_k} f^y = \lim_{k \rightarrow \infty} g_{km}(y),$$

und wegen $f \geq 0$ und $P_1 \subset P_2 \subset \dots$ gilt $g_{1m}(y) \leq g_{2m}(y) \leq \dots$. Also ist $g|_{Q_m}$ der monoton wachsende Limes der $(g_{km})_{k \in \mathbf{N}}$, und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{Q_m} g_{km} = \lim_{k \rightarrow \infty} A_{km} = B_m < \infty.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für Q_m ist $g|_{Q_m} \in \mathcal{L}^1(Q_m)$ mit Integral B_m . Nun folgt $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$ und $\int_{\mathbf{R}^q} g = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = A$ aus 5.4 und (2).

5.8. Korollar. Seien $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p)$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$. Dann ist $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^{p+q})$, und es gilt

$$\int_{\mathbf{R}^n} (f \otimes g) = \left(\int_{\mathbf{R}^p} f \right) \left(\int_{\mathbf{R}^q} g \right). \quad (1)$$

Beweis. Nach 3.7 ist $f \otimes g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^{p+q})$, und für alle Quader $P \subset \mathbf{R}^p$ und $Q \subset \mathbf{R}^q$ gilt $\int_{P \times Q} |f \otimes g| = \left(\int_P |f| \right) \left(\int_Q |g| \right) \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$. Hieraus folgt $v_1(f \otimes g) < \infty$, und somit ist $f \otimes g$ über \mathbf{R}^{p+q} integrierbar. Nun ergibt sich die Formel (1) sofort aus dem Satz von Fubini.

5.9. Unwesentliche Funktionen und Nullmengen. Eine Funktion $f \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ heißt *unwesentlich*, falls $v_1(f) = 0$; mit anderen Worten: f ist über jeden kompakten Quader Q integrierbar mit $\int_Q |f| = 0$. Offenbar ist eine unwesentliche Funktion integrierbar, und hat nach 5.5.1 das Integral Null. Wegen 5.2(b) ist klar, dass die unwesentlichen Funktionen einen Untervektorraum

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^1 : \|f\|_1 = 0\} \subset \mathcal{L}^1$$

bilden.

Wir erinnern an die Definition der charakteristischen Funktion einer Menge in 3.8. Eine Teilmenge $N \subset \mathbf{R}^n$ heißt eine *Nullmenge*, wenn ihre charakteristische Funktion χ_N eine unwesentliche Funktion ist. Auf Grund von 5.3(d) und der obigen Beschreibung der unwesentlichen Funktionen sieht man leicht: N ist genau dann eine Nullmenge, wenn $N \cap Q$ für jeden kompakten Quader Q eine Nullmenge ist. Beispiele von Nullmengen sind:

- (a) Ein ausgearteter Quader P ist eine Nullmenge; denn für jeden Quader Q ist $P \cap Q$ ein ausgearteter Quader, und $\int_Q \chi_P = \mu(P \cap Q) = 0$ nach Beispiel 2.5(b).
- (b) Eine achsenparallele Hyperebene H im \mathbf{R}^n ist eine Nullmenge; denn $H \cap Q$ ist für jeden Quader Q ein ausgearteter Quader.
- (c) Der Rand eines Quaders ist wegen Satz 4.10 eine Nullmenge.
- (d) Ist $N \subset \mathbf{R}^p$ eine Nullmenge, dann ist $N \times \mathbf{R}^q$ eine Nullmenge im \mathbf{R}^{p+q} .

In der Tat ist die charakteristische Funktion $\chi_{N \times \mathbf{R}^q} = \chi_N \otimes \mathbf{1}_{\mathbf{R}^q}$ wegen Satz 5.8 unwesentlich.

Man sagt, eine Eigenschaft (von Punkten des \mathbf{R}^n) gelte *für fast alle x* oder *fast überall*, wenn die Menge der Punkte, wo sie nicht gilt, eine Nullmenge ist.

In Verallgemeinerung des schon für Quader eingeführten Begriffes nennen wir zwei Mengen A und B *fast disjunkt*, wenn ihr Durchschnitt eine Nullmenge ist. Wegen (c) ist das mit der früheren Terminologie konsistent.

5.10. Satz. (a) Sei $g \in \mathcal{N}$ unwesentlich und sei f eine Funktion auf \mathbf{R}^n mit $|f| \leq g$. Dann ist auch f unwesentlich.

(b) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist selber eine Nullmenge.

(c) Die Vereinigung von endlich oder abzählbar vielen Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

(d) Eine Funktion f auf \mathbf{R}^n ist genau dann unwesentlich, wenn die Menge $N = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) \neq 0\}$ ihrer Nicht-Nullstellen eine Nullmenge ist, mit anderen Worten:

$$f \in \mathcal{N} \iff f = 0 \text{ fast überall.} \quad (1)$$

Beweis. (a) Sei Q ein kompakter Quader. Direkt aus der Definition des Integrals über Q folgt leicht, dass $f|_Q \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $\int_Q |f| \leq \int_Q g = 0$ (Aufgabe!). Also ist f unwesentlich.

(b) Für $M \subset N$ gilt $0 \leq \chi_M \leq \chi_N$. Daher folgt die Behauptung aus (a).

(c) Seien N_1, N_2, \dots Nullmengen mit Vereinigung N und sei $M_k = N_1 \cup \dots \cup N_k$. Dann ist $0 \leq \chi_{M_k} \leq \chi_{N_1} + \dots + \chi_{N_k} \in \mathcal{N}$ und daher ist $\chi_{M_k} \in \mathcal{N}$ nach (a). Die Folge χ_{M_k} konvergiert monoton wachsend gegen χ_N . Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz 5.6(a) folgt daher $\chi_N \in \mathcal{N}$.

(d) Sei f unwesentlich und sei $N_k = \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{k}\}$. Dann ist $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ und N ist die Vereinigung der N_k . Ferner ist $0 \leq \chi_{N_k} \leq k \cdot |f|$. Also ist χ_{N_k} unwesentlich und N_k eine Nullmenge nach (a), und folglich auch N nach (c).

Umgekehrt sei N eine Nullmenge. Zerlegt man f in positiven und negativen Anteil, dann sind die Mengen der Nichtnullstellen dieser Funktionen in N enthalten und damit selber Nullmengen. Weil \mathcal{N} ein Vektorraum ist, genügt es also, den Fall $f \geq 0$ zu behandeln. Sei $f_k := \min(k, f)$. Dann ist $0 \leq f_k \leq k\chi_N$ und daher $f_k \in \mathcal{N}$ nach (a). Weiter konvergieren die f_k monoton wachsend gegen f . Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f = 0$.

5.11. Korollar. *Seien f und g Funktionen auf dem \mathbf{R}^n mit $g \in \mathcal{L}^1$ und $f = g$ fast überall. Dann ist auch $f \in \mathcal{L}^1$ und es gilt $\int f = \int g$.*

Man darf also eine integrierbare Funktion auf einer Nullmenge beliebig abändern, ohne dass sich die Integrierbarkeit oder der Wert des Integrals ändert. Zum Beweis wende man 5.10.1 auf die Differenz $f - g$ an und beachte $f = g + (f - g)$.

Der Satz 2.9 über die Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf kompakten Quadern gestattet die folgende Verbesserung:

5.12. Satz. *Eine beschränkte, fast überall stetige Funktion ist lokal integrierbar.*

Beweis. Sei Q ein kompakter Quader und sei etwa f in jedem Punkt von $Q \setminus N$ stetig, N eine Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in Q \setminus N$ wähle ein $\delta_x > 0$ derart, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in Q$ mit $|x - y| < \delta_x$. Ferner sei ϱ_N eine positive Funktion auf Q , sodass für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_N$ gilt $S_Z(\chi_N) < \varepsilon$. Nun setze

$$\varrho(x) = \begin{cases} \varrho_N(x) & \text{falls } x \in N, \\ \min(\delta_x, \varrho_N(x)) & \text{falls } x \in Q \setminus N, \end{cases}$$

und seien Z und Z' verträgliche ϱ -feine Zerlegungen von Q , mit Teilquadern Q_i und Stützstellen ξ_i bzw. ξ'_i ($i \in E$). Ferner sei etwa $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in Q$, und sei $F = \{i \in E : \xi_i \notin N \text{ und } \xi'_i \notin N\}$. Wie in 2.9.1 sieht man, dass $|f(\xi_i) - f(\xi'_i)| < 2\varepsilon$ falls $i \in F$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} |S_Z(f) - S_{Z'}(f)| &\leq \sum_{i \in F} |f(\xi_i) - f(\xi'_i)| \mu(Q_i) + \sum_{i \notin F} (|f(\xi_i)| + |f(\xi'_i)|) \mu(Q_i) \\ &< \sum_{i \in F} 2\varepsilon \mu(Q_i) + \sum_{i \notin F} 2C \mu(Q_i) \\ &\leq 2\varepsilon \mu(Q) + 2C(S_Z(\chi_N) + S_{Z'}(\chi_N)) \leq \varepsilon(2\mu(Q) + 4C). \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Integrierbarkeit von f über Q nach dem Cauchy-Kriterium.

Schließlich beweisen wir verbesserte Versionen der Sätze von Levi und Fubini, bei denen die Voraussetzungen auf ein Minimum reduziert sind.

5.13.* Verbesserter Satz von der monotonen Konvergenz. *Sei (f_k) eine monoton wachsende Folge in \mathcal{L}^1 mit beschränkter (und somit konvergenter) Integralfolge $A_k = \int f_k$. Dann konvergiert die Folge $(f_k(x))$ für fast alle $x \in \mathbf{R}^n$. Setzt man $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ falls der Limes existiert, und definiert $f(x)$ beliebig andernfalls, dann ist $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k$.*

Beweis. Sei N die Menge aller x , für die die Folge $(f_k(x))$ divergiert. Es genügt zu zeigen, dass N eine Nullmenge ist. Wegen 5.11 können wir dann nämlich die f_k und f auf N so abändern (etwa gleich 0 setzen), dass die Voraussetzungen des schon bewiesenen Satzes 5.6(a) erfüllt sind, und sind fertig.

Zunächst ist es keine Einschränkung anzunehmen, dass alle $f_k \geq 0$ sind, indem man eventuell f_k durch $f_k - f_1$ ersetzt. Nun betrachte, für jedes $m \in \mathbf{N}$,

$$g_{km} := \min\left(\frac{f_k}{m}, 1\right).$$

Dann ist $g_{km} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ nach 5.2(b) und $0 \leq g_{km} \leq f_k/m \in \mathcal{L}^1$, also auch $g_{km} \in \mathcal{L}^1$ nach 5.2(d). Weiter gilt

$$\int g_{km} \leq \int \frac{f_k}{m} = \frac{A_k}{m} \leq \frac{A}{m},$$

wobei A der Limes der A_k sei. Für festes m ist $g_{km}(x) \leq g_{k+1,m}(x) \leq \dots \leq 1$. Also existiert

$$g_m(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} g_{km}(x)$$

für alle $x \in \mathbf{R}^n$. Nach Satz 5.6(a) ist daher $g_m \in \mathcal{L}^1$ und $\int g_m \leq A/m$. Weiter ist $g_m \geq g_{m+1} \geq \dots \geq 0$, und somit existiert $g(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x)$ für alle x . Da die Integrale $\int g_m$ alle größer oder gleich Null sind, folgt wieder nach dem Satz von Levi, angewandt auf $(-g_m)$, dass $g \in \mathcal{L}^1$ sowie $0 \leq \int g = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m \leq \lim_{m \rightarrow \infty} A/m = 0$. Also ist g unwesentlich. Schließlich ist $g \geq \chi_N$; denn für $x \in N$ ist $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = +\infty$ und daher $g_{km}(x) = 1$ für alle genügend großen k , folglich auch $g_m(x) = 1$. Also ist nun N nach Satz 5.10(a) eine Nullmenge.

5.14* Verbesserter Satz von Fubini für Quader. Seien $P \subset \mathbf{R}^p$ und $Q \subset \mathbf{R}^q$ Quader und sei $f \in \mathcal{L}^1(P \times Q)$. Dann ist die Funktion $f^y : x \mapsto f(x, y)$ auf P für fast alle $y \in Q$ über P integrierbar. Definiert man

$$g(y) = \begin{cases} \int_P f^y & \text{falls } f^y \in \mathcal{L}^1(P), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $g \in \mathcal{L}^1(Q)$ und es gilt

$$\int_{P \times Q} f = \int_Q g. \quad (1)$$

Beweis. Wir zeigen erst, dass die Menge $N \subset Q$ aller $y \in Q$, für die f^y nicht integrierbar ist, eine Nullmenge ist. Nach dem Cauchy-Kriterium für Integrierbarkeit gibt es zu jedem $y \in N$ ein $\varepsilon_y > 0$ mit folgender Eigenschaft: Zu jeder positiven Funktion ϱ_P auf P gibt es noch verträgliche Zerlegungen $Z_1, Z_2 \prec \varrho_P$ von P , sodass $|S_{Z_1}(f^y) - S_{Z_2}(f^y)| \geq \varepsilon_y$.

Nun definiere $h : Q \rightarrow \mathbf{R}$ durch $h(y) = \varepsilon_y$ für $y \in N$ und $h(y) = 0$ sonst. Nach Satz 5.10(d) genügt es zu zeigen, dass h über Q integrierbar ist und das Integral 0 hat. Dazu sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Integrierbarkeit von f gibt es eine positive Funktion ϱ auf $P \times Q$ mit $|S_Z(f) - \int_{P \times Q} f| < \varepsilon$ für alle ϱ -feinen Zerlegungen Z von $P \times Q$. Sei wieder $\varrho^y(x) = \varrho(x, y)$. Für jedes $y \in N$ wähle ϱ^y -feine verträgliche Zerlegungen Z^y und \tilde{Z}^y von P , sodass $|S_{Z^y}(f^y) - S_{\tilde{Z}^y}(f^y)| \geq \varepsilon_y$. Für $y \in Q \setminus N$ seien Z^y und \tilde{Z}^y beliebige verträgliche ϱ^y -feine Zerlegungen von P . Dann gilt also

$$0 \leq h(y) \leq |S_{Z^y}(f^y) - S_{\tilde{Z}^y}(f^y)| \quad \text{für alle } y \in Q. \quad (2)$$

Seien etwa P_i^y ($i \in E^y$) die Teilquader und ξ_i^y bzw. $\tilde{\xi}_i^y$ die Stützstellen von Z^y bzw. \tilde{Z}^y . Definiere die positive Funktion ϱ' auf Q durch

$$\varrho'(y) = \min(\varrho(\xi_i^y, y), \varrho(\tilde{\xi}_i^y, y) : i \in E^y),$$

und sei $Z' = (\eta_j, Q_j)_{j \in F} \prec \varrho'$ eine Zerlegung von Q . Nun sei $Z = (\zeta_{ij}, R_{ij})$ die in 3.1.2 definierte ϱ -feine Zerlegung von $P \times Q$, und sei $\tilde{Z} = (\tilde{\zeta}_{ij}, R_{ij})$ analog definiert. Dann folgt wegen (2) und Lemma 2.11

$$\begin{aligned} 0 \leq S_{Z'}(h) &= \sum_{j \in F} h(\eta_j) \mu(Q_j) \leq \sum_{j \in F} |S_{Z^{\eta_j}}(f^{\eta_j}) - S_{\tilde{Z}^{\eta_j}}(f^{\eta_j})| \cdot \mu(Q_j) \\ &= \sum_{j \in F} \left| \sum_{i \in E^{\eta_j}} (f(\xi_i^{\eta_j}, \eta_j) - f(\tilde{\xi}_i^{\eta_j}, \eta_j)) \mu(P_{ij}) \right| \cdot \mu(Q_j) \\ &\leq \sum_{(i,j) \in K} |f(\zeta_{ij}) - f(\tilde{\zeta}_{ij})| \mu(R_{ij}) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist also $\int_Q h = 0$ und somit ist N eine Nullmenge, wie behauptet.

Zum Beweis von (1) definiere \tilde{f} auf $P \times Q$ durch

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{falls } y \notin N, \\ 0 & \text{falls } y \in N. \end{cases}$$

Dann unterscheiden sich f und \tilde{f} nur auf $P \times N$, und das ist nach 5.9(d) eine Nullmenge. Also ist \tilde{f} integrierbar und hat dasselbe Integral wie f . Daher folgt (1) aus dem schon bewiesenen Satz von Fubini 3.2.

5.15* Verbesserter Satz von Fubini für den \mathbf{R}^n . Sei $n = p+q$ und $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Dann ist die Funktion $f^y : x \mapsto f(x, y)$ für fast alle $y \in \mathbf{R}^q$ über \mathbf{R}^p integrierbar. Definiert man

$$g(y) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}^p} f^y & \text{falls } f^y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$ und es gilt 5.7.1.

Beweis. Wie im Beweis von 5.7 können wir $f \geq 0$ annehmen, und definieren P_k, Q_m, A_{km}, B_m und A ebenso wie dort. Nach 5.14, angewandt auf $f|_{P_k \times Q_m}$, gibt es Nullmengen $N_{km} \subset Q_m$, sodass $f^y|_{P_k} \in \mathcal{L}^1(P_k) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p)$ für $y \in Q_m \setminus N_{km}$. Sei $N' = \bigcup_{k,m=1}^{\infty} N_{km}$. Dann ist N' eine Nullmenge im \mathbf{R}^q , und immer noch wegen 5.14 gilt: Setzt man

$$g_{km}(y) := \begin{cases} \int_{P_k} f^y & \text{falls } y \in Q_m \setminus N', \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist $g_{km} \in \mathcal{L}^1(Q_m) \subset \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$ mit Integral

$$\int_{\mathbf{R}^q} g_{km} = \int_{Q_m} g_{km} = A_{km}. \quad (1)$$

Weil die P_k aufsteigen und f nicht negativ ist, gilt $g_{1m} \leq g_{2m} \leq \dots$, und nach (1) und 5.7.2 hat die Integralfolge $(\int_{\mathbf{R}^q} g_{km})_{k \in \mathbf{N}}$ den Limes $B_m < \infty$. Also folgt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz 5.13: Die Menge

$$N_m := \{y \in \mathbf{R}^q : \lim_{k \rightarrow \infty} g_{km}(y) = \infty\} \quad (2)$$

ist eine Nullmenge. Setzt man $N := N' \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$, dann ist N immer noch eine Nullmenge, und die Funktionen

$$g_m(y) := \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} g_{km}(y) & \text{falls } y \in Q_m \setminus N, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3)$$

sind in $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$ und haben das Integral

$$\int_{\mathbf{R}^q} g_m = B_m. \quad (4)$$

Als Nächstes zeigen wir:

$$y \in Q_m \setminus N \implies f^y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p) \text{ und } \int_{\mathbf{R}^p} f^y = g_m(y). \quad (5)$$

Sei also $y \in Q_m \setminus N$, und sei f_k^y die Nullfortsetzung von $f^y|_{P_k}$ auf ganz \mathbf{R}^p . Weil der \mathbf{R}^p die aufsteigende Vereinigung der P_k ist, gilt $f_1^y \leq f_2^y \leq \dots$ und $f^y = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^y$. Ferner ist $f_k^y \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^p)$, weil insbesondere $y \notin N_{km}$, und es gilt

$$\int_{\mathbf{R}^p} f_k^y = g_{km}(y) \leq g_m(y) < \infty,$$

nach (2), weil ja auch $y \notin N_m$. Also folgt (5) wegen (3) wieder nach dem Satz von der monotonen Konvergenz angewandt auf die Folge $(f_k^y)_{k \in \mathbf{N}}$. Weil die Vereinigung der Q_m ganz \mathbf{R}^q ist, erhalten wir nun aus (5): Für alle $y \in \mathbf{R}^q \setminus N$ ist f^y integrierbar. Damit ist die erste Aussage des Satzes bewiesen.

Zum Beweis von 5.7.1 bemerken wir zuerst, dass $g \cdot \chi_{Q_m} = g_m$ fast überall. In der Tat verschwinden beide Seiten ausserhalb Q_m , und stimmen auf $Q_m \setminus N$ wegen (5) überein. Daher ist g über Q_m integrierbar mit Integral

$$\int_{Q_m} g = \int_{\mathbf{R}^q} g_m = B_m$$

nach (4), und aus 5.4 sowie 5.7.2 folgt $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^q)$ und

$$\int_{\mathbf{R}^q} g = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = A.$$

Damit ist alles bewiesen.

§6. Messbare Mengen und Nullmengen

Übersicht. Messbar ist eine Menge, wenn ihre charakteristische Funktion lokal integrierbar ist. Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist messbar (6.6). Wir beweisen die grundlegenden Eigenschaften messbarer Mengen und zeigen, wie sie sich durch kompakte Mengen und Nullmengen darstellen lassen (6.10). Wichtig ist eine elementare Charakterisierung der Nullmengen (6.9), aus der sich Sätze über das Verhalten von Nullmenge und messbaren Mengen unter stetig differenzierbaren Abbildungen ergeben (6.12, 6.14).

6.1. Messbare und integrierbare Mengen. Eine Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^n$ heißt *messbar*, falls ihre charakteristische Funktion χ_M lokal integrierbar ist. (Die Bezeichnung „lokal integrierbar“ für solche Mengen wäre zwar konsequenter, ist aber nicht üblich.) In diesem Fall definieren wir das n -dimensionale *Maß* von M als

$$\mu^n(M) := \mu(M) := \nu_1(\chi_M) \in [0, \infty]. \quad (1)$$

Wegen 5.3 ist dies konsistent mit der in 3.8 gegebenen Definition des Maßes einer Teilmenge eines Quaders. Trivialerweise ist die leere Menge messbar und hat das Maß 0, denn ihre charakteristische Funktion ist die Nullfunktion. Der ganze \mathbf{R}^n ist messbar und $\mu(\mathbf{R}^n) = \infty$, denn seine charakteristische Funktion ist konstant 1. Schließlich ist klar, dass die in 5.9 definierten Nullmengen genau die messbaren Mengen vom Maß Null sind, was die dort eingeführte Terminologie rechtfertigt.

Falls $\mu(M) < \infty$, also $\chi_M \in \mathcal{L}^1$, so heißt M *integrierbar* oder *von endlichem Maß*. Insbesondere ist dies der Fall für eine beschränkte messbare Menge, aber es gibt natürlich auch unbeschränkte messbare Mengen von endlichem Maß.

Aus (c) und (d) von Satz 5.5 folgt sofort die Translationsinvarianz und das Verhalten des Maßes bei Homothetien:

$$\mu(t_v(M)) = \mu(M), \quad \mu(h_\lambda(M)) = |\lambda|^n \mu(M). \quad (2)$$

Für die zweite Formel beachte man, dass die charakteristische Funktion von $h_\lambda(M)$ durch $\chi_M \circ h_{1/\lambda}$ gegeben ist.

6.2. Satz. Seien M_1, M_2, \dots endlich oder abzählbar viele messbare Mengen.

(a) $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$ und $M_2 \setminus M_1$ sind wieder messbar und es gilt

$$\mu(M_1 \cup M_2) + \mu(M_1 \cap M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2), \quad (1)$$

$$\mu(M_2 \setminus M_1) + \mu(M_2 \cap M_1) = \mu(M_2). \quad (2)$$

(b) Das Maß ist monoton:

$$M_1 \subset M_2 \implies \mu(M_1) \leq \mu(M_2). \quad (3)$$

(c) Der Durchschnitt der M_i ist messbar. Falls $\mu(M_1) < \infty$, so gilt

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(M_1 \cap \dots \cap M_k). \quad (4)$$

(d) Die Vereinigung der M_i ist messbar, und es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(M_1 \cup \dots \cup M_k). \quad (5)$$

(e) Sind die M_i paarweise fast disjunkt im Sinne von 5.9, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M_i). \quad (6)$$

Beweis. (a) Weil die Mengen M_1 und M_2 messbar sind, ist $\chi_{M_1 \cap M_2} = \chi_{M_1} \cdot \chi_{M_2}$ nach Satz 5.2(c) lokal integrierbar, also $M_1 \cap M_2$ messbar. Weiter gilt die Formel

$$\chi_{M_1 \cup M_2} + \chi_{M_1 \cap M_2} = \chi_{M_1} + \chi_{M_2}. \quad (7)$$

Sie zeigt die lokale Integrierbarkeit von $\chi_{M_1 \cup M_2}$ und somit die Messbarkeit von $M_1 \cup M_2$. Sind χ_{M_1} und χ_{M_2} integrierbar, dann folgt aus dieser Formel zusammen mit dem Majorantenkriterium 5.2(d), dass auch die in (7) links stehenden Funktionen integrierbar sind, und durch Integration von (7) ergibt sich (1). Ist andererseits etwa χ_{M_1} nicht integrierbar, dann muss aus demselben Grund auch eine der beiden in (7) links stehenden Funktionen nicht integrierbar sein, und dann stimmt (1) trivialerweise wegen unserer Konvention 5.1.2. Ähnlich ergibt sich die Messbarkeit von $M_2 \setminus M_1$ und die Formel (2) aus

$$\chi_{M_2 \setminus M_1} + \chi_{M_1 \cap M_2} = \chi_{M_2}.$$

(b) Das folgt sofort aus (2).

(c) Sei $D_k = M_1 \cap \dots \cap M_k$ und $D = \bigcap_1^{\infty} D_k$ der Durchschnitt der M_k , mit charakteristischen Funktionen f_k bzw. f . Dann sind die D_k messbar nach (a) und es gilt $D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D$, also auch $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f \geq 0$, und $f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$. Sei Q ein kompakter Quader. Aus 4.5, angewandt auf die $f_k|_Q$, folgt die Integrierbarkeit von f über Q . Also ist $f = \chi_D$ lokal integrierbar, d.h., D ist messbar. Falls $\mu(M_1) < \infty$, so ist $f_1 \in \mathcal{L}^1$ und daher sind es wegen $0 \leq f_k \leq f_1$ auch alle f_k nach 5.2(d). Nun folgt (4) aus dem Satz von der monotonen Konvergenz 5.6(a), angewandt auf die Folge $(-f_k)$.

(d) Sei $V_k = M_1 \cup \dots \cup M_k$ und $V = \bigcup_k^{\infty} V_k$ die Vereinigung der M_k . Nach (a) sind die V_k messbar, ebenso sind es ihre Komplemente $C_k = \mathbf{R}^n \setminus V_k$ und damit nach (c) auch $V = \mathbf{R}^n \setminus \left(\bigcap_1^{\infty} C_k\right)$. Weiter folgt aus $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V$ und Monotonie, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(V_k) \leq \mu(V)$. Zum Beweis der Gleichheit können wir offenbar annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(V_k) < \infty$. Dann folgt die Behauptung aber nach dem Satz von Levi 5.6(a) angewandt auf die Folge der charakteristischen Funktionen der V_k .

(e) Aus (1) folgt durch Induktion und mit den in 5.10 gezeigten Eigenschaften der Nullmengen leicht, dass $\mu(M_1 \cup \dots \cup M_k) = \sum_{i=1}^k \mu(M_i)$. Damit erhält man die behauptete Formel durch $k \rightarrow \infty$ aus (5).

6.3. Das Cantorsche Diskontinuum. Sei $Q = [0, 1]$. Definiere eine Folge M_k von Teilmengen von Q durch $M_0 = Q$,

$$M_1 = M_0 \setminus \left] \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[, \quad M_2 = M_1 \setminus \left(\left] \frac{1}{9}, \frac{2}{9} \right[\cup \left] \frac{7}{9}, \frac{8}{9} \right[\right), \quad \dots$$

Allgemein ist also M_k die disjunkte Vereinigung von 2^k Intervallen der Länge 3^{-k} , und M_{k+1} entsteht aus M_k durch Herausnehmen der offenen mittleren Drittel aller dieser Intervalle. Der Durchschnitt K aller M_k heißt die *Cantorsche Drittelmenge* oder das *Cantorsche Diskontinuum*. Nach 6.2 ist klar, dass K eine messbare Menge ist, und

wegen 6.2.4 ist $\mu(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(M_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2/3)^k = 0$. Also ist K eine Nullmenge.

Bemerkenswerterweise ist K überabzählbar. Zum Beweis verwendet man die Darstellung der reellen Zahlen als triadische Brüche (also zur Basis 3). Zunächst ist jeder endliche triadische Bruch $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k$, dessen Ziffern a_j in $\{0, 2\}$ liegen, in K enthalten; denn diese 2^k Brüche bilden gerade die linken Endpunkte der 2^k Intervalle, aus denen M_k besteht, und bleiben daher beim Übergang zu M_{k+1} erhalten. Weiter ist K als Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen M_k selbst abgeschlossen. Daher enthält K auch jeden unendlichen triadischen Bruch $0, a_1 a_2 \dots = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ mit $a_j \in \{0, 2\}$ für alle j . Schließlich ist die Abbildung $\{0, 2\}^{\mathbb{N}} \rightarrow K$, die der Folge (a_j) den Bruch $\sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ zuordnet, injektiv. Zum Beweis nehmen wir an, dass $0, a_1 a_2 \dots = 0, b_1 b_2 \dots$ aber die Folgen a_j und b_j verschieden sind. Dann gibt es ein kleinstes m mit $a_m \neq b_m$, während $a_j = b_j$ für $1 \leq j < m$. Sei etwa $a_m = 0$ und $b_m = 2$. Dann folgt

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j} = \frac{2}{3^m} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{b_j}{3^j}.$$

Aber die linke Seite ist

$$\leq \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^j} = \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{2}{3^{m+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3^m} < \frac{2}{3^m},$$

Widerspruch. Nun ist $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar, und folglich ist es auch K .

6.4. Die Vitalische Menge. Es ist naheliegend zu fragen, ob nicht messbare Mengen überhaupt existieren. Die Antwort ist ja, wie das folgende, auf den italienischen Mathematiker Vitali zurückgehende Beispiel zeigt. Wir betrachten die Quotientengruppe \mathbf{R}/\mathbf{Q} . Dann hat jede Restklasse $x + \mathbf{Q}$ einen Vertreter in $[0, 1]$, zum Beispiel $x - [x]$, wo $[x]$ die größte ganz Zahl $\leq x$ bezeichnet. Wähle nun in jeder Restklasse $x + \mathbf{Q}$ einen Vertreter $v \in [0, 1]$ und sei $V \subset [0, 1]$ die Menge dieser Vertreter. Wir zeigen, dass die Menge V nicht messbar ist. Dazu sei $\{r_1, r_2, \dots\}$ eine injektive Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[-1, 1]$ und sei $V_i = r_i + V$. Dann gilt

$$[0, 1] \subset W := \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \subset [-1, 2]. \quad (1)$$

Die zweite Inklusion ist klar. Für die erste sei $x \in [0, 1]$. Weil V ein Vertretersystem für \mathbf{R}/\mathbf{Q} ist, gibt es dann ein $v \in V$ und ein $r \in \mathbf{Q}$ mit $x = r + v$. Es folgt $|r| = |x - v| \leq 1$, also ist $r = r_i$ für ein i und somit $x \in V_i$. Weiter sind die Mengen V_i disjunkt; denn ist etwa $x \in V_i \cap V_j$, also $x = r_i + v = r_j + w$ für geeignetes $v, w \in V$, dann sind die Restklassen von v und w gleich, also $v = w$, weil V ein Vertretersystem von \mathbf{R}/\mathbf{Q} ist. Es folgt $r_i = r_j$ und daher $i = j$.

Angenommen, V wäre messbar. Wegen der Translationsinvarianz des Maßes ist auch jedes V_i messbar mit Maß $\mu(V_i) = \mu(V) \leq 1$, und deswegen nach Satz 6.2(d) auch W . Wegen (1) und 6.2.3 ist ferner

$$1 = \mu([0, 1]) \leq \mu(W) \leq \mu([-1, 2]) = 3.$$

Andrerseits ist $\mu(W) = \sum_1^{\infty} \mu(V_i) = \sum_1^{\infty} \mu(V)$ wegen der Disjunktheit der V_i und 6.2(e), sodass für $\mu(W)$ nur die Werte 0 (falls $\mu(V) = 0$) oder ∞ (falls $\mu(V) > 0$) in Frage kommen. Das ist der gesuchte Widerspruch.

Wir zeigen nun, dass alle offenen und abgeschlossenen Mengen messbar sind. Nach (c) und (d) von Satz 6.2 gilt dasselbe dann auch für Mengen, die aus diesen durch abzählbare Vereinigungs- bzw. Durchschnittsbildung entstehen (sogenannte Borel-Mengen), sodass man schon einen sehr großen Vorrat messbarer Mengen bekommt. Wir beginnen mit dem elementaren, aber wichtigen

6.5. Ausschöpfungslemma. *Jede offene Teilmenge U des \mathbf{R}^n besitzt eine Ausschöpfung durch fast disjunkte kompakte Würfel: $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ und $\mu(W_i \cap W_k) = 0$ für $i \neq k$.*

Beweis. Für jedes $r \in \mathbf{N}$ sei \mathcal{W}_r die Menge aller abgeschlossenen Würfel der Kantenlänge 2^{-r} und mit Eckpunkten in $2^{-r} \cdot \mathbf{Z}^n$. Dann ist \mathcal{W}_r abzählbar. Ferner gilt: Für $W \in \mathcal{W}_r$ und $W' \in \mathcal{W}_s$ ($s \geq r$) sind entweder W und W' fast disjunkt oder es ist $W' \subset W$. Nun definiere induktiv: $\mathcal{W}_0(U) := \{W \in \mathcal{W}_0 : W \subset U\}$, und $\mathcal{W}_{r+1}(U)$ als die Menge aller Würfel W in \mathcal{W}_{r+1} mit $W \subset U$, die aber in keinem der Würfel in $\bigcup_{j \leq r} \mathcal{W}_j(U)$ enthalten sind. Sei W_1, W_2, \dots eine Abzählung der Menge $\bigcup_{r \geq 0} \mathcal{W}_r(U)$. Dann sind die W_k nach Konstruktion fast disjunkt und in U enthalten. Wir zeigen, dass ihre Vereinigung ganz U ist. Dazu sei $a \in U$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(a) \subset U$. Wähle r so groß, dass $2^{-r} < \varepsilon$. Da der \mathbf{R}^n die Vereinigung aller Würfel $W \in \mathcal{W}_r$ ist, gibt es ein $W \in \mathcal{W}_r$ mit $a \in W$. Da der Durchmesser (in der Maximumnorm) von W gleich 2^{-r} ist, folgt für alle $x \in W$, dass $|x - a| \leq 2^{-r} < \varepsilon$, also $W \subset B_\varepsilon(a) \subset U$. Nun ist W entweder in $\mathcal{W}_r(U)$ oder es ist enthalten in einem $\tilde{W} \in \mathcal{W}_q(U)$ ($q < r$) einer vorherigen Generation. In jedem Fall liegt also a in einem der W_k , was zu zeigen war.

6.6. Satz. *Jede offene und jede abgeschlossene Menge ist messbar. Jede kompakte und jede beschränkte offene Menge ist integrierbar.*

Beweis. Das folgt sofort aus dem Ausschöpfungslemma, aus Satz 6.2 und der Tatsache, dass die abgeschlossenen Mengen genau die Komplemente der offenen Mengen sind.

6.7. Lemma. *Sei P ein kompakter Quader und $(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von P . Dann gibt es eine Unterteilung $(P_j)_{j \in F}$ von P mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $j \in F$ gibt es ein $\lambda \in \Lambda$ mit $P_j \subset U_\lambda$.*

Beweis. Zu jedem $x \in P$ wähle ein $\lambda(x) \in \Lambda$ mit $x \in U_{\lambda(x)}$. Weil $U_{\lambda(x)}$ offen ist, gibt es ein $\varrho(x) > 0$ mit $B_{\varrho(x)}(x) \subset U_{\lambda(x)}$. Sei $(\xi_j, P_j)_{j \in F}$ eine ϱ -feine Zerlegung von P . Dann gilt $P_j \subset B_{\varrho(\xi_j)}(\xi_j) \subset U_{\lambda(\xi_j)}$ für alle $j \in F$.

6.8. Approximationslemma für beschränkte messbare Mengen. *Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine beschränkte messbare Menge. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $U \supset M$ mit $\mu(U) \leq \mu(M) + \varepsilon$, und eine kompakte Menge $K \subset M$ mit $\mu(K) \geq \mu(M) - \varepsilon$.*

Beweis. Wähle einen kompakten Quader Q mit $M \subset Q^\circ$. Wähle eine positive Funktion ϱ auf Q derart, dass $|S_Z(\chi_M) - \mu(M)| < \varepsilon/2$ für jede Zerlegung $Z \prec \varrho$ von Q . Für jedes $a \in M$ sei $U_a = Q^\circ \cap B_{\varrho(a)}(a)$, und sei $U = \bigcup_{a \in M} U_a$. Dann ist U offen und $M \subset U \subset Q^\circ$. Schreibe $U = \bigcup_1^\infty W_k$ wie im Ausschöpfungslemma 6.5, und unterteile jedes W_k wie in Lemma 6.7 in endlich viele Quader, von denen jeder in einem geeigneten U_a enthalten ist. Das ergibt abzählbar viele fast disjunkte Quader Q_1, Q_2, \dots mit $\bigcup_1^\infty Q_i = U$ und der Eigenschaft, dass es zu jedem $i \in \mathbf{N}$ ein $\xi_i \in M$ gibt mit $Q_i \subset U_{\xi_i} \subset B_{\varrho(\xi_i)}(\xi_i)$. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ ist dann die Familie $(\xi_i, Q_i)_{i=1, \dots, k}$

eine ϱ -feine partielle Zerlegung von Q . Also folgt nach dem Lemma von Henstock 4.3 und wegen $\chi_M(\xi_i) = 1$, dass

$$\sum_{i=1}^k \int_{Q_i} |\chi_M - 1| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Nun ist aber

$$\int_{Q_i} |\chi_M - 1| = \int_{Q_i} (1 - \chi_M) = \mu(Q_i) - \mu(M \cap Q_i),$$

und nach 6.2 gilt

$$\mu(M) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M \cap Q_i) \quad \text{sowie} \quad \mu(U) = \sum_1^{\infty} \mu(Q_i).$$

Hieraus folgt die erste Behauptung.

Zum Beweis der zweiten wenden wir das soeben Bewiesene auf die Menge $Q \setminus M$ an. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es also eine offene Menge $V \supset Q \setminus M$ mit $\mu(V) \leq \mu(Q \setminus M) + \varepsilon$. Setze $K = Q \setminus V$. Dann ist K eine kompakte Teilmenge von M , und $\mu(K) = \mu(Q) - \mu(Q \cap V) \geq \mu(Q) - \mu(V) \geq \mu(Q) - \mu(Q \setminus M) - \varepsilon = \mu(M) - \varepsilon$.

In den nächsten beiden Sätzen geben wir „elementare“ Charakterisierungen von Nullmengen und messbaren Mengen; elementar in dem Sinne, dass sie sich nur mit Hilfe von topologischen Begriffen und dem Inhalt von Quadern ausdrücken lassen. Sie sind wichtig für das Verhalten von Nullmengen und messbaren Mengen unter Abbildungen, und damit, im §8, für die Transformationsformel.

6.9. Satz (Charakterisierung der Nullmengen). Für eine Teilmenge $N \subset \mathbf{R}^n$ sind äquivalent:

- (i) N ist eine Nullmenge;
- (ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es abzählbare viele fast disjunkte kompakte Würfel W_1, W_2, \dots , sodass $N \subset \bigcup_1^{\infty} W_k$ und $\sum_1^{\infty} \mu(W_k) \leq \varepsilon$;
- (iii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es abzählbare viele messbare Mengen M_1, M_2, \dots , sodass $N \subset \bigcup_1^{\infty} M_k$ und $\sum_1^{\infty} \mu(M_k) \leq \varepsilon$.

Falls N in einer offenen Menge V enthalten ist, so können die W_k in (ii) ebenfalls in V gewählt werden.

Beweis. (i) \implies (ii) : Sei N in einer offenen Menge V enthalten. Schöpfe $V = \bigcup_1^{\infty} Q_j$ durch abzählbar viele fast disjunkte Würfel wie in 6.5 aus. Dann ist $N \cap Q_j$ eine beschränkte Nullmenge. Also gibt es nach 6.8 offene Mengen $U_j \supset N \cap Q_j$ mit $\mu(N \cap Q_j) \leq \varepsilon/2^j$, und nach Ersetzen von U_j durch $U_j \cap V$ können wir $U_j \subset V$ annehmen. Sei W_1, W_2, \dots eine Ausschöpfung von $U = \bigcup_1^{\infty} U_j$ durch fast disjunkte kompakte Würfel. Dann ist $N \subset U$ und $\sum_1^{\infty} \mu(W_k) = \mu(U) \leq \sum_1^{\infty} \mu(U_j) \leq \sum_1^{\infty} \varepsilon/2^j = \varepsilon$.

(ii) \implies (iii) : Klar.

(iii) \implies (i) : Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ seien die M_k wie in (iii). Nach Satz 6.2(d) ist dann die Vereinigung $V_\varepsilon := \bigcup_1^{\infty} M_k$ messbar, und wegen $\mu(M_1 \cup \dots \cup M_k) \leq \mu(M_1) + \dots + \mu(M_k) \leq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbf{N}$ und 6.2.5 ist $\mu(V_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Indem wir diese Konstruktion für jedes $\varepsilon = 1/k$ durchführen, erhalten wir eine Folge $N_k := V_{1/k}$ messbarer Mengen mit $N \subset N_k$ und $\mu(N_k) \leq 1/k$. Nun sei $D = \bigcap_1^{\infty} N_k$. Dann ist D nach Satz 6.2(c) messbar, und wegen $\mu(N_1 \cap \dots \cap N_k) \leq \mu(N_k) \leq 1/k$ und 6.2.4 ist D eine Nullmenge. Also ist auch N als Teilmenge von D eine Nullmenge.

6.10. Satz (Charakterisierung der messbaren Mengen). Für eine Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^n$ sind äquivalent:

- (i) M ist messbar;
- (ii) M lässt sich darstellen als Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Mengen und einer Nullmenge.

Beweis. (i) \implies (ii) : Sei M messbar und zunächst beschränkt. Wähle zu $\varepsilon = 1/j$ kompakte Teilmengen $K_j \subset M$ mit $\mu(K_j) \geq \mu(M) - 1/j$ wie im Approximationslemma 6.8. Sei M' die Vereinigung der K_j . Nach 6.2 ist M' messbar und

$$\mu(M) \geq \mu(M') \geq \mu(K_j) \geq \mu(M) - \frac{1}{j},$$

für alle j . Also gilt $\mu(M) = \mu(M')$ und somit ist $N = M \setminus M'$ eine Nullmenge.

Im allgemeinen Fall sei $\mathbf{R}^n = \bigcup_1^\infty Q_k$ eine Ausschöpfung des \mathbf{R}^n durch kompakte Quader. Nach dem soeben Bewiesenen gibt es kompakte Mengen K_{jk} und Nullmengen N_k , sodass $M \cap Q_k = N_k \cup \bigcup_{j=1}^\infty K_{jk}$. Die Vereinigung N der N_k ist nach 5.10(c) eine Nullmenge. Damit folgt die Behauptung nach geeigneter Durchnummerierung der K_{jk} .

(ii) \implies (i) : Nach 6.2 und 6.6 ist jede Menge der angegebenen Art messbar.

6.11. Lemma von Lindelöf. Jede offene Überdeckung einer beliebigen Menge $M \subset \mathbf{R}^n$ enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

Beweis. Seien \mathcal{U} eine Familie von offenen Mengen mit $M \subset \bigcup \mathcal{U}$. Zu jedem $a \in M$ wähle ein $U_a \in \mathcal{U}$ mit $a \in U_a$. Weil U_a offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(a) \subset U_a$. Weil die rationalen Zahlen dicht in \mathbf{R} sind, gibt es einen rationales $b \in \mathbf{Q}^n \cap B_{\varepsilon/2}(a)$ und ein positives rationales $\delta \leq \varepsilon/2$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung, dass $a \in B_\delta(b) \subset B_\varepsilon(a)$. Damit haben wir jedem $a \in M$ einen rationalen Würfel $W(a) := B_\delta(b)$ (also einen Würfel mit rationalem Mittelpunkt und Radius) zugeordnet, sodass $a \in W(a) \subset U_a$. Nun gibt es insgesamt nur abzählbar viele rationale Würfel. Sei W_1, W_2, \dots eine Aufzählung derjenigen unter ihnen, die von der Form $W(a)$ mit $a \in M$ sind, und sei für jedes $k \in \mathbf{N}$ ein $a_k \in M$ gewählt mit $W_k = W(a_k)$. Dann ist $(U_{a_k})_{k \in \mathbf{N}}$ die gesuchte abzählbare Teilüberdeckung.

6.12. Satz. Sei $N \subset \mathbf{R}^n$ eine Nullmenge und sei $\Phi : N \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine lokal dehnungsbeschränkte (zum Beispiel stetig differenzierbare) Abbildung. Dann ist auch $\Phi(N)$ eine Nullmenge.

Beweis. Wir beweisen erst eine lokale Aussage:

Zu jedem $a \in N$ gibt es eine offene Umgebung V_a , sodass $\Phi(N \cap V_a)$ eine Nullmenge ist.

Weil Φ lokal dehnungsbeschränkt ist, gibt es eine offene Umgebung V_a von a , sodass Φ auf $N \cap V_a$ einer Lipschitzbedingung genügt; etwa $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in N \cap V_a$. Wir behaupten: Ist $W = \overline{B_r(c)} \subset V_a$ ein kompakter Würfel vom Radius r und Mittelpunkt c , dann ist $\Phi(W \cap N)$ in einem kompakten Würfel W' vom Radius $2Lr$ enthalten. Zum Beweis können wir offenbar $W \cap N$ nicht leer annehmen. Seien x_0 und x in $W \cap N$. Dann gilt $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leq L|x - x_0| \leq L \cdot 2r$, denn der Durchmesser von W ist $2r$. Also ist $\Phi(W \cap N)$ im Würfel mit dem Mittelpunkt $\Phi(x_0)$ und dem Radius $2Lr$ enthalten.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil $N \cap V_a$ als Teilmenge von N eine Nullmenge ist, gibt es nach Satz 6.9(a) abzählbar viele kompakte Würfel $W_k \subset V_a$, die $N \cap V_a$ überdecken

und deren Inhaltssumme kleiner als ε ist. Dann ist $\Phi(N \cap V_a) = \bigcup_1^\infty \Phi(W_k \cap N) \subset \bigcup_1^\infty W'_k$, wobei W'_k ein Würfel mit dem $2L$ -fachen des Radius von W_k ist. Es folgt $\mu(W'_k) = (2L)^n \cdot \mu(W_k)$ und somit $\sum_1^\infty \mu(W'_k) = \sum_1^\infty (2L)^n \mu(W_k) \leq (2L)^n \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt 6.9(b), dass $\Phi(N \cap V_a)$ eine Nullmenge ist.

Der eigentliche Beweis des Satzes folgt nun leicht aus Lemma 6.11. Die offene Überdeckung $(V_a)_{a \in N}$ von N hat eine abzählbare Teilüberdeckung, etwa $N \subset \bigcup_{k=1}^\infty V_{a_k}$. Dann ist aber

$$\Phi(N) = \bigcup_{k=1}^\infty \Phi(N \cap V_{a_k}).$$

eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen und damit wegen 5.10(c) selber eine Nullmenge.

6.13. Korollar. Sei $p < n$, sei $P \subset \mathbf{R}^p$ eine beliebige Menge, und sei $F: P \rightarrow \mathbf{R}^n$ lokal dehnungsbeschränkt. Dann ist $F(P)$ eine Nullmenge im \mathbf{R}^n .

Beweis. Identifiziere \mathbf{R}^n mit $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n-p}$ und setze $N = P \times \{0\} \subset \mathbf{R}^n$. Dann ist N eine Nullmenge im \mathbf{R}^n , die Abbildung $\Phi = F \circ \text{pr}_1: N \rightarrow \mathbf{R}^n$ ist lokal dehnungsbeschränkt, und $\Phi(N) = F(P)$.

Wir bemerken hier, dass dies für stetige, aber nicht dehnungsbeschränkte Abbildungen falsch ist. Zum Beispiel gibt es stetige Abbildungen von $[0, 1]$ in den \mathbf{R}^2 , deren Bild das abgeschlossene Einheitsquadrat ist.

6.14. Korollar. Das Bild einer messbaren Menge unter einer lokal dehnungsbeschränkten (zum Beispiel stetig differenzierbaren) Abbildung ist wieder messbar.

Das folgt sofort aus 6.10 und 6.12 und der Tatsache, dass die Bilder kompakter Mengen unter stetigen Abbildungen wieder kompakt sind.

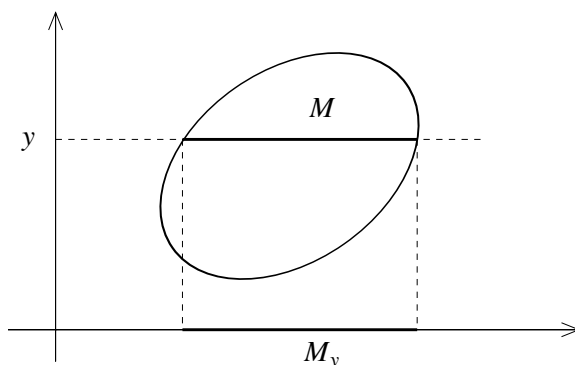
§7. Integration über messbare Mengen

Übersicht. In Verallgemeinerung der Paragraphen 2 und 5 behandeln wir die Integration über messbare Mengen, insbesondere die Berechnung des Maßes einer messbaren Menge. Wichtig ist die Integrierbarkeit stetiger Funktionen auf kompakten Mengen und beschränkter stetiger Funktionen auf beschränkten offenen Mengen (7.6). Schließlich beweisen wir, mit Hilfe der Konvergenzsätze, Aussagen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit parameterabhängige Integrale, die in vielen Gebieten (Funktionentheorie, Fourieranalysis, Integraltransformationen) Anwendung finden.

7.1. Das Cavalierische Prinzip. Zur Berechnung des Maßes einer messbaren Menge M von endlichem Maß verwendet man den Satz von Fubini. Dazu sei $f = \chi_M \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ und $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$. Dann ist für jedes $y \in \mathbf{R}^q$ die Funktion $f^y: x \mapsto f(x, y)$ die charakteristische Funktion der horizontalen Schnittmenge

$$M^y = \{x \in \mathbf{R}^p : (x, y) \in M\} = \text{pr}_1(M \cap (\mathbf{R}^p \times \{y\}))$$

in der Höhe y :



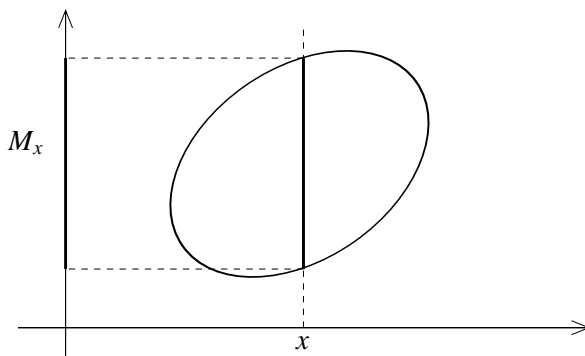
Nehmen wir an, dass alle diese M^y integrierbar sind. Zum Beispiel wird das der Fall sein, wenn M kompakt oder offen und beschränkt ist, (und nach dem verbesserten Satz von Fubini 5.15 ist es sogar für fast alle y automatisch richtig). Dann gilt nach 5.7

$$\int_{\mathbf{R}^n} \chi_M = \mu(M) = \int_{\mathbf{R}^q} \mu(M^y) dy. \quad (1)$$

Diese Formel heißt das *Cavalierische Prinzip*. Hierbei kann man natürlich die Rollen von p und q vertauschen, und bekommt dann analog

$$\mu(M) = \int_{\mathbf{R}^p} \mu(M_x) dx, \quad (2)$$

wobei jetzt $M_x = \{y \in \mathbf{R}^q : (x, y) \in M\}$ die vertikale Schnittmenge über $x \in \mathbf{R}^p$ ist:



7.2. Beispiele. (a) Sei $K = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Für $-1 \leq y \leq 1$ ist $K^y = [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$, also $\mu(K^y) = 2\sqrt{1-y^2}$, und daher

$$\mu(K) = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-y^2} dy = 4 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

(b) Das Volumen einer kompakten Pyramide P im \mathbf{R}^3 mit der Höhe h und der Bodenfläche F . Die Schnittmenge in der Höhe z geht aus der Bodenfläche durch

eine Homothetie mit dem Faktor $1 - z/h$ hervor und hat daher nach 6.1.2 die Fläche $F \cdot (1 - \frac{z}{h})^2$. Folglich ist

$$\mu(P) = F \int_0^h (1 - \frac{z}{h})^2 dz = \frac{1}{3} F \cdot h.$$

Allgemeiner zeigt man, dass die Pyramide im \mathbf{R}^{n+1} mit dem n -dimensionalen Bodeninhalt B und der Höhe h das $n + 1$ -dimensionale Volumen $Bh/(n + 1)$ hat.

(c) *Das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel.* Wir bezeichnen mit τ_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitsvollkugel $K = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq 1\}$. Sei $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}$ und sei K^t die Schnittmenge von K in der Höhe t . Dann ist K^t die $(n - 1)$ -dimensionale Vollkugel vom Radius $\sqrt{1 - t^2}$. Wegen des Verhaltens des Maßes bei Homothetien ist also

$$\mu(K^t) = (\sqrt{1 - t^2})^{n-1} \cdot \tau_{n-1}.$$

Damit bekommt man aus 7.1.1 die Rekursionsformel

$$\tau_n = \tau_{n-1} \cdot \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt.$$

Nun gilt, mit der Substitution $t = \sin \varphi$,

$$c_n := \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} \pi \cdot \prod_{m=1}^k \frac{2m-1}{2m} & \text{falls } n = 2k, \\ 2 \cdot \prod_{m=1}^k \frac{2m}{2m+1} & \text{falls } n = 2k+1. \end{cases}$$

Damit erhält man $c_n \cdot c_{n-1} = 2\pi/n$, und folglich $\tau_n = \frac{2\pi}{n} \tau_{n-2}$. Ferner ist $\tau_1 = 2$ und $\tau_2 = \pi$ nach Beispiel (a). Es folgt durch Induktion

$$\tau_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \tau_{2k+1} = \frac{2^{k+1} \pi^k}{1 \cdot 3 \cdots (2k+1)}.$$

7.3. Definition (Integral über messbare Mengen). Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine messbare Menge. Eine Funktion f auf M heißt (über M) *integrierbar*, wenn die Nullfortsetzung \tilde{f} über \mathbf{R}^n integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_M f := \int \tilde{f}.$$

Die Menge der über M integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(M)$. Wir werden meist zwischen f und seiner Nullfortsetzung \tilde{f} nicht unterscheiden, und damit $\mathcal{L}^1(M)$ als den Untervektorraum aller Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ auffassen, die auf $\mathbb{C}M$ verschwinden. Dann ist

$$\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n) = \mathcal{L}^1(M) \oplus \mathcal{L}^1(\mathbb{C}M) \quad (1)$$

(direkte Summe der Untervektorräume). In der Tat besteht der Durchschnitt der Untervektorräume in (1) klarerweise nur aus der Nullfunktion. Wegen der Messbarkeit von M ist χ_M lokal integrierbar, und offenbar beschränkt. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ beliebig. Nach 5.2(c) ist die Funktion $f\chi_M$ integrierbar und verschwindet ausserhalb M , gehört also zu $\mathcal{L}^1(M)$. Analog gilt $f\chi_{\mathcal{C}M} = f(1 - \chi_M) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{C}M)$. Daher ist $f = f\chi_M + f\chi_{\mathcal{C}M}$ in der rechten Seite von (1) enthalten.

Die Konvergenzsätze 5.6 gelten für $\mathcal{L}^1(M)$ ebenso wie für $\mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$. Der Beweis ergibt sich sofort aus 5.6 und der trivialen Bemerkung, dass der punktweise Limes einer Folge von Funktionen, die ausserhalb M verschwinden, auch wieder diese Eigenschaft hat.

Der folgende Satz gibt einige allgemeine Regeln für das Integral über messbare Mengen.

7.4. Satz. *Seien M_1, M_2, \dots messbare Mengen im \mathbf{R}^n .*

(a) *Ist f über M_2 integrierbar und ist $M_1 \subset M_2$, dann ist f auch über M_1 und $M_2 \setminus M_1$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_{M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2 \setminus M_1} f. \quad (1)$$

(b) *Ist f über M_1 und M_2 integrierbar, dann auch über $M_1 \cap M_2$ und über $M_1 \cup M_2$, und es gilt*

$$\int_{M_1 \cup M_2} f + \int_{M_1 \cap M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f. \quad (2)$$

(c) *Ist f über M_1 integrierbar, dann auch über $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$, und es gilt*

$$\int_D f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{M_1 \cap \dots \cap M_k} f. \quad (3)$$

(d) *Sei $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist über V integrierbar;*

(ii) *f ist über jedes M_k integrierbar und $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{M_1 \cup \dots \cup M_k} |f| < \infty$.*

In diesem Fall gilt

$$\int_V f = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{M_1 \cup \dots \cup M_k} f. \quad (4)$$

(e) *Sei $M_j \cap M_k$ eine Nullmenge für $j \neq k$. Dann sind äquivalent:*

(i) *f ist über V integrierbar;*

(ii) *f ist über jedes M_k integrierbar und $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} |f| < \infty$.*

In diesem Fall gilt

$$\int_V f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{M_k} f. \quad (5)$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Nullfortsetzung von f auf ganz \mathbf{R}^n wieder mit f .

(a) Es ist $f \cdot \chi_{M_2} \in \mathcal{L}^1$, und wegen $M_1 \subset M_2$ ist $f\chi_{M_1} = (f\chi_{M_2})\chi_{M_1}$. Also ist $f\chi_{M_1} \in \mathcal{L}^1$ nach 5.2(c). Daher ist auch $f \cdot \chi_{M_2 \setminus M_1} = f\chi_{M_2} - f\chi_{M_1} \in \mathcal{L}^1$, und (1) folgt durch Integration dieser Gleichung.

(b) Nach (a) ist f über $M_1 \cap M_2$ integrierbar, und daher wegen $f\chi_{M_1 \cup M_2} + f\chi_{M_1 \cap M_2} = f\chi_{M_1} + f\chi_{M_2}$ auch über $M_1 \cup M_2$. Wieder folgt (2) durch Integration.

(c) Nach Satz 6.2(c) ist D messbar, also ist f nach (a) über D integrierbar. Sei $D_k = M_1 \cap \dots \cap M_k$. Dann gilt $f \chi_D = \lim_{k \rightarrow \infty} f \chi_{D_k}$ punktweise und $|f \chi_{D_k}| \leq |f \chi_{D_1}| \in \mathcal{L}^1$. Also folgt die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz 5.6(b).

(d) Sei $V_k = M_1 \cup \dots \cup M_k$. Zum Beweis von (i) \implies (ii) sei f über V integrierbar. Nach (a) ist dann f über jedes M_k und V_k integrierbar, und es gilt $f \chi_V = \lim_{k \rightarrow \infty} f \chi_{V_k}$ und $|f \chi_{V_k}| \leq |f \chi_V| \in \mathcal{L}^1$. Also folgt (ii) und (4) aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

Zum Beweis von (ii) \implies (i) genügt es nach Zerlegung von f in positiven und negativen Anteil den Fall $f \geq 0$ zu behandeln. Wegen (b) ist f über jedes V_k integrierbar, und die $f \chi_{V_k}$ konvergieren monoton wachsend gegen $f \chi_V$. Nun folgt die Behauptung aus dem Satz von der monotonen Konvergenz.

(e) Sei f über alle M_k integrierbar. Wegen 5.10(d) ist dann $f \chi_{M_1 \cap M_2}$ unwesentlich. Also gilt $\int_{M_1 \cup M_2} f = \int_{M_1} f + \int_{M_2} f$ nach (2), und durch Induktion zeigt man leicht, dass

$$\int_{V_k} f = \sum_{i=1}^k \int_{M_i} f.$$

Damit ist (e) ein Spezialfall von (d).

7.5. Satz. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ messbar und f eine nicht negative Funktion auf M . Dann sind äquivalent:

- (i) $f \in \mathcal{L}^1(M)$;
- (ii) Die Ordinatenmenge $O(f) = \{(x, y) : x \in M, 0 \leq y \leq f(x)\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ist integrierbar.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist

$$\int_M f = \mu(O(f)). \quad (1)$$

Beweis. Wir reduzieren dies erst auf den Fall $M = \mathbf{R}^n$. Dazu sei \tilde{f} die Nullfortsetzung von f . Dann gilt für die Ordinatenmengen $O(\tilde{f}) = O(f) \cup (\mathbf{R}^n \setminus M) \times \{0\}$. Daher ist $O(\tilde{f}) \setminus O(f)$ als Teilmenge einer Hyperebene eine Nullmenge im \mathbf{R}^{n+1} , und somit ist die Integrierbarkeit der Ordinatenmengen von f und \tilde{f} äquivalent und sie haben dasselbe Maß. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $M = \mathbf{R}^n$ annehmen.

Nun sei $f \in \mathcal{L}^1$. Sei $Q_1 \subset Q_2 \subset \dots$ eine Ausschöpfung des \mathbf{R}^n durch aufsteigende Quader, und sei $f_k = \min(f, k)|_{Q_k}$. Dann ist $O(f) = \bigcup_{k=1}^{\infty} O(f_k)$, und die $O(f_k)$ sind aufsteigend und nach Satz 3.9 integrierbar mit $\mu(O(f_k)) = \int_{Q_k} f_k \leq \int f < \infty$. Daher folgt die Integrierbarkeit von $O(f)$ aus 6.2(d).

Sei umgekehrt $O(f)$ integrierbar. Dann ist für jedes x die vertikale Schnittmenge $O(f)_x = [0, f(x)]$, mit Maß $f(x)$. Also folgt die Integrierbarkeit von f und die Formel (1) aus dem Cavalierischen Prinzip 7.1.2.

7.6. Satz. (a) Eine stetige Funktion f auf einer kompakten Menge K ist integrierbar.

(b) Eine stetige beschränkte Funktion auf einer offenen Menge U von endlichem Maß ist integrierbar.

Beweis. (a) Durch Zerlegung von f in positiven und negativen Anteil sieht man, dass es ausreicht, die Behauptung im Fall $f \geq 0$ zu beweisen. Dazu genügt es wegen

Satz 7.5 und Satz 6.6, dass die Ordinatenmenge $O(f)$ kompakt ist. Sei f auf K durch die Konstante $C > 0$ beschränkt. Wir müssen zeigen, dass jede Folge $(a_k, b_k) \in O(f)$ eine gegen einen Punkt in $O(f)$ konvergente Teilfolge besitzt. Wegen der Kompaktheit von K kann man (eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge) annehmen, dass die Folge (a_k) gegen einen Punkt $a \in K$ konvergiert. Dann gilt $0 \leq b_k \leq f(a_k) \leq C$. Also ist die Folge (b_k) beschränkt und hat demnach eine konvergente Teilfolge (b_{k_j}) , etwa mit Limes b . Dann ist aber, wieder wegen der Stetigkeit von f , $0 \leq b = \lim_{j \rightarrow \infty} b_{k_j} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f(a_{k_j}) = f(a)$ und somit $(a, b) \in O(f)$.

(b) Schöpfe U durch abzählbar viele kompakte fast disjunkte W_k Würfel wie in 6.5 aus. Dann ist f über jedes W_k nach (a) (oder 2.9) integrierbar, und wegen der Beschränktheit von f (etwa durch C) und U gilt $\sum_1^\infty \int_{W_k} |f| \leq C \sum_1^\infty \mu(W_k) = C\mu(U) < \infty$. Also folgt die Behauptung aus 7.4(e).

Bemerkung. Die Schwierigkeit im Beweis von (a) kommt daher, dass f nur auf K definiert und stetig vorausgesetzt wird. Wenn man wüsste, dass sich f zu einer stetigen beschränkten und somit lokal integrierbaren Funktion f^* auf ganz \mathbf{R}^n fortsetzen lässt, dann könnte man einfacher so schließen: Die Funktion χ_K ist integrierbar nach 6.6. Also ist $f^* \cdot \chi_K$ nach 5.2(c) integrierbar, und das ist schon die Behauptung. Die stetige Fortsetzbarkeit von f ist zwar richtig, aber keineswegs trivial, siehe Lehrbücher der Topologie unter dem Stichwort Tietzescher Fortsetzungssatz.

7.7. Verallgemeinertes Cavalierisches Prinzip. Zur Berechnung von Integralen stetiger Funktionen über eine kompakte Menge K verwendet man oft den Satz von Fubini 5.7. Das ist möglich, weil die partiellen Funktionen $f^y = f(-, y)$ bzw. $f_x = f(x, -)$ auf den kompakten Schnittmengen K^y bzw. K_x stetig und daher nach Satz 7.6(a) integrierbar sind. Dann lautet das sogenannte verallgemeinerte Cavalieri-sche Prinzip:

$$\int_K f = \int_{\text{pr}_2(K)} \left(\int_{K^y} f(x, y) dx \right) dy. \quad (1)$$

Der Beweis ergibt sich sofort aus dem Satz von Fubini, weil ja, wenn \tilde{f} die Nullfortsetzung von f bezeichnet,

$$\begin{aligned} \int_K f &= \int_{P \times Q} \tilde{f} = \int_Q \left(\int_P \tilde{f}(x, y) dx \right) dy = \int_Q \left(\int_{K^y} \tilde{f}(x, y) dx \right) \\ &= \int_{\text{pr}_2(K)} \left(\int_{K^y} f(x, y) dx \right) dy. \end{aligned}$$

Natürlich kann man dabei die Rollen von P und Q vertauschen, und hat dann die Formel

$$\int_K f = \int_{\text{pr}_1(K)} \left(\int_{K_x} f(x, y) dy \right) dx. \quad (2)$$

7.8. Beispiel. Sei $K \subset \mathbf{R}^2$ durch

$$K = \left\{ (x, y) : x \leq y \leq 2, y \geq \frac{1}{x} \right\}$$

definiert, und $f(x, y) = x^2 + y^2$. Hier sind die horizontalen Schnittmengen durch $K^y = \left[\frac{1}{y}, y \right]$ gegeben und es ist $\text{pr}_2(K) = [1, 2]$ (Skizze!). Entsprechend erhält man

$$\int_K f = \int_1^2 \left(\int_{1/y}^y (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{1}{3y^3} + y^2 \left(y - \frac{1}{y} \right) \right) dy = \dots$$

Dagegen ist $\text{pr}_1(K) = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ und die vertikalen Schnittmengen sind

$$K_x = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}, 2\right] & \text{falls } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \\ [x, 2] & \text{falls } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Zur Berechnung des Integrals unter Verwendung der vertikalen Schnittmengen zerlegt man am besten $K = K' \cup K''$, wobei K' bzw. K'' die links bzw. rechts von der vertikalen Geraden $x = 1$ liegenden Anteile sind. Dann ist $K' \cap K''$ eine Nullmenge und folglich

$$\begin{aligned} \int_K f &= \int_{K'} f + \int_{K''} f = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \left(\int_{\frac{1}{x}}^2 (x^2 + y^2) dy \right) + \int_1^2 dx \left(\int_x^2 (x^2 + y^2) dy \right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2x^2 - x + \frac{8}{3} - \frac{1}{3x^3} \right) dx + \int_1^2 \left(2x^2 - x^3 + \frac{8}{3} - \frac{x^3}{3} \right) dx = \dots \end{aligned}$$

Als Nächstes verwenden wir die Konvergenzsätze, um Stetigkeit und Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen unter relativ schwachen Voraussetzungen zu beweisen.

7.9. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$, sei $M \subset \mathbf{R}^p$ messbar, und sei $f : U \times M \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes feste $t \in M$ ist die Funktion $x \mapsto f(x, t)$ stetig auf U ;
- (ii) für jedes feste $x \in U$ ist die Funktion $t \mapsto f(x, t)$ über M integrierbar;
- (iii) zu jedem $a \in U$ gibt es eine Umgebung U_a und eine Funktion $h_a \in \mathcal{L}^1(M)$ mit $|f(x, t)| \leq h_a(t)$ für alle $(x, t) \in U_a \times M$.

Dann ist die Funktion

$$g(x) := \int_M f(x, t) dt \quad (1)$$

auf U stetig.

Beweis. Sei (x_k) eine Folge in U mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in U$. Zu zeigen ist $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g(a)$. Setze $f_k(t) := f(x_k, t)$ und $\bar{f}(t) := f(a, t)$. Dann gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \bar{f}$ punktweise wegen (i), und die Funktionen \bar{f} und f_k sind in $\mathcal{L}^1(M)$ wegen (ii). Ferner ist $x_k \in U_a$ für alle genügend großen k und daher $|f_k| \leq h_a$ wegen (iii). Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz 5.6(b) folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k = \int_M \bar{f} = g(a).$$

7.10. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, sei $M \subset \mathbf{R}^p$ messbar, und sei $f : U \times M \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $t \in M$ ist $x \mapsto f(x, t)$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion auf U ;
- (ii) für alle $x \in U$ ist $t \mapsto f(x, t)$ in $\mathcal{L}^1(M)$;
- (iii) zu jedem $a \in U$ gibt es eine Umgebung U_a und eine Funktion $h_a \in \mathcal{L}^1(M)$ mit $|(\partial f / \partial x^i)(x, t)| \leq h_a(t)$, für alle $(x, t) \in U_a \times M$, $i = 1, \dots, n$.

Dann ist die Funktion 7.9.1 stetig differenzierbar auf U , und man bekommt ihre partiellen Ableitungen durch Differenzieren unter dem Integralzeichen:

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \int_M \frac{\partial f}{\partial x^i}(x, t) dt. \quad (1)$$

Beweis. Sei $a \in U$, sei (λ_k) eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_k \neq 0$ und $\lim \lambda_k = 0$, und $a + \lambda_k e_i \in U_a$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Hier bezeichnet e_i den i -ten Einheitsvektor. Definiere

$$f_k(t) := \frac{f(a + \lambda_k e_i, t) - f(a, t)}{\lambda_k}$$

für alle $t \in M$. Dann ist $f_k \in \mathcal{L}^1(M)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = (\partial f / \partial x^i)(a, t)$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist ferner

$$f_k(t) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a + \vartheta \lambda_k e_i, t),$$

mit $\vartheta = \vartheta(k, t) \in [0, 1]$. Daher folgt $|f_k(t)| \leq h_a(t)$ wegen (iii). Da $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = (\partial f / \partial x^i)(a, -)$ punktweise und $|f_k| \leq h_a \in \mathcal{L}^1(M)$, folgt nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz $(\partial f / \partial x^i)(a, -) \in \mathcal{L}^1(M)$ und

$$\begin{aligned} \int_M \frac{\partial f}{\partial x^i}(a, t) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M f_k(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M \frac{f(a + \lambda_k e_i, t) - f(a, t)}{\lambda_k} dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g(a + \lambda_k e_i) - g(a)}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Die Folge λ_k war beliebig. Daher ist g an der Stelle a partiell nach x^i differenzierbar, und es gilt (1). Da $a \in U$ beliebig war, ist g partiell differenzierbar. Die Stetigkeit der partiellen Ableitungen folgt nach Satz 7.9 aus der Stetigkeit der $\partial f / \partial x^i$.

7.11. Beispiele. (a) Auswertung des Integrals

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} \cdot e^{-ixt} dt. \quad (1)$$

Im nächsten Paragraphen werden wir zeigen (8.7(b)), dass

$$g(0) = \int_{\mathbf{R}} e^{-t^2/2} dt = \int_{\mathbf{R}} e^{-u^2} \sqrt{2} du = \sqrt{2\pi}. \quad (2)$$

Die Idee zur Auswertung von (1) besteht darin, eine Differentialgleichung für g herzuleiten und diese dann unter Verwendung der Anfangsbedingung (2) zu lösen. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-t^2/2} (-it) e^{-ixt},$$

und daher $|\partial f / \partial x| = |t| \cdot e^{-t^2/2}$. Diese Funktion ist über \mathbf{R} integrierbar. Also folgt nach 7.10.1

$$g'(x) = \int_{\mathbf{R}} (-it) e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_{-R}^R t e^{-t^2/2} e^{-ixt} dt = \left(-e^{-t^2/2} e^{-ixt} \right) \Big|_{-R}^R + \int_{-R}^R e^{-t^2/2} (-ix) e^{-ixt} dt.$$

Für $R \rightarrow \infty$ strebt dies gegen $(-ix)g(x)$. Also erfüllt g die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$g'(x) = (-i)(-ix)g(x) = -xg(x),$$

mit der allgemeinen Lösung $g(x) = Ce^{-x^2/2}$. Wegen der Anfangsbedingung (2) folgt

$$g(x) = \sqrt{2\pi} \cdot e^{-x^2/2}. \quad (3)$$

(b) Das vorige Beispiel ist ein Spezialfall der sogenannten *Fouriertransformation*. Diese ist für eine beliebige Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{C})$ definiert durch

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{-i\langle x, t \rangle} dt.$$

Hierbei sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt. Das Integral existiert, weil $e^{-i\langle x, t \rangle}$ den Betrag 1 hat. Nach Satz 7.9 ist \hat{f} stetig, nach Satz 7.10 ist \hat{f} stetig differenzierbar, falls die Funktion $\|t\| |f(t)|$ noch in \mathcal{L}^1 ist, usw. für die höheren Ableitungen. Die Formel (3) besagt dann gerade, dass die Funktion $e^{-x^2/2}$ gleich ihrer eigenen Fouriertransformierten ist.

(c) *Auswertung des Integrals*

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt \quad (x > 0).$$

Mit den Bezeichnungen von Satz 7.9 ist jetzt $U = M =]0, \infty[$. Es ist leicht zu sehen, dass die stetige Funktion $\sin t/t$ auf U durch 1 beschränkt ist (unterscheide die Fälle $0 < t \leq 1$ und $t > 1$). Für $a \in U$ gilt daher

$$\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq h_a(t) := e^{-at/2}$$

für alle $x \in U_a :=]a/2, \infty[$, und es ist $h_a \in \mathcal{L}^1(M)$. Ähnlich gilt für die Ableitung

$$\left| \frac{d}{dx} \left(e^{-xt} \cdot \frac{\sin t}{t} \right) \right| = \left| (-t) \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot e^{-xt} \right| \leq e^{-xt} \leq h_a(t)$$

für alle $x \in U_a$. Also ist $g \in \mathcal{C}^1(U)$, und für die Ableitung gilt

$$g'(x) = \int_0^\infty (-\sin t) e^{-xt} dt.$$

Dies lässt sich auswerten, entweder durch zweimalige Produktintegration oder besser komplex. Das Ergebnis ist (Aufgabe!)

$$\int_0^\infty (-\sin t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2},$$

und durch Integration folgt

$$g(x) = C - \arctan x.$$

Zur Bestimmung von C betrachten wir den Limes für $x \rightarrow \infty$. Der Arcustangens strebt dabei gegen $\pi/2$. Andererseits ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = 0;$$

denn für jede Folge $a_k \rightarrow \infty$ ist die Funktion $f_k(t) := e^{-a_k t} \cdot (\sin t/t)$ über $]0, \infty[$ integrierbar, die f_k gehen punktweise gegen Null, und $|f_k(t)| \leq e^{-t}$ für alle genügend großen k . Damit ergibt sich die Behauptung aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Insgesamt haben wir also $C = \pi/2$, und somit

$$\int_0^\infty e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x, \quad \text{für } 0 < x < \infty.$$

(d) Die *Gammafunktion* ist für $x > 0$ definiert durch das parameterabhängige Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (4)$$

Mit Satz 7.10 kann man zeigen, dass Γ eine C^∞ -Funktion ist (Aufgabe!). Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),$$

und es ist

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Hieraus folgt durch Induktion $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbf{N}$. Ein weiterer wichtiger Wert der Gammafunktion ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

was sich leicht aus 8.7(b) ergibt (Aufgabe!). Die Gamma-Funktion hat viele weitere interessante Eigenschaften, die aber erst richtig verständlich werden, wenn man in (4) x durch eine komplexe Variable $z = x + iy$ ersetzt und $\Gamma(z)$ als holomorphe Funktion studiert. Hierfür sei auf Lehrbücher der Funktionentheorie verwiesen.

§8. Die Transformationsformel

Übersicht. Die Transformationsformel 8.5 ist die n -dimensionale Version der Substitutionsregel, und wie diese zur Berechnung von Integralen äußerst nützlich. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall ist ihr Beweis erstaunlich kompliziert, und erfordert die gesamte bisher entwickelte Theorie. Als Beispiel behandeln wir Polarkoordinaten im \mathbf{R}^n .

8.1. Lemma. Sei $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung und $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt. Dann gilt

$$\mu(T(K)) = |\det T| \mu(K).$$

Beweis. Aus der linearen Algebra weiss man, dass T die Zusammensetzung von linearen Abbildungen folgenden Typs ist:

- (i) Permutationen der Koordinaten.
- (ii) Diagonale Abbildungen: $D(x^1, \dots, x^n) = (\lambda x^1, x^2, \dots, x^n)$, mit $\lambda \neq 0$.
- (iii) Scherungen: $S(x^1, \dots, x^n) = (x^1, x^2 + x^1, x^3, \dots, x^n)$.

Da die Determinante multiplikativ ist, genügt es, die Formel in diesen 3 Fällen zu beweisen. Für (i) bette man K in einen genügend großen Quader Q ein und verwende ein ähnliches Verfahren wie im Beweis von Satz 2.6, angewandt auf die charakteristische Funktion von K in Q (Aufgabe!). Im Fall (ii) und (iii) benützen wir das Cavalierische Prinzip: Sei $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}$ und setze $x = x^1$ und $y = (x^2, \dots, x^n)$. Dann gilt für die Schnittmengen in der Höhe y bzw. über x :

$$D(K)^y = \lambda K^y, \quad S(K)_x = x e_2 + K_x,$$

und wegen der Kompaktheit von K sind die Schnittmengen wieder kompakt und somit integrierbar. Aus dem Verhalten des Maßes unter Homothetien und Translationen (6.1.2) folgt $\mu(D(K)^y) = |\lambda|\mu(K^y)$ und $\mu(S(K)_x) = \mu(K_x)$. Nun zeigt 7.1.1, dass $\mu(D(K)) = |\lambda|\mu(K)$ und $\mu(S(K)) = \mu(K)$. Andererseits ist $\det D = \lambda$ und $\det S = 1$, und wir sind fertig.

Der nächste Satz zeigt, dass man den Betrag der Funktionaldeterminante einer stetig differenzierbaren Abbildung als infinitesimales Volumenverzerrungsverhältnis interpretieren kann.

8.2. Satz. *Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $\Phi : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung, $a \in U$ und sei die Ableitung $\Phi'(a)$ invertierbar. Sei (Q_k) eine Folge von kompakten nichtausgearteten Würfeln, die sich auf a zusammenziehen, d.h.: Wenn etwa $Q_k = \bar{B}_{r_k}(a_k)$ der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt a_k und Radius r_k ist, so sei $a_k \rightarrow a$ und $r_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Dann gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Phi(Q_k))}{\mu(Q_k)} = |\det \Phi'(a)|. \quad (1)$$

Beweis. Eventuell nach Verkleinern von U (Umkehrsatz!) kann man annehmen, dass $\Phi(U)$ offen und $\Phi : U \rightarrow \Phi(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Wir erledigen erst den

Spezialfall: $\Phi'(a) = \text{Id}$ ist die Einheitsmatrix.

Setze $b_k = \Phi(a_k)$ und $b = \Phi(a)$. Wir behaupten: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbf{N}$, sodass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\bar{B}_{r_k/(1+\varepsilon)}(b_k) \subset \Phi(Q_k) \subset \bar{B}_{r_k(1+\varepsilon)}(b_k). \quad (2)$$

Wenn dies gezeigt ist, folgt für die Inhalte

$$\left(\frac{2r_k}{1+\varepsilon}\right)^n \leq \mu(\Phi(Q_k)) \leq ((2r_k)(1+\varepsilon))^n,$$

also nach Division durch $\mu(Q_k) = (2r_k)^n$, dass

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^n \leq \frac{\mu(\Phi(Q_k))}{\mu(Q_k)} \leq (1+\varepsilon)^n,$$

und daraus die Behauptung im Spezialfall, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Nun beweisen wir (2). Da $\Phi'(a) = \text{Id}$ die Norm 1 hat, gibt es (Satz 4.8 von Analysis 2) ein $\delta > 0$, sodass Φ auf $B_\delta(a)$ einer Lipschitzbedingung mit der Lipschitz-Konstanten $1 + \varepsilon$ genügt. Wähle k_1 so groß, dass $Q_k \subset B_\delta(a)$ für alle $k \geq k_1$. Dann folgt für alle $x \in Q_k$ und alle $k \geq k_1$:

$$|\Phi(x) - \Phi(a_k)| \leq (1 + \varepsilon)|x - a_k| \leq (1 + \varepsilon)r_k,$$

also $\Phi(Q_k) \subset \bar{B}_{(1+\varepsilon)r_k}(b_k)$. Wegen $(\Phi^{-1})'(b) = \Phi'(a)^{-1} = \text{Id}$ gibt es analog ein $\alpha > 0$, sodass Φ^{-1} auf $B_\alpha(b)$ einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten $1 + \varepsilon$ genügt. Wähle $k_0 \geq k_1$ so groß, dass $\bar{B}_{r_k/(1+\varepsilon)}(b_k) \subset B_\alpha(b)$ für alle $k \geq k_0$. Das ist möglich, weil $b_k \rightarrow b$ und $r_k \rightarrow 0$. Dann gilt für $y \in \bar{B}_{r_k/(1+\varepsilon)}(b_k)$:

$$|\Phi^{-1}(y) - a_k| = |\Phi^{-1}(y) - \Phi^{-1}(b_k)| \leq (1 + \varepsilon)|y - b_k| \leq (1 + \varepsilon)\frac{r_k}{1 + \varepsilon} = r_k,$$

sodass $\Phi^{-1}(\bar{B}_{r_k/(1+\varepsilon)}(b_k)) \subset \bar{B}_{r_k}(a_k) = Q_k$. Durch Anwenden von Φ erhalten wir $\bar{B}_{r_k/(1+\varepsilon)}(b_k) \subset \Phi(Q_k)$ und damit die behauptete Formel (2).

Der Beweis im *allgemeinen Fall* ergibt sich mit Hilfe von Lemma 8.1 durch Anwenden des Spezialfalles auf $\Phi'(a)^{-1} \circ \Phi$.

8.3. Lemma. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Dann gibt es eine offene Menge B mit kompaktem Abschluss \bar{B} , sodass $K \subset B$ und $\bar{B} \subset U$.

Beweis. Das Komplement $A = \mathbf{R}^n \setminus U$ von U ist abgeschlossen und $A \cap K = \emptyset$. Daher ist der Abstand $\delta = d(A, K) > 0$ (0.8). Nun setze etwa $B = \{x : d(x, K) < \delta/2\}$. Da die Funktion $x \mapsto d(x, K)$ stetig ist, ist B offen und $\bar{B} = \{x : d(x, K) \leq \delta/2\}$ ist nach Definition von δ in U enthalten. Ferner folgt aus der Beschränktheit von K leicht, dass auch \bar{B} beschränkt ist. Also ist \bar{B} kompakt.

8.4. Satz (Transformationssatz für messbare Mengen). Seien U und V offen im \mathbf{R}^n und $\Phi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus.

(a) Φ induziert eine Bijektion zwischen den messbaren Teilmengen von U und V .

(b) Für eine messbare Menge $M \subset U$ sind äquivalent:

(i) $\Phi(M)$ ist integrierbar;

(ii) die Funktion $|\det \Phi'|$ ist über M integrierbar.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt

$$\mu(\Phi(M)) = \int_M |\det \Phi'|. \quad (1)$$

Beweis. (a) Da Φ und Φ^{-1} stetig sind und nach 6.12 Nullmengen in Nullmengen abbilden, folgt dies sofort aus 6.10.

(b) Wir setzen zur Abkürzung $f := |\det \Phi'|$ und führen den Beweis in 4 Schritten.

1. Schritt. $M = W$ ist ein kompakter Würfel.

In diesem Fall existiert das in (1) rechts stehende Integral nach Satz 2.9, und $\Phi(M)$ ist kompakt und somit integrierbar nach 6.6. Angenommen,

$$C := \left| \mu(\Phi(W)) - \int_W f \right| > 0.$$

Zerlege W durch Halbieren aller Seiten in 2^n Teilwürfel $W^{(i)}$, $i = 1, \dots, 2^n$. Dann gilt

$$\int_W f = \sum_{i=1}^{2^n} \int_{W^{(i)}} f$$

nach 4.1, und weiter auch, nach 6.2.6,

$$\mu(\Phi(W)) = \sum_{i=1}^{2^n} \mu(\Phi(W^{(i)})),$$

denn $\Phi(W^{(i)}) \cap \Phi(W^{(j)}) = \Phi(W^{(i)} \cap W^{(j)})$ (wegen der Injektivität von Φ !) ist nach Satz 6.12 eine Nullmenge. Also gibt es mindestens einen Index i_0 , sodass für $Q_1 := W^{(i_0)}$ gilt:

$$\left| \mu(\Phi(Q_1)) - \int_{Q_1} f \right| \geq \frac{C}{2^n},$$

denn andernfalls wäre

$$\left| \mu(\Phi(W)) - \int_W f \right| \leq \sum_{i=1}^{2^n} \left| \mu(\Phi(W^{(i)})) - \int_{W^{(i)}} f \right| < 2^n \cdot \frac{C}{2^n} = C.$$

So fortfahrend erhalten wir eine Folge $W = Q_0 \supset Q_1 \supset \dots$ von ineinandergeschachtelten Würfeln, deren Durchmesser gegen Null gehen, mit der Eigenschaft

$$\left| \mu(\Phi(Q_k)) - \int_{Q_k} f \right| \geq \frac{C}{2^{nk}}. \quad (2)$$

Nach dem Schachtelungsprinzip 0.7 besteht der Durchschnitt der Q_k aus genau einem Punkt a , und nach Konstruktion gilt $\mu(Q_k) = \mu(W)2^{-nk}$. Um zum Widerspruch zu kommen, verwenden wir Satz 8.2. Zunächst schätzen wir die in (2) auftretende Differenz nach oben ab:

$$\begin{aligned} \left| \mu(\Phi(Q_k)) - \int_{Q_k} f \right| &\leq \left| \mu(\Phi(Q_k)) - f(a)\mu(Q_k) \right| + \left| f(a)\mu(Q_k) - \int_{Q_k} f \right| \\ &\leq \left| \mu(\Phi(Q_k)) - f(a)\mu(Q_k) \right| + \int_{Q_k} |f - f(a)|. \end{aligned} \quad (3)$$

Nun folgt aus (2) und (3) nach Division durch $\mu(Q_k)$

$$\frac{C}{\mu(W)} \leq \left| \frac{\mu(\Phi(Q_k))}{\mu(Q_k)} - f(a) \right| + \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} |f - f(a)|. \quad (4)$$

Nach Satz 8.2 geht hier der erste Term für $k \rightarrow \infty$ gegen Null. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen der Stetigkeit von f in a gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in B_\delta(a)$. Da $Q_k \subset B_\delta(a)$ für alle genügend großen k , folgt

$$\frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} |f - f(a)| \leq \frac{1}{\mu(Q_k)} \int_{Q_k} \varepsilon = \varepsilon \quad \text{für alle genügend großen } k.$$

Also geht auch der zweite Term in (4) für $k \rightarrow \infty$ gegen Null, und es folgt $C = 0$, im Widerspruch zur Annahme.

2. Schritt. M ist offen.

Schreibe $M = \bigcup_1^\infty W_k$ als Vereinigung fast disjunkter kompakter Würfel. Wegen der Injektivität und Nullmengentreue von Φ sind die $\Phi(W_k)$ wieder fast disjunkt, und somit folgt aus dem ersten Schritt

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^k \Phi(W_i)\right) = \sum_{i=1}^k \mu(\Phi(W_i)) = \sum_{i=1}^k \int_{W_i} f.$$

Daher folgt nun die Behauptung für $k \rightarrow \infty$ aus 6.2(e) und 7.4(e).

3. Schritt. $M = K$ ist kompakt.

Wähle eine offene Menge $B \supset K$ mit kompaktem Abschluss $\bar{B} \subset U$ (8.3). Dann ist $K = B \setminus (B \setminus K)$, und die offenen Mengen B und $B \setminus K$ sind beschränkt, also integrierbar. Nach dem 2. Schritt und den Rechenregeln 6.2.2 und 7.4.1 folgt

$$\mu(\Phi(K)) = \mu(\Phi(B)) - \mu(\Phi(B \setminus K)) = \int_B f - \int_{B \setminus K} f = \int_K f.$$

4. Schritt. M ist eine beliebige integrierbare Menge.

Schreibe $M = N \cup M'$ mit einer Nullmenge N und $M' = \bigcup_1^\infty K_j$ wie in 6.10. Weil $\Phi(N)$ eine Nullmenge ist, genügt es wegen 5.11 den Fall $M = M'$ zu betrachten. Dann ist aber $\mu(\Phi(K_j)) = \int_{K_j} f$ nach dem 3. Schritt, und die Behauptung folgt aus 6.2(d) und 7.4(d).

8.5. Satz (Transformationsformel). Seien U und V offen im \mathbf{R}^n und sei $\Phi: U \rightarrow V$ ein \mathcal{C}^2 -Diffeomorphismus. Für eine messbare Menge $M \subset U$ und eine Funktion f auf $\Phi(M)$ sind folgende Bedingungen äquivalent.

- (i) f ist über $\Phi(M)$ integrierbar;
- (ii) $(f \circ \Phi)|\det \Phi'|$ ist über M integrierbar.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann gilt

$$\int_{\Phi(M)} f = \int_M (f \circ \Phi)|\det \Phi'|, \quad (1)$$

oder in ausführlicherer Schreibweise:

$$\int_{\Phi(M)} f(x) dx^1 \cdots dx^n = \int_M f(\Phi(u)) \left| \frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} \right| du^1 \cdots du^n, \quad (2)$$

wobei

$$\frac{\partial(\Phi^1, \dots, \Phi^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} := \det \Phi' \quad (3)$$

gesetzt ist.

Beweis. Nach Zerlegung von f in positiven und negativen Anteil können wir $f \geq 0$ annehmen. Sei $\tilde{U} = U \times \mathbf{R}$, $\tilde{V} = V \times \mathbf{R}$ und $\tilde{\Phi}: \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ durch

$$\tilde{\Phi}(u, t) = \begin{pmatrix} \Phi(u) \\ t \\ |\det \Phi'(u)| \end{pmatrix} \quad (u \in U, t \in \mathbf{R})$$

definiert. Dann ist $\tilde{\Phi}$ ein \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus mit Ableitung

$$\tilde{\Phi}'(u, t) = \begin{pmatrix} \Phi'(u) & 0 \\ * & |\det \Phi'(u)|^{-1} \end{pmatrix}.$$

Daher ist $|\det \tilde{\Phi}'|$ konstant gleich 1. Nach dem Transformationssatz 8.4 induziert also $\tilde{\Phi}$ eine maßerhaltende Bijektion zwischen den messbaren (bzw. integrierbaren) Teilmengen von \tilde{U} und \tilde{V} . Wie in 7.5 bezeichne $O(f)$ die Ordinatenmenge von f . Man überlegt sich leicht, dass

$$\tilde{\Phi}(O((f \circ \Phi)|\det \Phi'|)) = O(f).$$

Nun folgt die Behauptung sofort aus der Charakterisierung der Integrierbarkeit und des Integrals von f durch die Ordinatenmenge in 7.5.

Bemerkung. Dieser Satz gilt auch noch für \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen. Der Beweis erfordert allerdings weitergehende Hilfsmittel, siehe 9.15.

Oft tritt der Fall auf, dass Φ auf seinem natürlichen Definitionsbereich D die in 8.5 gemachten Voraussetzungen nicht erfüllt, und erst die Einschränkung von Φ auf eine geeignete Teilmenge U ein Diffeomorphismus ist. In solchen Fällen ist die folgende Variante der Transformationsformel anwendbar.

8.6. Korollar. Sei $D \subset \mathbf{R}^n$ offen, $\Phi: D \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine \mathcal{C}^2 -Abbildung und $M \subset D$ messbar. Weiter sei $U \subset D$ offen, und es gelte

- (i) $\Phi|_U$ ist injektiv und $\det \Phi'(u) \neq 0$ für alle $u \in U$,
- (ii) $M \setminus U$ ist eine Nullmenge.

Sei f eine über $\Phi(M)$ integrierbare Funktion. Dann ist $(f \circ \Phi)|\det \Phi'|$ über M integrierbar, und es gilt 8.5.1.

Beweis. Nach 6.14 sind $\Phi(M)$ und $\Phi(M \cap U)$ messbar, und nach 6.12 ist $\Phi(M \setminus U)$ eine Nullmenge. Nun folgt die Behauptung aus 8.5:

$$\int_{\Phi(M)} f = \int_{\Phi(M \cap U)} f = \int_{M \cap U} (f \circ \Phi)|\det \Phi'| = \int_M (f \circ \Phi)|\det \Phi'|.$$

8.7. Beispiele. (a) Polarkoordinaten im \mathbf{R}^2 .

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \Phi' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = r.$$

Hier ist Φ zwar auf der ganzen (r, φ) -Ebene definiert, aber nicht injektiv. Jedoch ist die Einschränkung von Φ auf den Streifen

$$U = \{(r, \varphi) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

ein Diffeomorphismus von U auf $V = \mathbf{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$. Damit kann man die Transformationsformel in der Fassung 8.6 zum Beispiel anwenden auf den Fall des Rechtecks

$$M = Q_R = \{(r, \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

denn $Q_R \setminus U$ ist im Rand von Q_R enthalten und damit eine Nullmenge. Das Bild von Q_R unter Φ ist die abgeschlossene Kreisscheibe K_R vom Radius R , und man erhält damit:

Das Integral einer über K_R integrierbaren Funktion f lässt sich auswerten als

$$\int_{K_R} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

(b) Berechnung von $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Wieder verwenden wir 8.6, wobei Φ wie in (a) und M der Streifen $\{(r, \varphi) : r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi/2\}$ sei. Dann ist $\Phi(M) = \mathbf{R}_+^2$ der abgeschlossene erste Quadrant im \mathbf{R}^2 , und die Transformationsformel zusammen mit dem Satz von Fubini ergibt

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_M e^{-r^2} r dr d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Andrerseits gilt wieder nach dem Satz von Fubini und der Funktionalgleichung der e -Funktion

$$\int_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2.$$

Durch Wurzelziehen folgt also

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (1)$$

(c) Zylinderkoordinaten im \mathbf{R}^3 sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r.$$

Hier gelten ähnliche Regeln wie für ebene Polarkoordinaten, weil die z -Koordinate nicht transformiert wird.

(d) Polarkoordinaten im \mathbf{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \varphi \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \cos \vartheta.$$

Hier ist wieder Φ für alle (r, φ, ϑ) definiert und liefert einen Diffeomorphismus von

$$U = \{(r, \varphi, \vartheta) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, |\vartheta| < \pi/2\}$$

auf die Menge $V = \mathbf{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0\}$. Das Bild des Quaders

$$Q_R = \{(r, \varphi, \vartheta) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |\vartheta| \leq \pi/2\}$$

unter Φ ist die Vollkugel mit Mittelpunkt 0 und Radius R . Der Beweis folgt aus dem Spezialfall $n = 1$ im folgenden Beispiel.

(e) Polarkoordinaten im \mathbf{R}^n : Diese sind für $n \geq 2$ und $m := n - 2$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \Phi(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = \begin{pmatrix} r \cos \vartheta_m \cos \vartheta_{m-1} \cdots \cos \vartheta_1 \cos \varphi \\ r \cos \vartheta_m \cos \vartheta_{m-1} \cdots \cos \vartheta_1 \sin \varphi \\ r \cos \vartheta_m \cdots \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \\ \vdots \\ r \cos \vartheta_m \sin \vartheta_{m-1} \\ r \sin \vartheta_m \end{pmatrix},$$

und für sie gilt der folgende Satz.

8.8. Satz. Die Funktionaldeterminante ist

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m)} = r^{n-1} \cos^m \vartheta_m \cos^{m-1} \vartheta_{m-1} \cdots \cos \vartheta_1, \quad (1)$$

und für $\Phi_n = \Phi$ gilt die Rekursionsformel

$$\Phi_n(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = \begin{pmatrix} \Phi_{n-1}(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-1}) \cdot \cos \vartheta_m \\ r \sin \vartheta_m \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Die Restriktion von Φ_n auf

$$U = \{(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, |\vartheta_i| < \pi/2\}$$

ist injektiv und hat invertierbare Ableitung. Das Bild des Quaders

$$Q_R = \{(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, |\vartheta_i| \leq \pi/2\}$$

unter Φ ist die Vollkugel K_R vom Radius R um den Nullpunkt im \mathbf{R}^n . Das Bild des Durchschnitts von Q_R mit der Hyperebene $r = R$ ist die Sphäre S_R^{n-1} vom Radius R im \mathbf{R}^n .

Beweis. Für $n = 2$ hat man die Polarkoordinaten im \mathbf{R}^2 und die Behauptung folgt aus Beispiel (a). Nun sei schon $\|\Phi_{n-1}\| = r^2$ bewiesen, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm bezeichnet. Dann ist wegen (2) $\|\Phi_n\|^2 = \|\Phi_{n-1}\|^2 \cdot \cos^2 \vartheta_m + r^2 \sin^2 \vartheta_m = r^2$. Zum Beweis der Injektivität auf U nehmen wir an, dass $\Phi_n(r, \varphi, \vec{\vartheta}) = \Phi_n(r', \varphi', \vec{\vartheta}')$, wobei $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. Dann folgt $r^2 = (r')^2$ und daher $r = r'$, weil r und r' positiv sind. Durch Vergleich der letzten Komponenten sieht man weiter $\sin \vartheta_m = \sin \vartheta'_m$ und daraus $\vartheta_m = \vartheta'_m$, weil $|\vartheta_m| < \pi/2$ und $|\vartheta'_m| < \pi/2$, und der Sinus im Intervall $] -\pi/2, \pi/2[$ injektiv ist. Nun folgt $\varphi = \varphi'$ und $\vartheta_i = \vartheta'_i$ für $i = 1, \dots, m-1$ nach Induktionsvoraussetzung.

Als Nächstes zeigen wir die Gültigkeit von Formel (1) ebenfalls durch Induktion. Für die Funktionalmatrix von Φ_n erhält man aus (2)

$$\Phi'_n = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_m \cdot \Phi'_{n-1} & -\sin \vartheta_m \cdot \Phi_{n-1} \\ \sin \vartheta_m & 0 \dots 0 & r \cos \vartheta_m \end{pmatrix}.$$

Sei S_i die i -te Spalte von Φ'_{n-1} . Dann ist

$$S_1 = \frac{\partial \Phi_{n-1}}{\partial r} = \frac{1}{r} \Phi_{n-1}. \quad (3)$$

Daher lautet die Entwicklung von $\det \Phi'_n$ nach der letzten Zeile:

$$\begin{aligned} \det \Phi'_n &= (-1)^{n+1} \sin \vartheta_m \cdot \det(\cos \vartheta_m \cdot S_2, \dots, \cos \vartheta_m \cdot S_{n-1}, -\sin \vartheta_m \cdot \Phi_{n-1}) \\ &\quad + (-1)^{n+n} r \cos \vartheta_m \cdot \det(\cos \vartheta_m \cdot \Phi'_{n-1}) \\ &= (-1)^n \sin^2 \vartheta_m \cos^m \vartheta_m r \det(S_2, \dots, S_{n-1}, S_1) + r \cos^n \vartheta_m \det \Phi'_{n-1} \\ &= r \sin^2 \vartheta_m \cos^m \vartheta_m \det(S_1, \dots, S_{n-1}) + r \cos^n \vartheta_m \det \Phi'_{n-1} \\ &= r \cdot (\sin^2 \vartheta_m + \cos^2 \vartheta_m) \cos^m \vartheta_m \det \Phi'_{n-1} = r \cdot \cos^m \vartheta_m \cdot \det \Phi'_{n-1}. \end{aligned}$$

Dies ist eine Rekursionsformel für $\det \Phi'_n$, aus der wegen $\det \Phi'_2 = r$ die behauptete Formel (1) durch Induktion folgt.

Schließlich zeigen wir, dass das Bild von Q_R unter Φ die Vollkugel K_R mit Radius R ist. Hierbei folgt $\Phi(Q_R) \subset K_R$ aus $\|\Phi_n\| = r$. Umgekehrt sei $0 \neq x \in K_R$. Setze $r := \|x\|$ und $\vartheta_m = \arcsin(x^n/r)$. Dann ist $x^n = r \sin \vartheta_m$, und $y := (1/r)(x^1, \dots, x^{n-1})$ erfüllt

$$\|y\|^2 = \frac{r^2 - (x^n)^2}{r^2} = 1 - \sin^2 \vartheta_m = \cos^2 \vartheta_m.$$

Also ist nach Induktionsvoraussetzung $y = \Phi_{n-1}(r', \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_{m-1})$ mit $r' := \cos \vartheta_m$. Es folgt $x = \Phi_n(r, \varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. Die letzte Behauptung ist klar wegen $\|\Phi_n\| = r$.

Als *Anwendung* berechnen wir nochmals das Volumen von K_R mittels der Transformationsformel:

$$\mu(K_R) = \int_0^R r^{n-1} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \prod_{k=1}^m \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k \vartheta d\vartheta = \frac{2\pi R^n}{n} c_1 \cdots c_{n-2},$$

wobei

$$c_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^k \vartheta d\vartheta. \quad (4)$$

Hieraus bekommt man wieder die schon früher in 7.2(c) gefundenen Formeln für das Volumen der Einheitskugel.

§9.* Die L^p -Räume

Übersicht. In diesem Paragraphen führen wir die für die höhere Analysis wichtigen \mathcal{L}^p -Räume ein. Dabei handelt es sich, in Verallgemeinerung des Raumes \mathcal{L}^1 , um diejenigen lokal integrierbaren Funktionen, deren p -te Potenz absolut integrierbar ist. Wir beweisen den fundamentalen Satz von Fischer-Riesz (9.11), der besagt, dass diese Räume bezüglich der p -Norm (9.5.2) vollständig sind. Die Quotienten $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{N}$ nach dem Raum der unwesentlichen Funktionen sind Banachräume; der Raum L^2 ist sogar ein Hilbertraum. Schließlich zeigen wir (9.14), dass sich die Funktionen in \mathcal{L}^p in der p -Norm beliebig genau durch Treppenfunktionen approximieren lassen, und benützen dies zum Beweis einer verbesserten Variante der Transformationsformel.

9.1. Definition (p -integrierbare Funktionen). In diesem Paragraphen betrachten wir durchweg komplexwertige Funktionen $f = f_1 + if_2$ auf \mathbf{R}^n . Eine solche Funktion ist lokal integrierbar, wenn Real- und Imaginärteil f_1 und f_2 es sind (vgl. 5.3). Dann ist $|f| = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ nach 2.15 ebenfalls lokal integrierbar. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1 := \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ die lokal integrierbaren Funktionen. Dies ist offenbar ein komplexer Vektorraum.

Sei $1 \leq p < \infty$. Eine lokal integrierbare Funktion f heißt p -integrierbar, wenn $|f|^p$ integrierbar ist, also $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n; \mathbf{R})$. (Die Verwendung des Buchstabens p in diesem Zusammenhang ist traditionell und hat nichts mit einer Dimension, wie etwa bei p -Formen oder p -Dichten, zu tun.) Statt 2-integrierbar sagt man auch *quadratinintegrierbar*. Die Menge der p -integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$ und meist kurz mit \mathcal{L}^p . Ist M eine messbare Teilmenge des \mathbf{R}^n , so sei, analog zu 7.3, $\mathcal{L}^p(M)$ die Menge aller $f \in \mathcal{L}^p$, die ausserhalb M verschwinden.

Die Bedingung $|f|^p \in \mathcal{L}^1$ ist nicht linear in f . Daher ist es nicht klar, dass \mathcal{L}^p ein Untervektorraum von $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ ist. Zum Beweis dieser Tatsache brauchen wir einige Vorbereitungen. Im folgenden Lemma sei Q ein kompakter Quader.

9.2. Lemma. Sei $\alpha > 0$, sei $K \subset]0, \infty[$ ein kompaktes Intervall, und sei $g \in \mathcal{L}^1(Q)$ eine Funktion mit Werten in K . Dann ist auch $g^\alpha \in \mathcal{L}^1(Q)$.

Beweis. Die reelle Funktion $t \mapsto t^\alpha$ auf $]0, \infty[$ ist stetig differenzierbar und daher lokal dehnungsbeschränkt. Also genügt sie nach 0.12 auf K einer Lipschitzbedingung, etwa $|t_1^\alpha - t_2^\alpha| \leq C|t_1 - t_2|$. Wir zeigen die Integrierbarkeit von g^α mit dem Cauchy-Kriterium 2.7. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\varrho : Q \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ wie in der Definition der Integrierbarkeit für g . Seien Z und Z' zwei ϱ -feine verträgliche Zerlegungen von Q ,

etwa mit den Teilquadern Q_i und Stützstellen ξ_i und η_i . Dann gilt

$$\begin{aligned} |S_Z(g^\alpha) - S_{Z'}(g^\alpha)| &\leq \sum_{i \in I} |g(\xi_i)^\alpha - g(\eta_i)^\alpha| \mu(Q_i) \\ &\leq C \cdot \sum_{i \in I} |g(\xi_i) - g(\eta_i)| \mu(Q_i) \leq 2\varepsilon C, \end{aligned}$$

nach 2.7(a). Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

9.3. Lemma. Sei $\alpha > 0$ und sei f eine lokal integrierbare Funktion.

(a) Es gebe eine lokal integrierbare Funktion h mit $|f|^\alpha \leq h$. Dann ist auch $|f|^\alpha$ lokal integrierbar.

(b) Die Aussage (a) gilt auch noch, wenn man „lokal integrierbar“ durch „integrierbar“ ersetzt.

Beweis. (a) Für jedes $k \in \mathbf{N}$ sei

$$g_k := \min\left(k, \max\left(|f|, \frac{1}{k}\right)\right).$$

Dann ist $g_k \in \mathcal{L}^1(Q)$ für jeden kompakten Quader Q , und g_k hat Werte im kompakten Intervall $[1/k, k]$. Nach Lemma 9.2 folgt also $g_k^\alpha \in \mathcal{L}^1(Q)$. Die g_k^α konvergieren punktweise gegen $|f|^\alpha$, und es gilt $g_k^\alpha|_Q \leq 1+h|_Q \in \mathcal{L}^1(Q)$, wie man sich leicht überlegt (unterscheide die Fälle $|f(x)| \geq 1$ und $|f(x)| \leq 1$). Also ist $|f|^\alpha \in \mathcal{L}^1(Q)$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz. Da Q beliebig war, folgt die Behauptung.

(b) Nach (a) ist $|f|^\alpha$ lokal integrierbar. Nun folgt die Behauptung aus 5.2(c).

9.4. Satz. \mathcal{L}^p ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, der mit f und g auch $|f|$, den Real- und Imaginärteil von f und, für reelles f und g , den positiven und negativen Anteil f_\pm sowie $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ enthält.

Beweis. Offenbar ist mit f auch jedes skalare Vielfache p -integrierbar. Nun seien f und g in \mathcal{L}^p . Dann ist $f + g \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, also auch $|f + g|$, und es gilt

$$|f + g|^p \leq (|f| + |g|)^p \leq (2 \max(|f|, |g|))^p = 2^p \cdot \max(|f|^p, |g|^p) =: h \in \mathcal{L}^1,$$

wegen 5.2(b). Nach Lemma 9.3(b), angewandt auf $|f + g|$ und $\alpha = p$, folgt $|f + g|^p \in \mathcal{L}^1$. Also ist $f + g \in \mathcal{L}^p$, und somit ist \mathcal{L}^p ein komplexer Vektorraum.

Auf Grund der Definitionen ist klar, dass mit f auch $|f|$ in \mathcal{L}^p ist. Wegen $|\bar{f}|^p = |f|^p \in \mathcal{L}^1$ ist ferner $\bar{f} \in \mathcal{L}^p$, und somit wegen der Vektorraumeigenschaft auch Real- und Imaginärteil von f . Die übrigen Behauptungen folgen aus 2.13.1.

9.5. Die p -Norm und die L^p -Räume. In Verallgemeinerung von 5.2(b) definieren wir nun die p -Norm auf \mathcal{L}^p durch

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p \right)^{1/p}.$$

Offenbar gilt $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$, und weiter

$$\|f\|_p = 0 \iff f \in \mathcal{N}, \quad (1)$$

dem Raum der fast überall verschwindenden Funktionen. Dies folgt aus der Charakterisierung der unwesentlichen Funktionen in 5.10(d), weil ja $|f(x)|^p = 0$ dann und

nur dann, wenn $f(x) = 0$. Insbesondere ist also die p -Norm trotz ihres Namens keine Norm in dem in Analysis 2, definierten Sinn auf dem Vektorraum \mathcal{L}^p , sondern nur eine Seminorm. Um zu normierten Räumen zu gelangen, setzen wir daher

$$L^p := L^p(\mathbf{R}^n) := \mathcal{L}^p / \mathcal{N}$$

und definieren die p -Norm einer Äquivalenzklasse $[f] \in L^p$ durch

$$\|[f]\|_p := \|f\|_p. \quad (2)$$

Wegen 5.11 ist das wohldefiniert. Analog setzt man

$$L^p(M) := \mathcal{L}^p(M) / \mathcal{N} \cap \mathcal{L}^p(M)$$

für eine messbare Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^n$, und definiert die p -Norm auf diesem Raum ebenfalls durch (2).

Wir werden als Nächstes zeigen, dass L^p damit wirklich zu einem normierten Raum wird. Nach Definition von L^p ist klar, dass $\|[f]\| = 0$ nur für $[f] = 0$. Also bleibt nur noch die Dreiecksungleichung zu beweisen. Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung von Satz 5.2(c).

9.6. Lemma. Seien $f, g \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$ und es gebe ein $h \in \mathcal{L}^1$ mit $|fg| \leq h$. Dann ist auch $fg \in \mathcal{L}^1$.

Beweis. (a) Seien zunächst f und g reellwertig. Wir setzen

$$g_k := \min(k, \max(g, -k)).$$

Dann ist g_k beschränkt und ebenfalls lokal integrierbar. Also ist $fg_k \in \mathcal{L}^1_{\text{loc}}$ nach Satz 5.2(c). Ferner gilt $|fg_k| \leq |fg| \leq h \in \mathcal{L}^1$. Also ist $fg_k \in \mathcal{L}^1$ nach Satz 5.2(d). Schließlich gilt $fg_k \rightarrow fg$ punktweise, und daher ist $fg \in \mathcal{L}^1$ nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz.

(b) Nun seien $f = f_1 + if_2$ und $g = g_1 + ig_2$ komplexwertig. Dann gilt $|f_l| \leq |f|$ und $|g_l| \leq |g|$, und daher $|f_l g_m| \leq |fg| \leq h$ für $l, m \in \{1, 2\}$. Nach dem unter (a) Bewiesenen ist also $f_l g_m \in \mathcal{L}^1$, und daher auch $fg = (f_1 g_1 - f_2 g_2) + i(f_1 g_2 + f_2 g_1)$.

9.7. Satz (Höldersche Ungleichung). Seien $p > 1$ und $q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Weiter sei $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$. Dann ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (1)$$

Beweis. Ist $\|f\|_p = 0$ oder $\|g\|_q = 0$, dann verschwindet f oder g und damit auch fg fast überall, und die behauptete Ungleichung (1) gilt trivialerweise. Sei also $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$. Nach Division von f bzw. g durch $\|f\|_p$ bzw. $\|g\|_q$ können wir sogar $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$ annehmen. Aus Analysis 1 ist bekannt, dass

$$st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$$

für alle reellen $s, t \geq 0$. Es folgt

$$|f(x)| \cdot |g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$$

für alle $x \in \mathbf{R}^n$. Hier steht rechts eine \mathcal{L}^1 -Funktion. Nach Lemma 9.6 ist also $fg \in \mathcal{L}^1$, und durch Integration ergibt sich

$$\int |fg| = \|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wie behauptet.

9.8. Satz. Die p -Norm erfüllt die Dreiecksungleichung: Für $f, g \in \mathcal{L}^p$ gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (1)$$

Daher ist $\|\cdot\|_p$ eine Seminorm auf \mathcal{L}^p und eine Norm auf L^p .

Beweis. Für $p = 1$ folgt (1) trivial durch Integration aus $|f + g| \leq |f| + |g|$. Wir nehmen also $1 < p < \infty$ an, und definieren q durch

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Dann gilt

$$|f + g|^p = |f + g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq (|f| + |g|) \cdot |f + g|^{p-1}. \quad (3)$$

Nun ist $|f|^{p-1} \leq 1 + |f|^p \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, und daher ist nach Lemma 9.3(a) auch $|f|^{p-1}$ lokal integrierbar. Weiter ist $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q$; denn wegen (2) ist

$$(|f + g|^{p-1})^q = |f + g|^{p(q-1)} = |f + g|^p \in \mathcal{L}^1,$$

weil ja $f + g$ nach Satz 9.4 p -integrierbar ist. Also folgt aus der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int |f| \cdot |f + g|^{p-1} &\leq \|f\|_p \cdot \| |f + g|^{p-1} \|_q = \|f\|_p \cdot \left[\int (|f + g|^{p-1})^q \right]^{1/q} \\ &= \|f\|_p \cdot \left[\int |f + g|^p \right]^{1/q} = \|f\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p/q}. \end{aligned}$$

Ebenso beweist man

$$\int |g| \cdot |f + g|^{p-1} \leq \|g\|_p \cdot \|f + g\|_p^{p/q}.$$

Nun ergibt Integration von (3)

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q}. \quad (4)$$

Im Fall $\|f + g\|_p = 0$ ist (1) trivial. Sonst folgt durch Division aus (4) wegen (2)

$$\|f + g\|_p^{p-p/q} = \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

9.9. Vollständigkeit. Sei \mathbf{V} ein reeller oder komplexer Vektorraum mit einer Seminorm $\|\cdot\|$. Eine Folge (a_k) in \mathbf{V} heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in \mathbf{V}$ gibt mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|a - a_k\| = 0$. Wenn $\|\cdot\|$ keine Norm ist, so sind Limes in \mathbf{V} in diesem Sinne nicht mehr eindeutig! Das spielt aber in vielen Situationen keine große Rolle, und lässt sich stets durch Übergang zum Quotienten von \mathbf{V} nach dem Unterraum der Vektoren v mit $\|v\| = 0$, in Analogie zur Definition der L^p -Räume in 9.5, beheben.

Die Folge (a_k) heißt eine *Cauchyfolge*, wenn sie das Cauchysche Konvergenzkriterium erfüllt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $m \in \mathbf{N}$, sodass $\|a_i - a_j\| < \varepsilon$ für alle $i, j \geq m$. Aus der Dreiecksungleichung folgt leicht, dass jede konvergente Folge insbesondere eine Cauchyfolge ist. Wir nennen \mathbf{V} *vollständig*, wenn umgekehrt jede Cauchyfolge in \mathbf{V} konvergiert.

Ein *Banachraum* ist ein vollständiger normierter Vektorraum. Unter einem *Hilbertraum* verstehen wir einen Banachraum, dessen Norm sich aus einem Skalarprodukt (d.h., einer positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform $\langle \cdot | \cdot \rangle$) vermöge $\|a\| = \langle a | a \rangle^{1/2}$ ergibt.

Unser nächstes Ziel ist der Beweis der Vollständigkeit der Räume \mathcal{L}^p (Satz von Fischer-Riesz 9.11). Die wesentliche Arbeit steckt im folgenden Satz, in dem aus technischen Gründen mit Reihen statt mit Folgen gearbeitet wird.



9.10. Satz. Sei (g_k) eine Folge in \mathcal{L}^p mit

$$A := \sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|_p < \infty. \quad (1)$$

Dann gibt es eine Nullmenge N , sodass für alle $x \notin N$ die Reihe

$$g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) \quad (2)$$

absolut konvergiert. Definiert man $g(x) := 0$ für $x \in N$, so ist $g \in \mathcal{L}^p$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{i=0}^k g_i \right\|_p = 0. \quad (3)$$

Beweis. Sei $h_k := \sum_{i=0}^k |g_i|$. Dann ist $h_k \in \mathcal{L}^p$ nach 9.4. Offenbar bilden die h_k eine monoton wachsende Folge, und daher ist auch die Folge der integrierbaren Funktionen h_k^p monoton wachsend. Wegen der Dreiecksungleichung für die p -Norm gilt $\int h_k^p = \|h_k\|_p^p \leq (\sum_{i=0}^k \|g_i\|_p)^p \leq A^p$. Also folgt aus dem verbesserten Satz von der monotonen Konvergenz 5.13: Der Limes $\tilde{h}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x)^p$ existiert für alle x mit Ausnahme einer Nullmenge N , und wenn man $\tilde{h}(x) := 0$ für $x \notin N$ setzt, so ist $\tilde{h} \in \mathcal{L}^1$. Aus der Stetigkeit der Funktion $t \mapsto t^{1/p}$ folgt die Existenz von $h(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k(x) = \tilde{h}(x)^{1/p}$ und damit die absolute Konvergenz der Reihe (2) für alle $x \notin N$. Wir setzen wieder $h(x) := 0$ für $x \in N$ und zeigen als Nächstes, dass $h \in \mathcal{L}^p$ ist. Weil $h^p = \tilde{h} \in \mathcal{L}^1$, bleibt dazu nur nach die lokale Integrierbarkeit von h zu zeigen. Nun gilt $\tilde{h}^{1/p} \leq 1 + \tilde{h} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$, und daher ist $h = \tilde{h}^{1/p} \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1$ nach Lemma 9.3(a).

Wir kommen zum Beweis der p -Integrierbarkeit von g . Durch Nullsetzen der g_k auf N (was offenbar (1) nicht stört) können wir annehmen, dass (2) für alle $x \in \mathbf{R}^n$ gilt. Sei $s_k := \sum_{i=0}^k g_i$, und sei Q ein kompakter Quader. Dann ist $s_k \in \mathcal{L}^1(Q)$ und $|s_k| \leq h_k \leq h \in \mathcal{L}^1(Q)$. Also folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz für Quader 4.7, dass $g \in \mathcal{L}^1(Q)$. Da Q beliebig war, ist g lokal integrierbar. Ferner ist $|g| \leq h$, also $|g|^p \leq h^p = \tilde{h} \in \mathcal{L}^1$, und somit folgt nach Lemma 9.3(b), dass $|g|^p \in \mathcal{L}^1$. Also ist $g \in \mathcal{L}^p$.

Schließlich zeigen wir (3). Es gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} |g - s_k|^p = 0$ punktweise. Ferner ist $|g - s_k| \leq |g| + |s_k| \leq h + h_k \leq 2h$ und somit $|g - s_k|^p \leq 2^p h^p \in \mathcal{L}^1$. Also liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz 5.6(b)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - s_k\|_p^p = \lim_{k \rightarrow \infty} \int |g - s_k|^p = \int \lim_{k \rightarrow \infty} |g - s_k|^p = 0.$$

9.11. Satz von Fischer-Riesz. Sei M eine messbare Teilmenge des \mathbf{R}^n und sei (f_k) eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(M)$. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(M)$ und eine Teilfolge (f_{k_i}) , sodass

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k_i}(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x, \quad (1)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_p = 0. \quad (2)$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}^p(M)$ bezüglich der p -Norm vollständig.

Beweis. Wähle Indizes $k_1 < k_2 < \dots$ mit $\|f_i - f_j\|_p \leq 2^{-l}$ für alle $i, j \geq k_l$, und setze $g_0 := f_{k_1}$ und $g_l := f_{k_{l+1}} - f_{k_l}$ für $l \geq 1$. Dann ist $g_0 + \dots + g_{l-1} = f_{k_l}$ und

$$\sum_{l=0}^{\infty} \|g_l\| \leq \|g_0\| + \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} = \|g_0\| + 1 < \infty.$$

Nach Satz 9.10 gibt es also eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p$ mit $\lim_{l \rightarrow \infty} f_{k_l}(x) = g(x)$ für fast alle x , und $\lim_{l \rightarrow \infty} \|g - f_{k_l}\|_p = 0$. Definiere

$$f(x) := \begin{cases} g(x) & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{falls } x \notin M. \end{cases}$$

Weil die f_k ausserhalb M verschwinden, gilt $g(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{C}M$, und somit ist $f = g$ fast überall. Daher ist $f \in \mathcal{L}^p(M)$ und es gilt (1). Zum Beweis von (2) sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle m so groß, dass $\|f_i - f_j\|_p < \varepsilon$ für alle $i, j \geq m$. Wähle eine l so groß, dass $k_l \geq m$ und $\|g - f_{k_l}\|_p < \varepsilon$. Dann gilt $\|f - f_i\|_p = \|g - f_i\|_p \leq \|g - f_{k_l}\|_p + \|f_{k_l} - f_i\|_p < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ für alle $i \geq m$.

9.12. Korollar. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ messbar. Für $1 \leq p < \infty$ ist $L^p(M)$ mit der p -Norm 9.5.2 ein Banachraum. Der Raum $L^2(M)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle [f] | [g] \rangle = \int \bar{f}g \quad (1)$$

ein Hilbertraum.

Beweis. Die erste Aussage ist klar nach 9.11. Wegen 9.7 und 9.4 ist $\bar{f}g \in \mathcal{L}^1$ für $f, g \in \mathcal{L}^2(M)$. Also ist die rechte Seite von (1) wohldefiniert, und nach 5.11 hängt sie nur von den Klassen $[f]$ und $[g]$ ab. Nun ist klar, dass $\langle \cdot | \cdot \rangle$ sesquilinear und hermitesch ist. Da offenbar $\langle [f] | [f] \rangle = \|[f]\|_2^2$, folgt die Behauptung.

9.13. Treppenfunktionen. Unter einer *Treppenfunktion* verstehen wir eine endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen kompakter Quader, etwa

$$\varphi = \sum c_i \chi_{Q_i}. \quad (1)$$

Die Treppenfunktionen bilden offenbar einen Vektorraum $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbf{R}^n)$. Die charakteristische Funktion eines Quaders (und allgemeiner einer beliebigen integrierbaren Menge) ist gleich ihrer p -ten Potenz und damit p -integrierbar. Also ist wegen Satz 9.4 auch jede Treppenfunktion p -integrierbar, d.h., es ist $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}^p$.

Für eine offene Menge $U \subset \mathbf{R}^n$ sei $\mathcal{T}(U)$ die Menge aller Treppenfunktionen wie in (1) mit $Q_i \subset U$. Dann gilt analog $\mathcal{T}(U) \subset \mathcal{L}^p(U)$ für alle $p \geq 1$.

9.14. Satz (Approximation durch Treppenfunktionen). Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{L}^p(U)$. Dann gibt es eine Folge (φ_l) von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}(U)$, sodass $\lim_{l \rightarrow \infty} \varphi_l(x) = f(x)$ für fast alle x , und $\lim_{l \rightarrow \infty} \|f - \varphi_l\|_p = 0$.

Beweis. Nach Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil und weitere Zerlegung in positiven und negativen Anteil sieht man wegen 9.4, dass es genügt, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten. Wir zeigen in einem ersten Beweisschritt, dass $\|f - \psi\|_p$ für ein geeignetes $\psi \in \mathcal{T}(U)$ beliebig klein wird.

Wegen $0 \leq f \in \mathcal{L}^p$ ist $\|f\|_p^p = \|f^p\|_1 < \infty$. Nach Definition der 1-Norm in 5.1.1 gibt es daher zu gegebenem $\varepsilon > 0$ einen kompakten Quader Q , sodass $\int_Q f^p > \int_{\mathbf{R}^n} f^p - \varepsilon$, oder

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus Q} f^p < \varepsilon. \quad (1)$$

Weiter ist f^p über Q integrierbar. Daher gibt es eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass $|\mathcal{S}_Z(f^p) - \int_Q f^p| < \varepsilon$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho$. Sei

$$\varrho'(x) := \begin{cases} \min(\varrho(x), d(x, \mathbb{C}U)) & \text{falls } x \in Q \cap U, \\ \varrho(x) & \text{falls } x \in Q \setminus U, \end{cases}$$

und sei $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ eine ϱ' -feine Zerlegung von Q . Dann ist Z auch ϱ -fein, und daher nach dem Lemma von Henstock 4.3

$$\sum_{i \in E} \int_{Q_i} |f^p - f(\xi_i)^p| \leq 2\varepsilon.$$

Betrachte die Treppenfunktion

$$\psi := \sum_{i \in E} f(\xi_i) \chi_{Q_i}.$$

Die Definition von ϱ' bewirkt, dass für eine Stützstelle $\xi_i \in U$ der zugehörige Teilquader Q_i ganz in U liegt. Für $\xi_i \notin U$ ist $f(\xi_i) = 0$. Das zeigt $\psi \in \mathcal{T}(U)$. Weil die Q_i fast disjunkt sind, ist ψ auf dem Inneren von Q_i konstant gleich $f(\xi_i)$. Für reelle $a, b \geq 0$ gilt die Ungleichung $|a - b|^p \leq |a^p - b^p|$ (Aufgabe!) und daher $|f - \psi|^p \leq |f^p - \psi^p|$. Es folgt mit 4.1.2 und weil die Ränder der Q_i Nullmengen sind:

$$\int_Q |f - \psi|^p \leq \int_Q |f^p - \psi^p| = \sum_{i \in E} \int_{Q_i} |f^p - \psi^p| = \sum_{i \in E} \int_{Q_i} |f^p - f(\xi_i)^p| \leq 2\varepsilon. \quad (2)$$

Die Funktion ψ verschwindet ausserhalb von Q . Somit sehen wir aus (1) und (2), dass

$$\|f - \psi\|_p^p = \int_{\mathbf{R}^n} |f - \psi|^p = \int_{\mathbf{R}^n \setminus Q} |f - \psi|^p + \int_Q |f - \psi|^p < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon,$$

wie behauptet.

Nach dem soeben Bewiesenen können wir nun Treppenfunktionen $\psi_k \in \mathcal{T}(U)$ so wählen, dass $\|f - \psi_k\|_p \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Insbesondere ist die Folge (ψ_k) eine Cauchyfolge in \mathcal{L}^p . Nach dem Satz von Fischer-Riesz gibt es also ein $g \in \mathcal{L}^p$ und eine Teilfolge $(\varphi_l) = (\psi_{k_l})$ mit $\varphi_l \rightarrow g$ punktweise fast überall und $\|g - \psi_k\|_p \rightarrow 0$. Hieraus folgt $\|g - f\|_p \leq \|g - \psi_k\|_p + \|\psi_k - f\|_p$ für alle k und somit $\|g - f\|_p = 0$. Also gilt $g = f$ fast überall, und daher konvergiert die Teilfolge φ_l auch punktweise fast überall gegen f .

9.15. Die Transformationsformel für \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismen. Mit dem Satz von Fischer-Riesz und dem Approximationssatzes ist es nun möglich, die in 8.5 angekündigte verschärfte Version der Transformationsformel zu beweisen. Wir verwenden die Bezeichnungen von 8.5, setzen jetzt aber nur einen \mathcal{C}^1 -Diffeomorphismus $\Phi : U \rightarrow V$ voraus. Die in der Formulierung von 8.5 auftretende messbare Menge

$M \subset U$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich U annehmen, indem wir f durch Null auf ganz V fortsetzen. Ferner können wir durch Zerlegung in positiven und negativen Anteil $f \geq 0$ annehmen. Wir definieren die Funktion f^* auf U durch $f^* := (f \circ \Phi) |\det \Phi'|$.

Die Transformationsformel folgt für den Fall, dass $f = \varphi \in \mathcal{T}(V)$ eine Treppenfunktion ist, leicht aus dem Transformationssatz 8.4. Dies lässt sich auch so formulieren: Es ist $\varphi^* \in \mathcal{L}^1(U)$ und die lineare Abbildung $\varphi \mapsto \varphi^*$ von $\mathcal{T}(V)$ nach $\mathcal{L}^1(U)$ erhält die 1-Norm:

$$\|\varphi\|_1 = \int_V \varphi = \int_U \varphi^* = \|\varphi^*\|_1. \quad (1)$$

Nun sei $f \in \mathcal{L}^1(V)$ beliebig. Wähle $\varphi_l \in \mathcal{T}(V)$ wie in 9.14. Wegen (1) bilden die φ_l^* eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(U)$. Also gibt es nach dem Satz von Fischer-Riesz ein $g \in \mathcal{L}^1(U)$ mit $\|g - \varphi_l^*\|_1 \rightarrow 0$, und eine Teilfolge $\varphi_{l_j}^*$ konvergiert punktweise fast überall gegen g . Andererseits gibt es eine Nullmenge $N \subset V$, sodass die φ_l auf $V \setminus N$ punktweise gegen f konvergieren. Folglich konvergieren die Funktionen φ_l^* auf $U \setminus \Phi^{-1}(N)$ punktweise gegen f^* . Weil $\Phi^{-1}: V \rightarrow U$ nach Satz 6.12 Nullmengen erhält, ist $g = f^*$ fast überall. Also gilt $f^* \in \mathcal{L}^1(U)$, und wegen der Stetigkeit der 1-Norm (umgekehrte Dreiecksungleichung!) und (1) ist

$$\int_V f = \|f\|_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \|\varphi_l\|_1 = \lim_{l \rightarrow \infty} \|\varphi_l^*\|_1 = \|f^*\|_1 = \int_U f^*.$$

Umgekehrt sei f eine Funktion auf V und $f^* \in \mathcal{L}^1(U)$. Dann zeigt die Formel für die Ableitung der Umkehrabbildung, dass $f = (f^* \circ \Phi^{-1}) |\det(\Phi^{-1})'|$, und daher folgt die Integrierbarkeit von f durch Anwendung des soeben Bewiesenen auf Φ^{-1} .

§10. Alternierende Differentialformen

Übersicht. In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die in Analysis 2 eingeführten 1- und 2-Formen zu alternierenden Differentialformen beliebiger Stufe. Die grundlegenden Operationen sind das äußere Produkt, die äußere Ableitung, und das Zurückholen von Differentialformen unter differenzierbaren Abbildungen.

10.1. Alternierende Multilinearformen. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Unter einer alternierenden Multilinearform der Stufe p , oder kurz einer p -Form, auf V verstehen wir eine Abbildung $\alpha: V^p \rightarrow K$, die in jedem ihrer Argumente linear ist, und verschwindet, sobald zwei Argumente gleich sind. Wir bezeichnen mit $\text{Alt}^p(V)$ den Vektorraum der p -Formen auf V . Ganz analog kann man auch p -Formen mit Werten in einem anderen K -Vektorraum W betrachten.

Für $\alpha \in \text{Alt}^p(V)$ und $\beta \in \text{Alt}^q(V)$ definieren wir das *äußere Produkt* $\alpha \wedge \beta$ durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(p,q)} \text{sgn}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}),$$

wobei $\mathfrak{S}(p, q)$ die Menge aller Permutationen π in der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_{p+q} sei, für die

$$\pi(1) < \dots < \pi(p) \quad \text{und} \quad \pi(p+1) < \dots < \pi(p+q).$$

Dann ist $\alpha \wedge \beta \in \text{Alt}^{p+q}(V)$, und es gelten die folgenden Regeln:

(i) Das Produkt ist assoziativ:

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma).$$

(ii) Das Produkt ist bilinear.

(iii) Das Produkt ist graduiert kommutativ:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha.$$

Den Beweis findet man in Lehrbüchern der linearen Algebra.

Als Spezialfälle notieren wir:

$$\begin{aligned} p = q = 1: & \quad (\alpha \wedge \beta)(v, w) = \alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v), \\ p = 1, q = 2: & \quad (\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2, v_3) = \sum_{\text{zyklisch}} \alpha(v_i)\beta(v_j, v_k). \end{aligned}$$

10.2. Lemma. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ Linearformen auf einem Vektorraum V . Dann gilt für ihr äußeres Produkt $\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_p$ und beliebige Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$:

$$(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_p)(v_1, \dots, v_p) = \det(\lambda_i(v_j)).$$

Beweis durch Induktion nach p . Für $p = 1$ ist das klar. Für den Induktionsschluss setzen wir $\alpha = \lambda_1$ und $\beta = \lambda_2 \wedge \dots \wedge \lambda_p$. Nun besteht $\mathfrak{S}(1, p-1)$ genau aus den p Permutationen

$$(\pi_i(1), \dots, \pi_i(p)) = (i, 1, \dots, \hat{i}, \dots, p) \quad (i = 1, \dots, p)$$

und das Vorzeichen von π_i ist $(-1)^{i+1}$. Also folgt nach Definition des äußeren Produkts und Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \alpha(v_i) \beta(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \lambda_1(v_i) \det(\lambda_j(v_k))_{j=2, \dots, p; k \neq i} \\ &= \det(\lambda_i(v_j)), \end{aligned}$$

unter Verwendung des Entwicklungssatzes für Determinanten (Entwicklung nach der ersten Zeile).

10.3. Satz. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper K , sei b_1, \dots, b_n eine Basis von V und β^1, \dots, β^n die dazu duale Basis von V^* . Dann hat $\text{Alt}^p(V)$ die Basis

$$\beta^I = \beta^{i_1} \wedge \dots \wedge \beta^{i_p},$$

wobei $I = (i_1, \dots, i_p)$ die (aufsteigend geordneten) p -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft. Die Dimension von $\text{Alt}^p(V)$ ist daher $\binom{n}{p}$.

Beweis. Sei $J = (j_1, \dots, j_p)$ eine weitere aufsteigend geordnete Teilmenge. Auf Grund von Lemma 10.2 und Standard-Eigenschaften der Determinante ist dann

$$\beta^I(b_{j_1}, \dots, b_{j_p}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } I = J, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus folgt die lineare Unabhängigkeit der β^I . Um zu zeigen, dass die β^I ganz $\text{Alt}^p(V)$ aufspannen, definieren wir, für beliebiges $\alpha \in \text{Alt}^p(V)$, die Komponenten $a_I := a_{i_1 \dots i_p} := \alpha(b_{i_1}, \dots, b_{i_p})$. Dann ist

$$\alpha = \sum_I a_I \beta^I,$$

denn beide Seiten sind alternierende Multilinearformen, die für alle $(b_{j_1}, \dots, b_{j_p})$ übereinstimmen und daher gleich sind (Details als Aufgabe).

10.4. Definition (alternierende Differentialformen). Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen. Eine *alternierende Differentialform der Stufe p* oder kurz eine *p -Form auf U* ist eine Funktion

$$\omega: U \times (\mathbf{R}^n)^p \rightarrow \mathbf{R} \quad (1)$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes feste $x \in U$ die Funktion

$$\omega_x: (v_1, \dots, v_p) \mapsto \omega(x; v_1, \dots, v_p)$$

in $\text{Alt}^p(\mathbf{R}^n)$ ist. Nach Definition gilt also

$$\omega_x(v_1, \dots, v_p) = \omega(x; v_1, \dots, v_p),$$

und man kann daher ω auch auffassen als eine Abbildung

$$\omega: U \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbf{R}^n), \quad x \mapsto \omega_x. \quad (2)$$

Wir nennen ω *stetig, differenzierbar, integrierbar, ...*, genau dann, wenn die Abbildung (2) die entsprechende Eigenschaft hat. Das ist sinnvoll, weil nach Satz 10.3 der Wertebereich $\text{Alt}^p(\mathbf{R}^n)$ ein endlichdimensionaler Vektorraum ist. Im Fall der Stetigkeit bzw. Differenzierbarkeit bedeutet diese Definition dasselbe wie die Stetigkeit der Abbildung (1) auf $U \times (\mathbf{R}^n)^p$, nicht jedoch im Fall der Integrierbarkeit.

Alternierende Differentialformen mit Werten in \mathbf{C} oder noch allgemeiner mit Werten in irgend einem \mathbf{R}^k werden ganz analog definiert. Die Menge der p -Formen auf U bezeichnen wir mit $\Omega^p(U)$, die der komplexwertigen Formen mit $\Omega^p(U; \mathbf{C})$.

10.5. Das äußere Produkt von Differentialformen. Seien $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\psi \in \Omega^q(U)$ Differentialformen auf der offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^n$. Dann wird $\omega \wedge \psi \in \Omega^{p+q}(U)$ definiert durch $(\omega \wedge \psi)_x = \omega_x \wedge \psi_x$. Wegen 10.1 bedeutet das also

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \psi)(x; v_1, \dots, v_{p+q}) &= (\omega_x \wedge \psi_x)(v_1, \dots, v_{p+q}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(p,q)} \text{sgn}(\pi) \omega(x; v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \psi(x; v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}), \end{aligned}$$

für alle $x \in U$ und $v_i \in \mathbf{R}^n$. Wir identifizieren die 0-Formen mit den Funktionen auf U . Dann ist $f\omega \in \Omega^p(U)$ durch

$$(f\omega)(x; v_1, \dots, v_p) = f(x) \omega(x; v_1, \dots, v_p)$$

gegeben. Aus den Eigenschaften der äußeren Multiplikation in 10.3 ergeben sich leicht die folgenden Regeln:

$$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3), \quad (1)$$

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{pq} \psi \wedge \omega, \quad (2)$$

$$(f_1 \omega_1 + f_2 \omega_2) \wedge \psi = f_1 \omega_1 \wedge \psi + f_2 \omega_2 \wedge \psi. \quad (3)$$

Insbesondere ist $\Omega^p(U)$ ein *Modul* über dem Ring $\Omega^0(U)$ aller Funktionen auf U .

Seien x^1, \dots, x^n die Koordinatenfunktionen auf \mathbf{R}^n . Dann ist $dx^i(x; v) = v^i = \varepsilon^i(v)$ für beliebiges $v \in \mathbf{R}^n$ (siehe Analysis 2), mit anderen Worten: Es ist $(dx^i)_x = \varepsilon^i$, die duale Basis zur Standardbasis e_i des \mathbf{R}^n . Nach Definition der äußeren Multiplikation von Differentialformen ist daher

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})_x = (dx^{i_1})_x \wedge \dots \wedge (dx^{i_p})_x = \varepsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon^{i_p}, \quad (4)$$

und daher folgt aus Lemma 10.2:

$$(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})(x; v_1, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \dots & v_p^{i_1} \\ v_1^{i_2} & \dots & v_p^{i_2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_p} & \dots & v_p^{i_p} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

10.6. Satz (Normalform). $\Omega^p(U)$ ist ein freier Modul vom Rang $\binom{n}{p}$ über dem Ring $\Omega^0(U)$: jedes $\omega \in \Omega^p(U)$ lässt sich schreiben als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I f_I dx^I, \quad (1)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen $f_{i_1 \dots i_p} = f_I \in \Omega^0(U)$. Die Differentialform ω ist genau dann von der Klasse \mathcal{C}^k , wenn die Funktionen f_I von der Klasse \mathcal{C}^k sind.

Beweis. Für jede aufsteigend geordnete Teilmenge $I = (i_1, \dots, i_p)$ von $\{1, \dots, n\}$ sei

$$f_I(x) := f_{i_1 \dots i_p}(x) := \omega(x; e_{i_1}, \dots, e_{i_p}). \quad (2)$$

Dann folgt (1) aus Satz 10.3 und 10.5.4.

Zum Beweis der letzten Aussage braucht man nur zu bemerken, dass (nach Identifizierung von $\text{Alt}^p(\mathbf{R}^n)$ mit $\mathbf{R}^{\binom{n}{p}}$ vermöge der Basis ε^I) die f_I genau die Komponenten von ω (betrachtet wie in 10.4.2) sind.

10.7. Spezialfälle. Differentialformen der Stufe 1 und 2 wurden schon in Analysis 2 ausführlich behandelt. Wir betrachten jetzt Formen der Stufen n und $n - 1$. Eine n -Form hat die Gestalt

$$\omega = f_{1 \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

ist also durch eine einzige Funktion $f = f_{1 \dots n}$ bestimmt. Trotzdem ist eine n -Form nicht dasselbe wie eine Funktion! Das zeigt sich besonders deutlich, wenn man andere Koordinaten als die kartesischen verwendet oder wenn man das Verhalten unter Abbildungen betrachtet, siehe 10.11. Gemäß 10.5.5 gilt explizit

$$\omega(x; \mathbf{v}) = f(x) \det \mathbf{v}, \quad (1)$$

für ein n -Tupel $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ von Vektoren, identifiziert mit der $n \times n$ -Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_n .

Eine $(n - 1)$ -Form ist gegeben durch

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_{1\hat{i}\dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Es ist oft praktisch, ω in der Form

$$\omega = \sum_{i=1}^n f^i \Delta_i \quad (2)$$

zu schreiben, wobei $f^i := (-1)^{i-1} f_{1\hat{i}\dots n}$ und die $(n - 1)$ -Formen Δ_i durch

$$\Delta_i := (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \quad (3)$$

definiert sind. Im \mathbf{R}^3 ist also $\Delta_1 = dy \wedge dz$, $\Delta_2 = dz \wedge dx$, $\Delta_3 = dx \wedge dy$.

Eine $(n - 1)$ -Form ist also durch n Funktionen f^1, \dots, f^n bestimmt und scheint daher so etwas wie ein Vektorfeld zu sein. Wiederum ist das nicht der Fall, man „merkt“ das aber erst beim Übergang zu anderen Koordinatensystemen oder beim Verhalten unter Abbildungen.

Eine besonders wichtige $(n - 1)$ -Form ist die *Raumwinkelform*

$$\Theta_{n-1} = \frac{1}{r^n} \sum_{i=1}^n x^i \Delta_i \quad (4)$$

auf $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, wobei $r = ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^{1/2}$ der Euklidische Abstand vom Nullpunkt ist. Für $n = 2$ erhält man

$$\Theta_1 = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

die schon in Analysis 2, §9 betrachtete Winkelform, für $n = 3$ ist

$$\Theta_2 = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

10.8. Die äußere Ableitung. In Verallgemeinerung der äußeren Ableitung von Funktionen (0-Formen) und 1-Formen in Analysis 2 definieren wir nun die äußere Ableitung einer beliebigen stetig differenzierbaren p -Form $\omega \in \Omega^p(U)$, dargestellt wie in 10.6.1, durch

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_p} df_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} = \sum_I f_I dx^I. \quad (1)$$

Für Beispiele im Fall $p \leq 1$ siehe Analysis 2. Die äußere Ableitung einer n -Form ist eine $(n + 1)$ -Form und daher Null. Für eine $(n - 1)$ -Form, dargestellt wie in 10.7.2, gilt

$$d\left(\sum_{i=1}^n f^i \Delta_i\right) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^i}\right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (2)$$

Zum Beweis beachte man, dass nach den Regeln für das äußere Produkt

$$\begin{aligned} df^i \wedge \Delta_i &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^k} dx^k \wedge (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial f^i}{\partial x^i} (-1)^{i-1} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich zum Beispiel, unter Verwendung von $r dr = \sum x^i dx^i$, also $\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{x^i}{r}$, dass die äußere Ableitung der Raumwinkelform Null ist:

$$d\Theta_{n-1} = 0; \quad (3)$$

denn

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{x^i}{r^n} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{r^n} + x^i \cdot \frac{(-n)}{r^{n+1}} \cdot \frac{x^i}{r} \right) = \frac{n}{r^n} - n \sum_{i=1}^n \frac{(x^i)^2}{r^{n+2}} = 0.$$

Die Rechenregeln für die äußere Ableitung sind im folgenden Satz zusammengefasst.

10.9. Satz. *Die äußere Ableitung ist \mathbf{R} -linear:*

$$d(\omega + \psi) = d\omega + d\psi, \quad d(c\omega) = c d\omega, \quad (1)$$

und erfüllt eine Produktregel mit Vorzeichen: Für $\omega \in \Omega^p(U)$ und $\psi \in \Omega^q(U)$ ist

$$d(\omega \wedge \psi) = d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi. \quad (2)$$

Schließlich ist die doppelte äußere Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Differentialform Null:

$$d(d\omega) = 0. \quad (3)$$

Beweis. (1) ist klar auf Grund der Definition. Zum Beweis von (2) genügt es wegen (1), ω und ψ als Monome anzunehmen, etwa $\omega = f dx^I$ und $\psi = g dx^J$, wobei $I = (i_1, \dots, i_p)$ und $J = (j_1, \dots, j_q)$. Bemerke zunächst, dass $d\omega = df \wedge dx^I$ auch dann gilt, wenn die Indizes i_1, \dots, i_p nicht aufsteigend sind; denn durch Vertauschung der Faktoren dx^{i_k} kann man sie immer in aufsteigende Reihenfolge bringen, und dabei ändert sich nur das Vorzeichen, sodass die Behauptung aus (1) folgt. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \psi) &= d(fg dx^I \wedge dx^J) \\ &= d(fg) \wedge dx^I \wedge dx^J = (g df + f dg) \wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= (df \wedge dx^I) \wedge (g dx^J) + (-1)^p (f dx^I) \wedge (dg \wedge dx^J) \\ &= d\omega \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge d\psi. \end{aligned}$$

Hierbei entsteht das Vorzeichen $(-1)^p$ durch das Vertauschen der 1-Form dg mit der p -Form dx^I wegen der graduierten Kommutativität des äußeren Produktes (10.5.2).

Für (3) können wir wieder $\omega = f dx^I$ als Monom annehmen. Dann ist $d\omega = df \wedge dx^I$, und nach (2)

$$d(d\omega) = (d(df)) \wedge dx^I + (-1)^1 df \wedge d(dx^I).$$

Nach Analysis 2, Satz 10.6 gilt $d(df) = 0$, und $d(dx^I) = 0$ ist klar nach Definition.

10.10. Geschlossene und exakte Formen. Eine (stetig differenzierbare) p -Form $\omega \in \Omega^p(U)$ heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$, und *exakt*, falls $\omega = d\alpha$ für ein geeignetes zweimal stetig differenzierbares $\alpha \in \Omega^{p-1}(U)$. In diesem Fall nennt man α auch eine *Stammform* von ω . Nach 10.9.3 ist jede exakte Differentialform geschlossen, aber im Allgemeinen nicht umgekehrt. Zum Beispiel werden wir sehen (siehe 16.13(b)), dass die geschlossene Winkelform Θ_{n-1} auf $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ nicht exakt ist.

10.11. Satz (Zurückholen unter Abbildungen). Seien $U \subset \mathbf{R}^n$ und $U' \subset \mathbf{R}^m$ offen und sei $F: U \rightarrow U'$ stetig differenzierbar. Für $\omega \in \Omega^p(U')$ definiere

$$(F^*\omega)(u; v_1, \dots, v_p) = \omega(F(u); F'(u)v_1, \dots, F'(u)v_p), \quad (1)$$

für alle $u \in U$ und $v_1, \dots, v_p \in \mathbf{R}^m$. Dann ist $F^*: \Omega^p(U') \rightarrow \Omega^p(U)$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

- (i) F^* ist \mathbf{R} -linear.
- (ii) F^* ist multiplikativ: $F^*(\omega \wedge \psi) = F^*(\omega) \wedge F^*(\psi)$.
- (iii) Falls F zweimal stetig differenzierbar ist, vertauscht F^* mit der äußeren Ableitung: $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$.
- (iv) Ist $U'' \subset \mathbf{R}^l$ offen und $G: U' \rightarrow U''$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$(G \circ F)^*(\omega) = F^*(G^*(\omega))$$

für $\omega \in \Omega^p(U'')$.

Beweis. Die Ableitung $F'(u): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ist eine lineare Abbildung. Daher zeigt (1), dass $(F^*\omega)(u; v_1, \dots, v_p)$ multilinear und alternierend als Funktion der Vektoren v_1, \dots, v_p ist. Also ist $F^*(\omega)$ tatsächlich ein Element von $\Omega^p(U)$. Die Eigenschaft (i) ist klar auf Grund der Definition, und (ii) folgt leicht aus der Definition der äußeren Multiplikation und wieder der Linearität von $F'(u)$. Zum Beweis von (iii) bezeichnen wir die Koordinaten im \mathbf{R}^m mit y^1, \dots, y^m . Dann ist $y^i \circ F = F^i$ die i -te Komponente von F . Wegen (i) und der Linearität der äußeren Ableitung können wir $\omega = f dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}$ als Monom annehmen. Dann ist $F^*(df) = d(f \circ F)$ nach Analysis 2, Satz 9.5, also insbesondere $F^*(dy^i) = dF^i$, und daher $F^*(\omega) = (f \circ F) dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_p}$, wegen (ii). Weiter ist $d(dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_p}) = 0$ nach den Regeln 10.9.2 und 10.9.3 für die äußere Ableitung, und es folgt

$$\begin{aligned} d(F^*\omega) &= d((f \circ F) \cdot dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_p}) \\ &= d(f \circ F) \wedge dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_p} + (f \circ F) d(dF^{i_1} \wedge \dots \wedge dF^{i_p}) \\ &= F^*(df) \wedge F^*(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}) + 0 \\ &= F^*(df \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p}) = F^*(d(f dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_p})) \\ &= F^*(d\omega). \end{aligned}$$

Schließlich ist (iv) eine leichte Folgerung aus der Definition (1) und der Kettenregel.

10.12. Beispiele. (a) Sei Φ wie in 8.7 die Abbildung der Polarkoordinaten im \mathbf{R}^3 bzw. \mathbf{R}^n . Dann ist

$$\Phi^*(\Theta_2) = \cos \vartheta \cdot d\varphi \wedge d\vartheta \quad (1)$$

und allgemeiner, mit $m = n - 2$,

$$\Phi^*(\Theta_{n-1}) = \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^m \vartheta_m \cdot d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \dots \wedge d\vartheta_m. \quad (2)$$

Beweis als Aufgabe.

(b) Sei $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ eine n -Form und $F : U \rightarrow V$ eine Abbildung zwischen offenen Mengen des \mathbf{R}^n , gegeben durch $x^i \circ F = F^i(u^1, \dots, u^n)$. Dann ist

$$F^*(dx^i) = d(x^i \circ F) = dF^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^i}{\partial u^j} du^j.$$

Weil das äußere Produkt multilinear und alternierend ist, ergibt eine Standardrechnung und die Entwicklungsformel für die Determinante, dass

$$F^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = dF^1 \wedge \cdots \wedge dF^n = \frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} du^1 \wedge \cdots \wedge du^n, \quad (3)$$

mit der in 8.5.3 eingeführten Bezeichnung für die Funktionaldeterminante. Allgemeiner gilt für eine Abbildung einer offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^p$ nach $V \subset \mathbf{R}^n$:

$$F^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \frac{\partial(F^{i_1}, \dots, F^{i_p})}{\partial(u^1, \dots, u^p)} du^1 \wedge \cdots \wedge du^p. \quad (4)$$

Details als Aufgabe.

10.13.* Inneres Produkt von Differentialformen und Vektorfeldern. Sei $\omega \in \Omega^p(U)$ und $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ ein Vektorfeld auf U . Dann erhält man durch Einsetzen von f in ω (an erster Stelle) eine $(p-1)$ -Form $\omega \lrcorner f$, explizit:

$$(\omega \lrcorner f)(x; v_2, \dots, v_p) = \omega(x; f(x), v_2, \dots, v_p). \quad (1)$$

Im Fall $p = 0$ setzt man $\omega \lrcorner f := 0$. Die $(p-1)$ -Form $\omega \lrcorner f$ heißt das *innere Produkt* von ω und f . Statt $\omega \lrcorner f$ findet man auch die Bezeichnungen $i_f \omega$ oder $i(f)\omega$. Es ist leicht zu sehen, dass $\omega \lrcorner f$ in ω und f bezüglich Funktionen linear ist. Weiter gelten die folgenden Regeln:

$$(\omega \lrcorner f) \lrcorner f = 0, \quad (2)$$

$$(\omega \wedge \psi) \lrcorner f = (\omega \lrcorner f) \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge (\psi \lrcorner f). \quad (3)$$

Die Operation $\omega \mapsto \omega \lrcorner f$ verhält sich also formal ähnlich wie die äußere Ableitung, aber es ist nur eine algebraische Ableitung; die Koeffizientenfunktionen von ω oder f werden nicht differenziert. Spezialfälle sind

$$dx^j \lrcorner e_i = \delta_i^j, \quad (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \lrcorner e_i = \Delta_i,$$

wobei der i -te Standardbasisvektor e_i als konstantes Vektorfeld betrachtet wird. Statt $\omega \lrcorner e_i$ findet man in der älteren Literatur die auf den ersten Blick abenteuerliche Bezeichnung $\frac{\partial \omega}{\partial(dx^i)}$. Bei näherem Hinsehen erweist sich dies jedoch als sehr vernünftig (Aufgabe!).

§11. Dichten

Übersicht. p -dimensionale Dichten sind die „richtigen“ Integranden für die Integration über $p(\leq n)$ -dimensionale Teilmengen im \mathbf{R}^n . Ein wichtiges Beispiel ist das sogenannte p -dimensionale Oberflächenelement. Beim Zurückholen unter Abbildungen verhalten sich Dichten ähnlich wie Differentialformen. Selbst für $p = n$ ist es vorteilhaft, Dichten statt Funktionen als Integranden zu verwenden: Zum einen wird der Gebrauch (leider nicht der Beweis!) der Transformationsformel einfacher in dem Sinne, dass sich der in 8.5.1 rechts stehende Integrand durch eine automatische Rechnung wie beim Zurückholen von Differentialformen ergibt. Zum anderen erhalten wir eine natürliche Interpretation der bisher nur formal eingeführten Schreibweise $\int_M f(x) dx^1 \cdots dx^n$. Schließlich erlaubt die Benützung von Dichten als Integranden die Übertragung der Integrationstheorie vom \mathbf{R}^n auf einen beliebigen n -dimensionalen Vektorraum, unabhängig von der Auswahl einer Basis.

11.1. Definition (Dichten). Für ein p -Tupel $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ von Vektoren im \mathbf{R}^n und eine Matrix $A = (a_j^i) \in \text{Mat}_p(\mathbf{R})$ sei

$$\mathbf{v}A = (\sum_{i=1}^p v_i a_1^i, \dots, \sum_{i=1}^p v_i a_p^i)$$

das durch formale Multiplikation des Zeilenvektors \mathbf{v} mit der Matrix A entstehende p -Tupel von Vektoren. Identifiziert man \mathbf{v} mit der linearen Abbildung $\mathbf{v}: \mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$, die $e_i \mapsto v_i$ abbildet, und fasst A als lineare Selbstabbildung des \mathbf{R}^p auf, dann ist $\mathbf{v}A = \mathbf{v} \circ A$ die Zusammensetzung dieser Abbildungen.

Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine Teilmenge. Eine p -dimensionale Dichte, kurz p -Dichte, auf M ist eine Abbildung $\mathfrak{w}: M \times (\mathbf{R}^n)^p \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in M$, $\mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^p$ und $A \in \text{Mat}_p(\mathbf{R})$ gilt

$$\mathfrak{w}(x; \mathbf{v}A) = \mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) \cdot |\det A|. \quad (1)$$

Die Menge der p -Dichten auf M bezeichnen wir mit $\mathfrak{W}^p(M)$. Unter einer 0-Dichte verstehen wir einfach eine Funktion auf M .

In der Literatur heißen die n -Dichten auch *skalare Dichten* (im Unterschied zu sogenannten Vektor- und Tensordichten) *vom Gewicht 1*, weil $|\det A|$ in (1) den Exponenten 1 hat. Dichten anderen Gewichts sind entsprechend zu definieren.

Wie bei alternierenden Differentialformen kann man eine Dichte auf M auch auffassen als eine Abbildung $x \mapsto \mathfrak{w}_x$ von M in den Vektorraum aller Abbildungen $\varphi: (\mathbf{R}^n)^p \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft $\varphi(\mathbf{v}A) = \varphi(\mathbf{v}) |\det A|$. (Im Gegensatz zu alternierenden Multilinearformen ist aber dieser Vektorraum für $0 < p < n$ nicht mehr endlichdimensional.) Wir sagen entsprechend dieser Auffassung, zwei Dichten \mathfrak{w} und $\tilde{\mathfrak{w}}$ seien *auf einer Teilmenge $M' \subset M$ gleich*, wenn $\mathfrak{w}_x = \tilde{\mathfrak{w}}_x$ für alle $x \in M'$, wenn sie also auf $M' \times (\mathbf{R}^n)^p$ übereinstimmen.

Wir nennen eine Dichte \mathfrak{w} im Punkt x *nicht negativ*, geschrieben $\mathfrak{w}_x \geq 0$, wenn $\mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) \geq 0$ für alle \mathbf{v} . Wegen des in (1) auftretenden Betrages der Determinante ist das sinnvoll. (Im Gegensatz dazu ist es nicht sinnvoll, für eine Differentialform ω eine ähnliche Definition zu treffen, warum?) Wenn $\mathfrak{w}_x \geq 0$ für alle x im Definitionsbereich von \mathfrak{w} , so schreiben wir $\mathfrak{w} \geq 0$. Beachte aber, dass man, wieder wegen (1) und anders als für eine Funktion, nicht sinnvollerweise von einem numerischen Wert von \mathfrak{w} im Punkt x sprechen kann. Jedoch ist es immer noch möglich, eine Dichte \mathfrak{w} in ihren positiven und negativen Anteil zu zerlegen, $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}_+ - \mathfrak{w}_-$, wobei

$$(\mathfrak{w}_+)_x = \begin{cases} \mathfrak{w}_x & \text{falls } \mathfrak{w}_x \geq 0, \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{w}_x < 0, \end{cases}$$

und \mathfrak{w}_- analog definiert ist. Schließlich folgt aus der Definition sofort, dass der Betrag $|\mathfrak{w}|$ einer Dichte \mathfrak{w} eine nicht negative Dichte ist.

11.2. Beispiele. (a) Ist ω eine p -Form auf M , dann ist der Betrag $|\omega|$ eine p -Dichte. In der Tat ist $\omega(x; \mathbf{v})$ multilinear und alternierend in \mathbf{v} , und daher zeigt eine Standardrechnung der linearen Algebra, dass

$$\begin{aligned}\omega(x; \mathbf{v}A) &= \sum_{i_1, \dots, i_p} \omega(x; v_{i_1}, \dots, v_{i_p}) a_1^{i_1} \cdots a_p^{i_p} \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \omega(x; v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) a_1^{\pi(1)} \cdots a_p^{\pi(p)} \\ &= \omega(x; \mathbf{v}) \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi) a_1^{\pi(1)} \cdots a_p^{\pi(p)} \right) = \omega(x; \mathbf{v}) \cdot \det A.\end{aligned}\quad (1)$$

Hieraus folgt durch Übergang zum Betrag, dass 11.1.1 für $\mathfrak{w} = |\omega|$ erfüllt ist.

(b) Die Euklidische Norm ergibt eine 1-Dichte auf \mathbf{R}^n durch $(x; v) \mapsto \|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}$, genannt das *Linielement*. Es wird aus historischen Gründen mit ds bezeichnet, obwohl es nicht das Differential einer Funktion s ist(!), und lässt sich mit den Differentialformen dx^i folgendermaßen ausdrücken:

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^n (dx^i)^2}.\quad (2)$$

Der Beweis folgt sofort aus $dx^i(x; v) = v^i$.

(c) Wir verallgemeinern das vorige Beispiel und erinnern zunächst an die Definition der *Gramschen Determinante* von p Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_p)$ im \mathbf{R}^n :

$$\operatorname{Gr}(\mathbf{v}) = \det(\langle v_i, v_j \rangle) = \det(\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{v}),$$

wobei die spitzen Klammern das Standard-Skalarprodukt im \mathbf{R}^n bezeichnen und in der zweiten Formel \mathbf{v} als eine $n \times p$ -Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_p aufgefasst wird. Es folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Gr}(\mathbf{v}A) &= \det((\mathbf{v}A)^T \cdot \mathbf{v}A) = \det(A^T (\mathbf{v}^T \mathbf{v}) A) \\ &= \det(A^T) \det(\mathbf{v}^T \mathbf{v}) \det(A) = \operatorname{Gr}(\mathbf{v}) \det(A)^2\end{aligned}\quad (3)$$

für eine $p \times p$ -Matrix A . Da $\mathbf{v}^T \mathbf{v}$ stets positiv semidefinit ist, haben wir $\operatorname{Gr}(\mathbf{v}) \geq 0$, und können somit eine p -Dichte $do_p = do_p^n$, genannt das *p -dimensionale Oberflächenelement im \mathbf{R}^n* , definieren als

$$do_p(x; \mathbf{v}) := \sqrt{\operatorname{Gr}(\mathbf{v})}.\quad (4)$$

Auch hier bedeutet der Buchstabe d nicht das Differential einer Funktion, sondern ist nur eine (leider) eingeführte Schreibweise. Statt do_p sind auch die Bezeichnungen $d\sigma_p, dF_p, dS_p$ usw. üblich. Um do_p durch Differentialformen auszudrücken, benützen wir die sogenannte verallgemeinerte Lagrangesche Identität, die man in geeigneten Lehrbüchern der linearen Algebra findet:

$$\operatorname{Gr}(\mathbf{v}) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & \cdots & v_p^{i_1} \\ v_1^{i_2} & \cdots & v_p^{i_2} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i_p} & \cdots & v_p^{i_p} \end{pmatrix}^2.\quad (5)$$

Wegen 10.5.5 lässt sich nun do_p schreiben als

$$do_p = \sqrt{\sum_{i_1 < \dots < i_p} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})^2} = \sqrt{\sum_I (dx^I)^2}, \quad (6)$$

wobei I die aufsteigend geordneten p -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft. Offenbar ist $ds = do_1$, und für $p = n - 1$ und $p = n$ haben wir offenbar

$$do_{n-1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}, \quad do_n = |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|.$$

Letzteres heißt auch das n -dimensionale Volumenelement. Ein viel benützter Spezialfall ist der des 2-dimensionalen Oberflächenelements im \mathbf{R}^3 , das sich in Kartesischen Koordinaten x, y, z als

$$do_2 = \sqrt{(dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2} \quad (7)$$

darstellt.

(d) Sei $H : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ eine beliebige absolut homogene Funktion vom Grad 1, d.h., $H(\lambda y) = |\lambda|H(y)$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ und $y \in \mathbf{R}^m$. Ferner seien $\omega_1, \dots, \omega_m$ Differentialformen der Stufe p auf $M \subset \mathbf{R}^n$. Dann erhält man durch Einsetzen in H eine p -dimensionale Dichte

$$H(\omega_1, \dots, \omega_m) \in \mathfrak{W}^p(M).$$

Dies folgt sofort aus (1) und der absoluten Homogenität von H . Die vorigen Beispiele sind Spezialfälle hiervon mit der homogenen Funktion $H(y) = \left(\sum_1^m (y^i)^2\right)^{1/2}$.

Wir zeigen nun, dass sich Dichten ähnlich verhalten wie Differentialformen, insbesondere was algebraische Operationen und das Zurückholen unter differenzierbaren Abbildungen betrifft. Allerdings lassen sich äußere Produkte und eine äußere Ableitung von Dichten nicht sinnvoll definieren.

11.3. Satz. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$.

(a) $\mathfrak{W}^p(M)$ ist mit der üblichen Addition von Funktionen und der Definition

$$(f\mathfrak{w})(x; \mathbf{v}) = f(x)\mathfrak{w}(x; \mathbf{v})$$

ein Modul über dem Ring aller Funktionen auf M .

(b) (Normalform) Jede n -dimensionale Dichte \mathfrak{w} lässt sich eindeutig schreiben als

$$\mathfrak{w} = f |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| \quad (1)$$

wobei $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ durch $f(x) = \mathfrak{w}(x; e_1, \dots, e_n)$ gegeben ist. Damit ist $\mathfrak{W}^n(M)$ ein freier Modul vom Rang 1 über dem Ring der Funktionen auf M .

(c) Es gilt $\mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) = 0$, falls \mathbf{v} linear abhängig ist. Insbesondere ist $\mathfrak{W}^p(M) = 0$ für $p > n$.

Beweis. Die Moduleigenschaft in (a) ist eine simple Verifikation. Zum Beweis von (b) definiere, zu gegebenem $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}^n(M)$, die Funktion f durch $f(x) := \mathfrak{w}(x; \mathbf{e})$,

wobei $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des \mathbf{R}^n sei. Bezeichnen wir für ein beliebiges $\mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^n$ mit A die $n \times n$ -Matrix A mit den Spalten v_1, \dots, v_n , dann ist $\mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) = \mathfrak{w}(x; \mathbf{e}A) = \mathfrak{w}(x; \mathbf{e}) |\det A| = f(x) |\det A|$. Andererseits gilt nach 11.2.1 $|dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|(x; \mathbf{v}) = |(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(x; \mathbf{e}A)| = |(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n)(x; \mathbf{e})| |\det A| = |\det A|$. Hieraus folgt (1). Die Eindeutigkeit von f sieht man durch Auswerten von (1) auf $(x; \mathbf{e})$.

Schließlich sei $\mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^p$ linear abhängig. Dann gibt es eine $p \times p$ -Matrix A mit $\mathbf{v}A = \mathbf{v}$ und $\det A = 0$. Hierzu betrachte den Zeilenraum Z der $n \times p$ -Matrix \mathbf{v} und definiere eine lineare Selbstabbildung A des Zeilenraums \mathbf{R}^p , gegeben durch Multiplikation von rechts mit einer $p \times p$ -Matrix A , durch die Vorschrift, dass A auf Z die Identität und auf einem komplementären Unterraum Z' zu Z im \mathbf{R}^p Null sein soll. Wegen $\dim Z < p$ ist dann $\det A = 0$ und leistet das Gewünschte. Nun folgt $\mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) = \mathfrak{w}(x; \mathbf{v}A) = |\det A| \mathfrak{w}(x; \mathbf{v}) = 0$, wie behauptet.

Bemerkung. Im Gegensatz zu $\Omega^p(M)$ ist $\mathfrak{W}^p(M)$ für $0 < p < n$ als Modul über dem Ring aller Funktionen auf M nicht endlich erzeugt. Daher kann man für solche Dichten auch keine Normalform angeben.

11.4. Satz (Zurückholen von Dichten unter Abbildungen). *Seien $U \subset \mathbf{R}^n$ und $U' \subset \mathbf{R}^m$ offen und sei $F: U \rightarrow U'$ stetig differenzierbar. Für $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}^p(U')$ definiere*

$$(F^*\mathfrak{w})(x; v_1, \dots, v_p) = \mathfrak{w}(F(x); F'(x)v_1, \dots, F'(x)v_p), \quad (1)$$

für alle $x \in U$ und $v_1, \dots, v_p \in \mathbf{R}^n$. Dann ist $F^*(\mathfrak{w})$ eine p -Dichte auf U , und die Abbildung $F^*: \mathfrak{W}^p(U') \rightarrow \mathfrak{W}^p(U)$ hat folgende Eigenschaften:

- (a) F^* ist \mathbf{R} -linear und erfüllt $F^*(f\mathfrak{w}) = (f \circ F) F^*(\mathfrak{w})$, für Funktionen f auf U' .
- (b) Für eine p -Form $\omega \in \Omega^p(U)$ gilt $F^*(|\omega|) = |F^*(\omega)|$.
- (c) Ist $U'' \subset \mathbf{R}^l$ offen und $G: U' \rightarrow U''$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$(G \circ F)^*(\mathfrak{w}) = F^*(G^*(\mathfrak{w}))$$

für alle $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}^p(U'')$.

Beweis. Wir zeigen, dass $F^*(\mathfrak{w})$ wieder eine p -Dichte ist. Dazu sei $A \in \text{Mat}_p(\mathbf{R})$. Interpretiert man \mathbf{v} als lineare Abbildung $\mathbf{R}^p \rightarrow \mathbf{R}^n$, dann ist $F'(x)(\mathbf{v}A) = F'(x) \circ \mathbf{v} \circ A = F'(x)(\mathbf{v}A)$, und es folgt

$$\begin{aligned} (F^*\mathfrak{w})(x; \mathbf{v}A) &= \mathfrak{w}(F(x); (F'(x)\mathbf{v})A) \\ &= \mathfrak{w}(F(x); F'(x)\mathbf{v}) |\det A| = (F^*\mathfrak{w})(x; \mathbf{v}) \cdot |\det A|. \end{aligned}$$

Also ist $F^*(\mathfrak{w})$ wieder eine Dichte. Die Eigenschaften (a) und (b) folgen sofort aus den Definitionen, und (c) wie bei Differentialformen aus der Kettenregel.

11.5. Beispiele. (a) Sei $\Phi: U \rightarrow U'$ eine stetig differenzierbare Abbildung zwischen offenen Mengen des \mathbf{R}^n und $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}^n(U')$. Schreibt man \mathfrak{w} wie in 11.3.1, dann gilt

$$\Phi^*(\mathfrak{w}) = \Phi^*(f |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|) = (f \circ \Phi) \cdot |\det \Phi'| \cdot |du^1 \wedge \dots \wedge du^n|. \quad (1)$$

Dies folgt sofort aus den Regeln in 11.4 und 10.12.3.

(b) Sei $U \subset \mathbf{R}^p$ offen und $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Wir bezeichnen die Koordinaten im \mathbf{R}^p mit u^1, \dots, u^p . Dann ist die Zurückholung des p -dimensionalen Oberflächenelements gegeben durch

$$F^*(do_p) = \text{Gr}\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^p}\right)^{1/2} |du^1 \wedge \dots \wedge du^p|. \quad (2)$$

Zum Beweis genügt es nach 11.3(b), $F^*(do_p)$ auf $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_p)$ auszuwerten und die Definition 11.2.4 zu verwenden:

$$\begin{aligned} F^*(do_p)(u; \mathbf{e}) &= do_p(F(u); F'(u)\mathbf{e}) = do_p(u; \frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^p}) \\ &= \text{Gr}\left(\frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^p}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

(c) Die Zurückholung des Linienelements im \mathbf{R}^2 unter der Polarkoordinatenabbildung Φ ist $\Phi^*(ds) = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$, denn

$$\begin{aligned} \Phi^*(dx^2 + dy^2) &= (dx \circ \Phi)^2 + (dy \circ \Phi)^2 \\ &= (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi)^2 + (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi)^2 \\ &= (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)dr^2 + r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)d\varphi^2 \\ &= dr^2 + r^2 d\varphi^2, \end{aligned}$$

weil sich die gemischten Terme wegheben.

(d) Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass sich das Linienelement und das zweidimensionale Oberflächenelement im \mathbf{R}^3 in Polarkoordinaten (vgl. 11.2.7) folgendermaßen ausdrücken:

$$\Phi^*(ds) = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \cos^2 \vartheta d\varphi^2}, \quad (3)$$

$$\Phi^*(do_2) = r\sqrt{(dr \wedge d\vartheta)^2 + \cos^2 \vartheta (dr \wedge d\varphi)^2 + r^2 \cos^2 \vartheta (d\varphi \wedge d\vartheta)^2}. \quad (4)$$

(e) Sei $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine Isometrie, also die Zusammensetzung einer Translation und einer orthogonalen Abbildung. Dann ist $\Phi'(x) = T$ eine von x unabhängige orthogonale Abbildung, und daher gilt für die Gramsche Determinante von p Vektoren $\text{Gr}(Tv_1, \dots, Tv_p) = \text{Gr}(v_1, \dots, v_p)$. Hieraus folgt sofort

$$\Phi^*(do_p) = do_p,$$

die Invarianz des p -dimensionalen Oberflächenelements unter Isometrien.

11.6. Integration von n -Dichten im \mathbf{R}^n . Wir betrachten zunächst eine n -Dichte $\mathfrak{w} \in \mathfrak{W}^n(M)$ auf einer messbaren Teilmenge $M \subset \mathbf{R}^n$. Wir schreiben \mathfrak{w} wie in Satz 11.3(b) und definieren: \mathfrak{w} heißt über M integrierbar, falls f über M integrierbar ist. Das Integral von \mathfrak{w} ist dann definiert als

$$\int_M \mathfrak{w} = \int_M f |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n| := \int_M f dx^1 \dots dx^n. \quad (1)$$

Insbesondere legt dies nahe, den bisher nur symbolisch verwendeten Ausdruck $d\mu$ bzw. $dx^1 \dots dx^n$ als das n -dimensionale Volumenelement zu interpretieren:

$$dx^1 \dots dx^n := d\mu := |dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|.$$

Für $n = 1$ ist das allerdings nicht konsistent!

Die Integraldreiecksungleichung gilt für Dichten wie für Funktionen:

$$\left| \int_M \mathfrak{w} \right| \leq \int_M |\mathfrak{w}|, \quad (2)$$

wie sofort aus 2.12 und den Definitionen folgt.

Soweit ist das nichts Tiefsinniges. Der eigentliche Vorteil der Verwendung von n -Dichten statt Funktionen als Integranden von n -fachen Integralen liegt darin, dass die Transformationsformel nun die folgende einfachere Gestalt annimmt:

11.7. Satz. *Es genüge Φ, U, V, M den Voraussetzungen der Transformationsformel 8.5, und sei \mathfrak{w} eine n -dimensionale Dichte auf $\Phi(M)$. Dann sind äquivalent:*

- (i) \mathfrak{w} ist über $\Phi(M)$ integrierbar;
- (ii) $\Phi^*(\mathfrak{w})$ ist über M integrierbar.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist

$$\int_{\Phi(M)} \mathfrak{w} = \int_M \Phi^*(\mathfrak{w}). \quad (1)$$

Beweis. Dies folgt sofort aus 8.5 und der Definition des Integrals einer Dichte sowie 11.5.1.

11.8. Integration von p -Dichten längs Abbildungen. Der Wunsch, p -Dichten über p -dimensionale Teilmengen in Analogie zum n -dimensionalen Fall 11.6 zu integrieren, scheidet zunächst schon daran, solche Teilmengen überhaupt sinnvoll zu definieren. Dies ist keineswegs trivial und wird im nächsten Paragraphen geschehen. Hier begnügen wir uns mit der Integration längs einer Abbildung, die sofort auf den schon in 11.6 behandelten Fall zurückführt.

Sei $U \subset \mathbf{R}^p$ offen und $F : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ferner sei \mathfrak{w} eine p -Dichte auf $F(U)$ und $M \subset U$ eine messbare Teilmenge. Dann ist $F^*(\mathfrak{w})$ eine p -dimensionale Dichte auf U . Falls sie im Sinne von 11.6 über M integrierbar ist, so nennen wir \mathfrak{w} *längs F über M integrierbar*, und bezeichnen das Integral mit

$$\int_{(F, M)} \mathfrak{w} := \int_M F^*(\mathfrak{w}). \quad (1)$$

Ist speziell $\mathfrak{w} = do_p$ das p -dimensionale Oberflächenelement, dann heißt

$$\mu_p(F, M) := \int_{(F, M)} do_p = \int_M F^*(do_p)$$

(vgl. 11.5.2) die *p -dimensionale Oberfläche von $F|_M$* , falls das Integral existiert. Letzteres ist zum Beispiel für kompaktes M wegen 7.6 sicherlich der Fall. Das ist also die genaue Verallgemeinerung der in Analysis 2 definierten Bogenlänge $L(\gamma)$ einer Kurve γ . Es ist klar, dass diese Oberfläche im Allgemeinen von der Abbildung F und nicht nur von der Bildmenge $F(M)$ abhängen wird.

Als *Beispiel* betrachten wir die Abbildung $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$, die durch die Einschränkung auf die Ebene $r = 1$ der Polarkoordinatenabbildung von 8.7(d) gegeben ist:

$$F(\varphi, \vartheta) = \Phi(1, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Sei P das Rechteck

$$P = \{(\varphi, \vartheta) : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Nach 8.8 ist $F(P) = \mathbf{S}^2$, und nach 11.5.4 ist $F^*(do_2) = |\cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta|$, weil ja $r \circ F = 1$ und somit $F^*(dr) = d(F \circ r) = 0$. Also erhält man für die Oberfläche von (F, P)

$$\int_{(F,P)} do_2 = \int_P |\cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta| = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta = 4\pi.$$

Das entspricht der bekannten Formel für die Oberfläche der Einheitssphäre im \mathbf{R}^3 . Hätten wir jedoch statt P das Rechteck $\tilde{P} = [0, 4\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ genommen und F wieder wie in (2) definiert, dann wäre zwar $F(P) = F(\tilde{P})$ gewesen, aber die doppelte Oberfläche herausgekommen. Im zweiten Fall wird die Punktmenge \mathbf{S}^2 von der Abbildung $F|_{\tilde{P}}$ sozusagen zweimal durchlaufen.

11.9.* Integration in n -dimensionalen abstrakten Vektorräumen. Die in den Paragraphen §§1–7 entwickelte Maß- und Integrationstheorie im \mathbf{R}^n beruht ganz wesentlich auf der Auszeichnung der Standardbasis des \mathbf{R}^n . Man denke nur an die ausgezeichnete Rolle, die die achsenparallelen Quader gespielt haben. Erst aus dem Transformationssatz 8.4 folgt, dass der Begriff der messbaren Menge im \mathbf{R}^n unabhängig von der Standardbasis ist. Damit kann man nun auch in einem „abstrakten“ n -dimensionalen reellen Vektorraum \mathbf{V} (sogar einem affinen Raum und noch allgemeiner in einer abstrakten Mannigfaltigkeit) sinnvoll von messbaren Teilmengen reden, indem man so vorgeht: Wähle eine Basis \mathbf{b} in \mathbf{V} , also einen Vektorraumisomorphismus $\mathbf{b} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}$. Dann heiÙe eine Teilmenge $M \subset \mathbf{V}$ messbar, wenn $\mathbf{b}^{-1}(M) \subset \mathbf{R}^n$ messbar ist. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis, denn wenn \mathbf{c} eine weitere Basis ist, dann gilt ja $\Phi = \mathbf{c}^{-1} \circ \mathbf{b} \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$, und $\mathbf{c}^{-1}(M) = \Phi(\mathbf{b}^{-1}(M))$ ist wegen 8.4 genau dann messbar, wenn $\mathbf{b}^{-1}(M)$ es ist.

Will man in \mathbf{V} nicht nur von messbaren Mengen sprechen, sondern ihnen auch ein numerisches Maß zuordnen, dann wird es schon schwieriger. Der Versuch, einfach

$$\mu(M) = \mu(\mathbf{b}^{-1}(M)) \tag{1}$$

zu setzen, führt nicht so ohne weiteres zum Ziel; denn wegen 8.4.1 ändert sich dies ja um den Faktor $|\det \Phi|$ bei Übergang zu einer anderen Basis (man beachte, dass hier $|\det \Phi'|$ wegen der Linearität von Φ konstant gleich $|\det \Phi|$ ist). Hat dagegen \mathbf{V} ein ausgezeichnetes Euklidisches Skalarprodukt, so kann man sich bei der Wahl von \mathbf{b} auf Orthonormalbasen beschränken. Dann ist $\Phi \in \text{O}(n)$ eine orthogonale Matrix, hat also $|\det \Phi| = 1$, und die Definition (1) wird sinnvoll, *ist aber von der Wahl des Euklidischen Skalarprodukts in \mathbf{V} abhängig*.

Ähnlich liegen die Verhältnisse, wenn man Funktionen auf \mathbf{V} integrieren will. Der Versuch, etwa $\int_M f$ als $\int_{\mathbf{b}^{-1}(M)} f \circ \mathbf{b}$ zu definieren, führt zu denselben Schwierigkeiten wie vorhin. Wieder könnte man sich durch (willkürliche) Wahl eines Skalarprodukts auf \mathbf{V} aus der Affäre ziehen. Viel einfacher und eleganter ist es aber, *nicht Funktionen, sondern Dichten* auf \mathbf{V} zu integrieren. Das geht so: Eine Dichte auf einer Teilmenge $M \subset \mathbf{V}$ wird genauso definiert wie im Fall des \mathbf{R}^n in 11.1, ebenso das Zurückholen von Dichten unter Abbildungen.

Dann ist es sinnvoll, zu definieren: Eine n -dimensionalen Dichte ω auf $M \subset \mathbf{V}$ heißt integrierbar, falls $\mathbf{b}^*(\omega)$ über $\mathbf{b}^{-1}(M)$ integrierbar ist, und das Integral $\int_M \omega$ ist durch

$$\int_M \omega := \int_{\mathbf{b}^{-1}(M)} \mathbf{b}^*(\omega)$$

wohldefiniert. Dass dies unabhängig von der Wahl von \mathbf{b} ist, folgt leicht aus den Rechenregeln und der Transformationsformel für Dichten: Ist nämlich auch \mathbf{c} eine Basis von \mathbf{V} , so gilt zunächst $\mathbf{c} \circ \Phi = \mathbf{b}$ wie oben. Daher ist nach 11.7.1 $\mathbf{b}^*(\omega) = \Phi^*(\mathbf{c}^*(\omega))$ genau dann über $N = \mathbf{b}^{-1}(M)$ integrierbar, wenn $\mathbf{c}^*(\omega)$ über $\mathbf{c}^{-1}(M) = \Phi(N)$ integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{\mathbf{b}^{-1}(M)} \mathbf{b}^*(\omega) = \int_N \Phi^*(\mathbf{c}^*(\omega)) = \int_{\Phi(N)} \mathbf{c}^*(\omega) = \int_{\mathbf{c}^{-1}(M)} \mathbf{c}^*(\omega).$$

§12. Stückweise glatte Mengen

Übersicht. Wir definieren eine Klasse von kompakten p -dimensionalen Teilmengen des \mathbf{R}^n , die sogenannten stückweise glatten Mengen oder kurz *Stücke*, über die sich p -dimensionale Dichten (und unter Zuhilfenahme einer Orientierung auch Differentialformen der Stufe p , siehe §13) sinnvoll integrieren lassen. Dies sind Bilder von kompakten Teilmengen P des \mathbf{R}^p unter differenzierbaren Abbildungen F , die auf einer genügend großen offenen Teilmenge von P gewissen Regularitätsbedingungen genügen (12.2). Ein wichtiger Satz (12.11) betrifft den Parameterwechsel auf einem Stück: Grob gesprochen besagt er, dass zwei Parametrisierungen nach Entfernen geeigneter Nullmengen durch einen Diffeomorphismus im Parameterbereich auseinander hervorgehen. Daraus ergibt sich dann leicht die Wohldefiniertheit des Integrals einer p -Dichte (12.12).

12.1. Differenzierbare Abbildungen auf nicht offenen Mengen. Zur Vereinfachung werden wir von jetzt an unter „differenzierbar“ stets „beliebig oft stetig differenzierbar“, also von der Klasse \mathcal{C}^∞ , verstehen.

Bisher wurden differenzierbare Abbildungen immer nur auf offenen Definitionsbereichen betrachtet. Dies verallgemeinern wir nun wie folgt. Sei $M \subset \mathbf{R}^m$ eine beliebige Teilmenge. Eine Abbildung $f: M \rightarrow N \subset \mathbf{R}^n$ heißt im Punkt $a \in M$ *differenzierbar*, falls sie sich in eine geeignete offene Umgebung von a differenzierbar fortsetzen lässt, genauer: wenn es eine offene Umgebung U_a von a und eine differenzierbare Abbildung $\tilde{f}: U_a \rightarrow \mathbf{R}^n$ gibt, sodass $f|_{U_a} = \tilde{f}|_{U_a}$. Eine solche lokale Fortsetzung \tilde{f} ist natürlich nicht eindeutig bestimmt. Die Abbildung f heißt differenzierbar schlechthin, wenn sie in jedem Punkt von M in diesem Sinne differenzierbar ist. Für offenes M stimmt dieser Begriff von differenzierbar mit dem üblichen überein. Schließlich heißt ein differenzierbares $f: M \rightarrow N$ ein *Diffeomorphismus*, wenn es bijektiv ist und die Umkehrabbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ differenzierbar ist.

Man überlegt sich leicht, dass eine differenzierbare Abbildung insbesondere stetig ist, und dass die Zusammensetzung differenzierbarer Abbildungen wieder differenzierbar ist. Ferner sind differenzierbare Abbildungen lokal dehnungsbeschränkt.

Sei $f: M \rightarrow N$ differenzierbar. Im Allgemeinen ist es nicht sinnvoll, von der Ableitung von f in einem Punkt $a \in M$ zu sprechen, der kein innerer Punkt von M ist. Man könnte zwar daran denken, die Ableitung von f in a als die Ableitung $\tilde{f}'_a(a)$ einer differenzierbaren lokalen Fortsetzung zu erklären. Das hängt aber wesentlich von der Wahl der Fortsetzung \tilde{f} ab, wie man leicht an dem Extremfall sieht, wo M nur aus dem einzigen Punkt a besteht. Falls jedoch a im Abschluss des offenen Kerns M°

2

liegt, so ist $\tilde{f}'(a)$ unabhängig von der Wahl von \tilde{f} . In der Tat ist dann $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ für eine Folge $a_k \in M^\circ \cap U_a$, und daher gilt

$$\tilde{f}'(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}'(a_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f'(a_k) \quad (1)$$

wegen der Stetigkeit von \tilde{f}' . Dies zeigt einerseits, dass der rechts stehende Limes nicht von der Wahl der Folge a_k abhängt, und daher andererseits $\tilde{f}'(a)$ nur von $f|_{M^\circ}$ abhängt. Wir können also sinnvoll $f'(a) := \tilde{f}'(a)$ definieren, und dann ist klar, dass f' auf $\overline{M^\circ}$ stetig ist.

Schließlich führen wir die folgenden Begriffe ein: Sei $U \subset \mathbf{R}^m$ offen. Eine differenzierbare Abbildung $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ heißt eine *Immersion* bzw. *Submersion*, falls $f'(u)$ für alle $u \in U$ injektiv bzw. surjektiv ist. Im ersten Fall ist dann notwendig $m \leq n$, im zweiten $m \geq n$.

12.2. Definition (stückweise glatt). Sei $p \geq 1$. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ heißt *stückweise glatt von der Dimension p* oder kurz ein *p -dimensionales Stück*, falls sie sich darstellen lässt als $X = F(P)$, wobei (F, P) die folgenden Bedingungen erfüllt: $P \subset \mathbf{R}^p$ ist kompakt, $F : P \rightarrow \mathbf{R}^n$ ist differenzierbar, und es gibt eine in P enthaltene offene Menge $U \subset \mathbf{R}^p$ mit den Eigenschaften

- (i) $P \setminus U$ ist eine Nullmenge;
- (ii) $P = \overline{U}$ ist der Abschluss von U ;
- (iii) $F|_U$ ist eine injektive Immersion;
- (iv) $F(U) \cap F(P \setminus U) = \emptyset$.

Wir nennen dann F eine *Parametrisierung* von X mit *Parameterbereich* P , und U einen *Reguläritätsbereich* von F . Unter einem 0-dimensionalen Stück verstehen wir einfach eine endliche Punktmenge im \mathbf{R}^n .

Bemerkungen. (a) Es wird nicht vorausgesetzt, dass P zusammenhängend ist. Als stetiges Bild der kompakten Menge P ist X nach Satz 0.9 kompakt. Stückweise glatte nicht kompakte Mengen werden hier nicht betrachtet, dagegen werden wir glatte, nicht notwendig kompakte Mengen (Mannigfaltigkeiten) weiter unten in 12.8 definieren.

(b) Ein Reguläritätsbereich $U \subset P$ von F ist nicht eindeutig bestimmt, vgl. Lemma 12.5. Wegen $U \subset P^\circ$ ist $\text{Rd } P \subset P \setminus U$ und damit eine Nullmenge. Ferner folgt aus (ii), dass $P = \overline{P^\circ}$ der Abschluss seines Inneren ist. Daher ist nach 12.1 die Ableitung von F auf ganz P wohldefiniert und stetig. In vielen Beispielen ist $U = P^\circ$. Es wäre jedoch unzweckmäßig, sich auf diesen Fall festzulegen.

(c) Die Bedingung (ii) dient auch dazu, den Ausartungsfall $P = N$, eine kompakte nichtleere Nullmenge, zu verhindern. Jedoch ist $P = \emptyset$ und damit $X = \emptyset$ zugelassen. Im Fall $P \neq \emptyset$ und $p \geq 1$ ist notwendig $P \setminus U \neq \emptyset$, denn sonst wäre U eine offene nicht leere kompakte Menge im \mathbf{R}^p .

(d) Aus (iii) folgt $p \leq n$ für nichtleeres X . Dass die Dimension p eines Stücks X wirklich nur von X und nicht von der Parametrisierung F abhängt, wird sich erst später in 12.11 ergeben. Zunächst ist es ohne weiteres denkbar, dass sich dasselbe X auch darstellen lässt als $F_1(P_1)$ mit $P_1 \subset \mathbf{R}^{p_1}$, aber $p_1 \neq p$. Dem leeren Stück kann man eigentlich keine Dimension zuordnen. Es vereinfacht aber die Formulierung von Sätzen, wenn man es für jedes p als p -dimensional betrachtet.

(e) Schließlich bemerken wir, dass

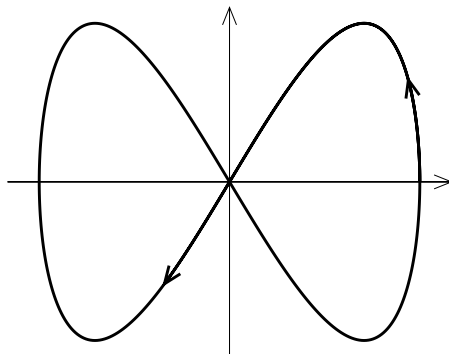
$$X = \overline{F(U)}. \quad (1)$$

In der Tat gilt $\overline{F(U)} \subset X$, weil X kompakt und daher abgeschlossen ist. Umgekehrt sei $a = F(b) \in X$. Wegen (ii) gibt es eine Folge (u_k) in U mit $b = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, und aus der Stetigkeit von F folgt $a = \lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k) \in \overline{U}$.

12.3. Beispiele. (a) Die *Sphäre*. Als erstes Beispiel betrachten wir wieder die Parametrisierung $F: P \rightarrow \mathbf{S}^2$ der zweidimensionalen Sphäre \mathbf{S}^2 wie in 11.8. Nach 8.7 ist tatsächlich $F(R) = \mathbf{S}^2$. Die Abbildung F ist beliebig oft stetig differenzierbar, und auf $U = P^\circ$ eine injektive Immersion. Das Bild von U unter F ist die Sphäre vermindert um den halben Großkreis durch Nordpol, Südpol und den Punkt $e_1 = (1, 0, 0)$. Der Rand $N = \text{Rd } P$ des Rechtecks P ist als Vereinigung von 4 Geradenstücken eine Nullmenge, und $F(N)$ ist genau der soeben beschriebene halbe Großkreis, also ist auch die Bedingung (iv) erfüllt.

Ähnlich sieht man mittels der Beschreibung durch n -dimensionale Polarkoordinaten, dass die $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ ein $(n-1)$ -dimensionales Stück ist.

(b) Eine *Achterschleife* im \mathbf{R}^2 ist gegeben durch $P = [-\pi/2, 3\pi/2]$, $F(t) = (\cos t, \sin 2t)$:



Hier ist $U = P \setminus \{-\pi/2, \pi/2, 3\pi/2\}$ ein Regularitätsbereich, nicht jedoch P° .

(c) Ein *Zylindermantel* (ohne Boden und Deckel) im \mathbf{R}^3 wird beschrieben durch $P = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ und $F(\varphi, t) = (\cos \varphi, \sin \varphi, t)$. Hier ist $U = P^\circ$ ein Regularitätsbereich.

(d) Einen *Kegelmantel* im \mathbf{R}^3 erhält man durch die Abbildung $F(\varphi, t) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, t)$ auf demselben Parameterbereich. Auch hier ist P° ein Regularitätsbereich.

Schließlich lassen sich die n -dimensionalen Stücke einigermaßen einfach beschreiben:

12.4. Lemma. Für eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ sind äquivalent:

- (i) X ist ein n -dimensionales Stück;
- (ii) X ist kompakt, $X = \overline{X^\circ}$, und $\text{Rd } X$ ist eine Nullmenge.

Beweis. (i) \implies (ii): Klarerweise ist X kompakt. Sei F eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich U . Wegen des Umkehrsatzes und der Injektivität von $F'(u)$ für alle $u \in U$ ist klar, dass $F(U)$ eine offene Teilmenge des \mathbf{R}^n ist, insbesondere also $F(U) \subset X^\circ$. Weiter ist $\text{Rd } X = X \setminus X^\circ \subset X \setminus F(U) = F(P \setminus U)$ eine Nullmenge nach 6.12, und es gilt $X = \overline{F(U)} \subset \overline{X^\circ} \subset X$ nach 12.2.1. Folglich ist X der Abschluss seines Inneren.

(ii) \implies (i): $F = \text{Id}: P = X \rightarrow X$ ist eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich X° .

12.5. Lemma. Sei U ein Regularitätsbereich von F . Sei $U' \subset U$ offen und $U \setminus U'$ eine Nullmenge. Dann ist auch U' ein Regularitätsbereich von F .

Beweis. Die Punkte (i), (iii) und (iv) von 12.2 für U' sind klar. Für (ii) genügt es zu zeigen, dass $U \subset A := \overline{U'}$, denn dann ist $P = \overline{U} \subset \overline{U'}$. Nun ist $U \setminus A$ offen und $\mu(P) = \mu(P \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(U \setminus A) + \mu(U') = \mu(U \setminus A) + \mu(U) = \mu(U \setminus A) + \mu(P)$. Also ist $U \setminus A$ eine offene Nullmenge und daher leer.

12.6. Satz (Fast disjunkte Vereinigung von Stücken). Für $i = 1, \dots, m$ seien $X_i = F_i(P_i)$ p -dimensionale Stücke und es sei $N_{ij} := F_i^{-1}(X_j)$ eine Nullmenge, für $i \neq j$. (In diesem Fall nennen wir die X_i fast disjunkt.) Dann ist auch $X_1 \cup \dots \cup X_m$ ein p -dimensionales Stück.

Bemerkung. Es wäre nicht sinnvoll, zwei Stücke fast disjunkt zu nennen, wenn ihr Durchschnitt eine Nullmenge im \mathbf{R}^n ist, denn nach 6.13 sind niederdimensionale Stücke immer Nullmengen bezüglich des n -dimensionalen Maßes. Die Terminologie „fast disjunkt“ bezieht sich daher in diesem Fall auf die Urbilder dieser Durchschnitte unter den Parametrisierungsabbildungen.

Beweis. Für $p = 0$ ist der Satz klar, wir nehmen daher $p > 0$ an. Indem man vor die Abbildungen F_j geeignete Translationen schaltet, kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die $P_i \subset \mathbf{R}^p$ disjunkt sind. Seien \tilde{U}_i Regularitätsbereiche für die F_i , und sei

$$U_i = \tilde{U}_i \setminus \left(\bigcup_{j \neq i} N_{ij} \right).$$

Nach Lemma 12.5 ist dann U_i ebenfalls ein Regularitätsbereich für F_i , und nun gilt $F(U_i) \cap X_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Seien P, U und N die Vereinigungen der P_i, U_i und $N_i := P_i \setminus U_i$, und definiere $F: P \rightarrow \mathbf{R}^n$ durch $F|_{P_i} := F_i$. Dann ist $P = \overline{U \cup N}$ kompakt, U offen und N eine Nullmenge, sowie F differenzierbar. Aus $\overline{U} = \overline{U_1 \cup \dots \cup U_m} = \overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_m}$ folgt die Bedingung (ii) von 12.2. Wegen der Disjunktheit der $F_i(U_i)$ ist F auf U injektiv und somit ist (iii) erfüllt. Schließlich gilt wegen $F_i(U_i) \cap F_i(N_i) = \emptyset$, dass

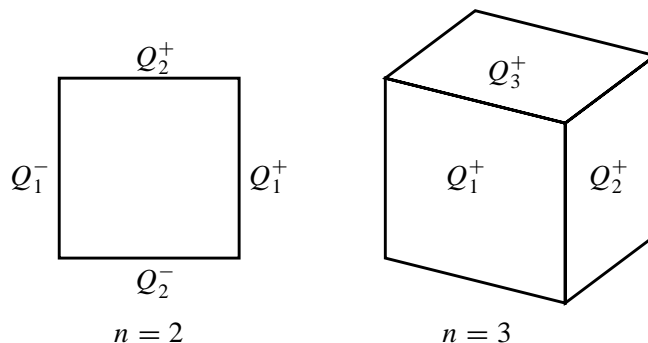
$$\begin{aligned} F(U) \cap F(N) &= \left(\bigcup_{i=1}^m F_i(U_i) \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^m F_j(N_j) \right) = \bigcup_{i \neq j} F_i(U_i) \cap F_j(N_j) \\ &\subset \bigcup_{i \neq j} F_i(U_i) \cap X_j = \emptyset, \end{aligned}$$

und daher ist auch (iv) von 12.2 erfüllt.

12.7. Weitere Beispiele. (a) Der Rand eines Quaders $Q \subset \mathbf{R}^n$ ist ein $(n-1)$ -dimensionales Stück. Sei etwa $Q = [a^1, b^1] \times \dots \times [a^n, b^n]$ und seien

$$\begin{aligned} Q_i^+ &:= [a^1, b^1] \times \dots \times \{b^i\} \times \dots \times [a^n, b^n], \\ Q_i^- &:= [a^1, b^1] \times \dots \times \{a^i\} \times \dots \times [a^n, b^n], \end{aligned} \quad (1)$$

seine $2n$ Randquader:



Betrachte die $(n - 1)$ -dimensionalen Quader

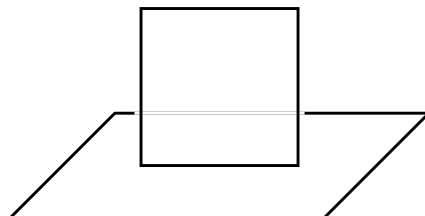
$$P_i = [a^1, b^1] \times \cdots \times \widehat{[a^i, b^i]} \times \cdots \times [a^n, b^n] \subset \mathbf{R}^{n-1}.$$

Wir bezeichnen die Koordinaten im \mathbf{R}^{n-1} mit u^2, \dots, u^n und definieren Abbildungen $F_{i,c}: P_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ durch

$$F_{i,c}(u^2, \dots, u^n) = (u^2, \dots, u^i, c, u^{i+1}, \dots, u^n). \quad (2)$$

(Für $i = 1$ bedeutet das natürlich (c, u^2, \dots, u^n)). Diese betten den Quader P_i „in der Höhe c “ in den \mathbf{R}^n ein. Für $c = a^i$ bzw. $c = b^i$ bekommen wir Parametrisierungen $F_{i,+} := F_{i,b^i}$ und $F_{i,-} := F_{i,a^i}$ der Randquader Q_i^\pm von Q , und man sieht sofort, dass (für $U_i = P_i^\circ$ und $N_i = \text{Rd } P_i$) damit die Q_i^\pm Stücke sind. Schließlich erfüllen die Q_i^\pm die Bedingungen von Satz 12.6, und daher ist $\text{Rd } Q$ ein $(n - 1)$ -dimensionales Stück.

(b) Im obigen Beispiel stoßen zwei verschiedene Randquader von Q ihrerseits höchstens an ihren Rändern zusammen. Aber diese Bedingung ist keineswegs notwendig dafür, dass die Vereinigung von zwei Quadern wieder ein Stück ist, zum Beispiel:



12.8. Mannigfaltigkeiten. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ heißt in einem Punkt $a \in X$ *glatt von der Kodimension q und der Dimension $p = n - q$* , falls es eine offene Umgebung V von a im \mathbf{R}^n und eine Submersion $g: V \rightarrow \mathbf{R}^q$ gibt, sodass

$$X \cap V = g^{-1}(0).$$

In diesem Fall ist nach Analysis 2, Satz 8.5 der *Tangentialraum* von X in a , also die Menge aller Tangentialvektoren $\dot{\gamma}(0)$ an differenzierbare, in der Nähe von 0 definierte in X verlaufende Kurven mit $\gamma(0) = a$, gegeben durch

$$T_a(X) = \text{Ker } g'(a). \quad (1)$$

Da der Tangentialraum nur von a und X abhängt, gilt dies auch für seine Dimension, und diese ist nach dem Satz über den Rang einer linearen Abbildung gerade $n - q = p$. Dies rechtfertigt die obige Definition. Die Menge X heißt *glatt von der Dimension p* oder eine p -dimensionale *Mannigfaltigkeit*, wenn sie in jedem ihrer Punkte *glatt von der Dimension p* ist.

12.9. Lemma. Sei $X = F(P) \subset \mathbf{R}^n$ ein Stück mit Regularitätsbereich U . Dann gibt es zu jeder offene Menge $U' \subset U$ eine offene Menge $V \subset \mathbf{R}^n$, sodass

$$F(U') = X \cap V.$$

Beweis. Wegen (iii) und (iv) von 12.2 ist $F(U) = F(U') \cup F(U \setminus U')$ und $X = F(U') \cup F(P \setminus U')$ (disjunkte Vereinigungen). Als abgeschlossene Teilmenge von P ist $P \setminus U'$ kompakt, also ist es auch $F(P \setminus U')$. Insbesondere ist diese Menge abgeschlossen im \mathbf{R}^n . Nun setze $V = \complement F(P \setminus U')$.

12.10. Satz. Sei $X = F(P)$ ein p -dimensionales Stück und $U \subset P$ ein Regularitätsbereich von F . Dann ist X in jedem Punkt $a = F(b)$ von $M := F(U)$ glatt von der Dimension p , und $F : U \rightarrow M$ ist ein Diffeomorphismus. Insbesondere ist die Umkehrabbildung $F^{-1} : M \rightarrow U$ differenzierbar. Der Tangentialraum von X in a ist gegeben durch

$$T_a(X) = \text{Bild } F'(b). \quad (1)$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Differenzierbarkeit von F^{-1} . Die Koordinaten auf $U \subset \mathbf{R}^p$ seien mit u^1, \dots, u^p bezeichnet. Eventuell nach Umnummerierung der Koordinaten im \mathbf{R}^n können wir annehmen, dass die Unterdeterminante

$$\frac{\partial(F^1, \dots, F^p)}{\partial(u^1, \dots, u^p)}(b) \neq 0 \quad (2)$$

ist. Sei $q = n - p$ und sei $\pi = \text{pr}_1 : \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^p$ die Projektion auf den ersten Faktor. Dann hat wegen (2) die Abbildung $\pi \circ F$ nicht verschwindende Funktionaldeterminante im Punkt b . Also gibt es nach dem Umkehrsatz eine offene Umgebung $U' \subset U$ von b und eine offene Menge $U'' \subset \mathbf{R}^p$, sodass $\pi \circ F : U' \rightarrow U'' \subset \mathbf{R}^p$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $H : U'' \rightarrow U'$ die Umkehrabbildung. Nach Lemma 12.9 ist $F(U') = X \cap V$ für geeignetes offenes $V \subset \mathbf{R}^n$. Da ferner $F(U') \subset \pi^{-1}(U'')$, kann man ohne Einschränkung annehmen, dass $V \subset \pi^{-1}(U'')$, sonst ersetze man V durch $V \cap \pi^{-1}(U'')$. Dann ist aber $H \circ \pi : V \rightarrow U'$ differenzierbar, und es ist auf $X \cap V$ gleich F^{-1} ; denn $(H \circ \pi) \circ F(u) = H \circ (\pi \circ F)(u) = u$ für alle $u \in U'$. Also ist $H \circ \pi$ eine lokale differenzierbare Fortsetzung von F^{-1} . Da $a \in M$ beliebig war, zeigt dies die Differenzierbarkeit von $F^{-1} : M \rightarrow U$, und somit ist $F : U \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus.

Nun sei $q = n - p$ und definiere $g : V \rightarrow \mathbf{R}^q$ durch

$$g^i(x) = x^{p+i} - F^{p+i}(H(x^1, \dots, x^p)) \quad (i = 1, \dots, q).$$

Offenbar ist g eine Submersion, und man überlegt sich leicht, dass $g^{-1}(0) = F(U') = X \cap V$. Also ist X in a glatt von der Dimension p . Schließlich erhält man aus $(g \circ F)(u) = 0$ für alle $u \in U'$ durch Differenzieren im Punkt b nach der Kettenregel $g'(a) \circ F'(b) = 0$, also $T_a(X) = \text{Ker } g'(a) \supset \text{Bild } F'(b)$. Weil F eine Immersion und g eine Submersion ist, haben diese beiden Vektorräume dieselbe Dimension p , und sind daher gleich.

12.11. Satz (Parameterwechsel auf einem Stück). Sei X ein nichtleeres Stück. Für $i = 1, 2$ seien F_i Parametrisierungen von X mit Parameterbereichen $P_i \subset \mathbf{R}^{p_i}$. Dann gibt es Regularitätsbereiche $V_i \subset P_i$, sodass $F_1(V_1) = F_2(V_2)$. Es gilt $p_1 = p_2$, und die Abbildung $\Psi = F_2^{-1} \circ F_1 : V_1 \rightarrow V_2$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Seien $U_i \subset P_i$ Regularitätsbereiche und $N_i = P_i \setminus U_i$. Ferner sei $A_i = F_i(N_i)$, $M_i = F(U_i)$ und $A = A_1 \cup A_2$ sowie $V_i = F_i^{-1}(X \setminus A) = F_i^{-1}(M_1 \cap M_2) \subset U_i$.

(a) Weil die A_i als stetige Bilder kompakter Mengen kompakt sind, ist es auch A , insbesondere ist A abgeschlossen. Folglich ist $F_i^{-1}(A)$ abgeschlossen. Weiter gilt $F_1^{-1}(A) = F_1^{-1}(F_1(N_1)) \cup F_1^{-1}(F_2(N_2)) = N_1 \cup F_1^{-1}(A_2)$. Daher ist

$$V_1 = F_1^{-1}(X \setminus A) = P_1 \setminus (N_1 \cup F_1^{-1}(A_2)) = U_1 \setminus F_1^{-1}(A_2) \subset U_1$$

offen, und ebenso ist $V_2 \subset U_2$ offen.

(b) Klarerweise ist $F_i: V_i \rightarrow X \setminus A$ bijektiv und somit auch $\Psi = F_2^{-1} \circ F_1: V_1 \rightarrow X \setminus A \rightarrow V_2$. Da $F_2^{-1}: M_2 \rightarrow U_2$ nach Satz 12.10 differenzierbar ist, gilt dasselbe auch für Ψ . Durch Vertauschen der Rollen von F_1 und F_2 sieht man, dass auch die Umkehrabbildung von Ψ differenzierbar ist. Also ist Ψ ein Diffeomorphismus.

(c) Eventuell nach Vertauschen der Rollen von F_1 und F_2 können wir $p_1 \leq p_2$ annehmen. Wir zeigen, dass $U_2 \setminus V_2$ eine Nullmenge ist. Nach Lemma 12.5 ist dann V_2 ein Regularitätsbereich von F_2 . Betrachte die Abbildung

$$\tilde{\Psi} := F_2^{-1} \circ F_1: F_1^{-1}(M_2) \rightarrow U_2,$$

die offenbar Ψ fortsetzt. Nach Satz 12.10 ist $\tilde{\Psi}$ differenzierbar, insbesondere also lokal dehnungsbeschränkt, aber es muss keine injektive Immersion mehr sein. Der Definitionsbereich von $\tilde{\Psi}$ ist $V_1 \cup N'_1$, wobei $N'_1 = \{u \in N_1 : F_1(u) \in M_2\} = N_1 \cap F_1^{-1}(M_2)$, und es ist $U_2 \setminus V_2 = \tilde{\Psi}(N'_1)$. Da N'_1 als Teilmenge einer Nullmenge selber eine Nullmenge ist, folgt aus 6.12 und der stetigen Differenzierbarkeit von $\tilde{\Psi}$, dass auch $\tilde{\Psi}(N'_1)$ eine Nullmenge ist. Weil U_2 offen und nicht leer ist, kann also V_2 nicht leer sein. Daher ist nach (b) auch V_1 nicht leer und es muss $p_1 = p_2$ sein, denn für ein $u \in V_1$ ist $\Psi'(u): \mathbf{R}^{p_1} \rightarrow \mathbf{R}^{p_2}$ ein Vektorraumisomorphismus. Nun folgt aus Symmetriegründen, dass auch $P_1 \setminus V_1$ eine Nullmenge ist.

12.12. Integration von Dichten über Stücke. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ ein p -dimensionales Stück, und sei \mathfrak{w} eine p -dimensionale Dichte auf (einer Obermenge von) X . Ferner sei $F: P \rightarrow X$ eine Parametrisierung von X . Wir nennen \mathfrak{w} über X *integrierbar*, falls \mathfrak{w} wie in 11.8 längs F integrierbar ist, und definieren dann das *Integral von \mathfrak{w} über X* durch

$$\int_X \mathfrak{w} := \int_P F^*(\mathfrak{w}). \quad (1)$$

Damit diese Definitionen sinnvoll sind, müssen wir zeigen, dass sie von der gewählten Parametrisierung nicht abhängen. Seien also $F_i: P_i \rightarrow X$ Parametrisierungen von X mit Regularitätsbereichen V_i und $\Psi: V_1 \rightarrow V_2$ wie in 12.11. Dann gilt $F_1 = F_2 \circ \Psi$ auf V_1 . Weil $P_i \setminus V_i$ eine Nullmenge ist, folgt mit der Transformationsformel 11.7.1

$$\int_{P_1} F_1^*(\mathfrak{w}) = \int_{V_1} F_1^*(\mathfrak{w}) = \int_{V_1} \Psi^*(F_2^*(\mathfrak{w})) = \int_{V_2} F_2^*(\mathfrak{w}) = \int_{P_2} F_2^*(\mathfrak{w}).$$

Für ein 0-dimensionales Stück X (also eine endliche Menge) und eine 0-dimensionale Dichte (also eine Funktion \mathfrak{w}) definieren wir das Integral von \mathfrak{w} über X einfach als die Summe $\sum_{x \in X} \mathfrak{w}(x)$.

Insbesondere hat es nun einen guten Sinn, das *p -dimensionale Maß* oder die *p -dimensionale Oberfläche* eines p -dimensionalen Stücks durch

$$\mu_p(X) := \int_X d\sigma_p \quad (2)$$

zu definieren, denn wegen der Kompaktheit von P und der Stetigkeit der Gramschen Determinante der $\partial F/\partial u^i$ auf P (vgl. 11.5.2) existiert das rechts stehende Integral.

Als *Beispiel* betrachten wir die Sphäre $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Sei $m = n - 2$ und $F: P = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]^m \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$ die Parametrisierung durch *sphärische Koordinaten*, d.h., die Einschränkung der n -dimensionalen Polarkoordinaten wie in 8.8 auf die Hyperebene $r = 1$:

$$F(\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta_m \cos \vartheta_{m-1} \cdots \cos \vartheta_1 \cos \varphi \\ \cos \vartheta_m \cos \vartheta_{m-1} \cdots \cos \vartheta_1 \sin \varphi \\ \cos \vartheta_m \cdots \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \\ \vdots \\ \cos \vartheta_m \sin \vartheta_{m-1} \\ \sin \vartheta_m \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Es gilt (Aufgabe!)

$$F^*(do_{n-1}) = \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^m \vartheta_m |d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_m|, \quad (4)$$

und daher ist, mit den in 8.8.4 eingeführten Bezeichnungen,

$$\mu_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) = \int_P \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^m \vartheta_m d\varphi d\vartheta_1 \cdots d\vartheta_m = 2\pi c_1 \cdots c_{n-2}. \quad (5)$$

Für fast disjunkte Stücke X_1, \dots, X_m wie in 12.6 sieht man leicht, dass eine Dichte \mathfrak{w} genau dann über $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$ integrierbar ist, wenn sie über jedes X_i integrierbar ist, und dass dann

$$\int_X \mathfrak{w} = \sum_{j=1}^m \int_{X_j} \mathfrak{w}. \quad (6)$$

12.13. Der reguläre und der singuläre Teil eines Stücks. Ein Punkt a eines Stücks X heißt ein *regulärer Punkt*, wenn es eine Parametrisierung F und einen Regularitätsbereich U für F gibt, sodass $a \in F(U)$. Die Menge aller regulären Punkte bezeichnen wir mit X_{reg} und nennen sie den *regulären Teil* von X . Wegen 12.2.1 ist klar, dass der Abschluss $\overline{X_{\text{reg}}}$ ganz X ist.

Nach Satz 12.10 ist X in jedem regulären Punkt glatt von der Dimension p , und daher ist X_{reg} eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die naheliegende Frage, ob umgekehrt jeder glatte Punkt von X regulär ist, also X_{reg} genau aus den glatten Punkten von X besteht, beantwortet Satz 12.15 positiv.

Das Komplement $X_{\text{sing}} = X \setminus X_{\text{reg}}$ heißt der *singuläre Teil* von X . Dieser ist, als der Durchschnitt aller $F(P \setminus U)$, wobei F alle Parametrisierungen von X und U alle Regularitätsbereiche von F durchläuft, jedenfalls kompakt, kann aber auch leer sein. Als Beispiel betrachten wir die Sphäre $X = \mathbf{S}^2$. Indem man hinter die übliche Parametrisierung F durch sphärische Koordinaten wie in 12.3(a) eine Drehung um die z -Achse setzt, erhält man eine Parametrisierung \tilde{F} mit demselben Parameter- und Regularitätsbereich wie F , für die aber $\tilde{F}(P \setminus U)$ der entsprechend gedrehte Halbgroßkreis durch Nord- und Südpol und den Punkt e_1 ist. Daher ist X_{sing} enthalten im Durchschnitt dieser beiden Mengen, besteht also höchstens aus Nord- und Südpol. Schaltet man hinter F nun noch eine Drehung um eine andere Achse, so folgt mit demselben Argument $X_{\text{sing}} = \emptyset$.

Ein Stück X mit $X_{\text{reg}} = X$, d.h. $X_{\text{sing}} = \emptyset$, heißt X *regulär* oder *nichtsingulär*. Jedes reguläre Stück ist also eine kompakte Mannigfaltigkeit. Aus einem berühmten Satz der Differentialtopologie über die Triangulierbarkeit von Mannigfaltigkeiten) folgt, dass umgekehrt auch jede kompakte Mannigfaltigkeit ein reguläres Stück ist.

Für ein n -dimensionales Stück X gilt

$$X_{\text{reg}} = X^\circ \quad \text{und} \quad X_{\text{sing}} = \text{Rd } X. \quad (1)$$

In der Tat ist nach Lemma 12.4 die identische Abbildung $X \rightarrow X$ eine Parametrisierung mit Regularitätsbereich X° , und daher gilt $X^\circ \subset X_{\text{reg}}$. Umgekehrt folgt aus dem Umkehrsatz, dass jeder reguläre Punkt von X ein innerer Punkt sein muss. Schließlich ist $X \setminus X^\circ = \text{Rd } X$, weil X abgeschlossen ist.

12.14.* Lemma. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ im Punkte $a \in X$ glatt von der Dimension p . Dann gibt es eine offene Umgebung W von a im \mathbf{R}^n , eine offene Menge $D \subset \mathbf{R}^p$ und einen Diffeomorphismus $G: D \rightarrow X \cap W$.

Beweis. Sei V eine offene Umgebung von a und $g: V \rightarrow \mathbf{R}^q$ eine Submersion mit $g^{-1}(0) = X \cap V$. Nach Ummumerieren der Koordinaten können wir annehmen, dass die Matrix

$$\left(\frac{\partial g^i}{\partial x^{p+j}}(a) \right) \quad (i, j = 1, \dots, q)$$

invertierbar ist. Sei $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q$. Nach dem Satz über implizite Funktionen (Analysis 2, Satz 8.2) gibt es offene Umgebungen U_i von a_i im \mathbf{R}^p bzw. \mathbf{R}^q mit $U_1 \times U_2 \subset V$, und eine differenzierbare Abbildung $f: U_1 \rightarrow U_2$, sodass

$$g^{-1}(0) \cap (U_1 \times U_2) = \{(u, f(u)) : u \in U_1\}.$$

Nun setze $D := U_1$, $W := U_1 \times U_2$ und definiere G durch $G(u) = (u, f(u))$. Wegen $W \subset V$ und $X \cap V = g^{-1}(0)$ ist $X \cap W = g^{-1}(0) \cap W = G(D)$. Offenbar ist $G: D \rightarrow X \cap W$ bijektiv und differenzierbar, und die Umkehrabbildung $G^{-1}: X \cap W \rightarrow D$ ist ebenfalls differenzierbar, denn sie ist die Einschränkung der Projektion auf den \mathbf{R}^p .

12.15.* Satz. Jeder glatte Punkt eines Stücks ist ein regulärer Punkt.

Beweis. Sei X ein p -dimensionales Stück. Wir setzen $p > 0$ voraus, denn für ein nulldimensionales Stück ist jeder Punkt glatt und (mit naheliegenden Konventionen) auch regulär. Sei X im Punkt a glatt, etwa von der Dimension r . Wir zeigen erst, dass $r = p$ sein muss. Nach Definition der Glattheit (12.8) gibt es eine offene Umgebung V von a und eine Submersion $g: V \rightarrow \mathbf{R}^{n-r}$, sodass $X \cap V = g^{-1}(0)$. Dies zeigt, dass X in jedem Punkt von $X \cap V$ ebenfalls glatt von der Dimension r ist. Nun sei $F: P \rightarrow X$ eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich U , und sei $M = F(U)$. Dann gilt $X = \overline{M}$ (12.2.1) und daher $M \cap V \neq \emptyset$ (siehe 0.3(a)). Nach 12.10 ist X in jedem Punkt von M glatt von der Dimension p . Weil die Dimension einer Mannigfaltigkeit nach 12.8 eindeutig bestimmt ist, folgt $p = r$.

Nun werden wir F zu einer Parametrisierung \tilde{F} mit Regularitätsbereich \tilde{U} so modifizieren, dass $a \in \tilde{F}(\tilde{U})$. Wähle W, D und G wie in Lemma 12.14. Nach Verkleinern von W und D kann man wegen annehmen, dass $D = B_{2r}(c) \subset \mathbf{R}^p$ und $G(c) = a$ ist. Ferner können wir durch Vorschalten einer geeigneten Translation erreichen, dass $B_{2r}(c) \cap P = \emptyset$. Sei $P_1 = \overline{B_r(c)}$ der abgeschlossene Würfel mit Mittelpunkt c und Radius r , und sei $X_1 := G(P_1)$. Dann ist X_1 offenbar ein p -dimensionales Stück mit

Regularitätsbereich $U_1 = B_r(c)$, und $P_1 \setminus U_1$ ist gerade der Rand von P_1 . Ferner ist $G : U_1 \rightarrow M_1 := G(U_1)$ ein Diffeomorphismus, insbesondere ist M_1 offen in X . Setzen wir $S := G(P_1 \setminus U_1)$, so ist $X_1 = M_1 \cup S$ (disjunkte Vereinigung).

Weiter sei $M_2 := M \setminus X_1$, und $U_2 := F^{-1}(M_2)$ sowie $P_2 := \overline{U_2}$. Wegen der Kompaktheit von X_1 ist M_2 offen in X . Wegen $M \cap F(P \setminus U) = \emptyset$ und der Stetigkeit von F ist

$$U_2 = \{u \in U : F(u) \notin X_1\} \quad (1)$$

eine offene Teilmenge von U . Wir setzen $X_2 := F(P_2)$. Weil P_2 als abgeschlossene Teilmenge von P kompakt ist, gilt dies auch für X_2 . Somit ist $\overline{M_2} \subset X_2 = F(\overline{U_2}) \subset \overline{F(U_2)} = \overline{M_2}$, also

$$X_2 = \overline{M_2}. \quad (2)$$

Nach Definition gilt $X_1 \cap M_2 = \emptyset$. Es ist auch

$$M_1 \cap X_2 = \emptyset, \quad (3)$$

wegen $M_1 \cap M_2 \subset X_1 \cap M_2 = \emptyset$ und (2). Hieraus folgt weiter

$$X_1 \cap X_2 \subset (M_1 \cup S) \cap X_2 \subset S. \quad (4)$$

Nun setzen wir

$$\tilde{U} := U_1 \cup U_2, \quad \tilde{P} := \overline{\tilde{U}} = P_1 \cup P_2,$$

und definieren \tilde{F} auf \tilde{P} durch

$$\tilde{F}|_{P_1} = G|_{P_1}, \quad \tilde{F}|_{P_2} = F|_{P_2}.$$

Wegen der Disjunktheit von $B_{2r}(c)$ und P sind auch P_1 und P_2 disjunkt. Somit ist \tilde{F} wohldefiniert und es ist offenbar differenzierbar. Wir zeigen in mehreren Schritten, dass \tilde{F} eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich \tilde{U} ist. Damit ist der Beweis erbracht, denn $a = \tilde{F}(c) \in \tilde{F}(\tilde{U})$.

(a) *Das Bild von \tilde{F} ist ganz X :*

Offenbar gilt $\tilde{F}(\tilde{P}) = G(P_1) \cup F(P_2) = X_1 \cup X_2 \subset X$, und andererseits

$$X = \overline{M} = (\overline{M \cap X_1}) \cup (\overline{M \setminus X_1}) \subset X_1 \cup \overline{M_2} = X_1 \cup X_2,$$

nach (2).

(b) *$\tilde{P} \setminus \tilde{U}$ ist eine Nullmenge:*

Es gilt $\tilde{P} \setminus \tilde{U} = (P_1 \setminus U_1) \cup (P_2 \setminus U_2)$. Hier ist $P_1 \setminus U_1$ der Rand des Quaders P_1 und somit eine Nullmenge. Weiter haben wir

$$P_2 \setminus U_2 \subset (P \setminus U) \cup (P_2 \cap (U \setminus U_2)). \quad (5)$$

Hierbei ist $P \setminus U$ eine Nullmenge, denn U ist ein Regularitätsbereich von F . Für die zweite in (5) rechts stehende Menge gilt

$$F(P_2 \cap (U \setminus U_2)) \subset F(P_2) \cap F(U \setminus U_2) \subset X_2 \cap (M \cap X_1) \subset M \cap S, \quad (6)$$

wegen (1) und (4). Daher folgt

$$P_2 \cap (U \setminus U_2) \subset F^{-1}(M \cap S). \quad (7)$$

Nun ist die Abbildung $\Psi = F^{-1} \circ G : G^{-1}(M) \rightarrow U$ nach Satz 12.10 differenzierbar, und es ist $G^{-1}(M \cap S) \subset \text{Rd } P_1$ eine Nullmenge. Folglich ist $F^{-1}(M \cap S) = \Psi(G^{-1}(M \cap S))$ als Bild der Nullmenge $G^{-1}(M \cap S)$ unter der differenzierbaren Abbildung Ψ nach 6.12 eine Nullmenge.

(c) $\tilde{F}|_{\tilde{U}}$ ist eine injektive Immersion:

Nach den Eigenschaften von F und G ist \tilde{F} auf \tilde{U} eine Immersion, und die Restriktion von \tilde{F} auf U_1 und U_2 ist injektiv. Da ferner $\tilde{F}(U_1) \cap \tilde{F}(U_2) = M_1 \cap M_2 = \emptyset$, folgt die Behauptung.

(d) Es gilt $\tilde{F}(\tilde{U}) \cap \tilde{F}(\tilde{P} \setminus \tilde{U}) = \emptyset$:

Wir haben

$$\tilde{F}(\tilde{U}) \cap \tilde{F}(\tilde{P} \setminus \tilde{U}) = (M_1 \cup M_2) \cap (S \cup F(P_2 \setminus U_2)).$$

Hier ist $(M_1 \cup M_2) \cap S = \emptyset$ klar, und $M_1 \cap F(P_2 \setminus U_2) \subset M_1 \cap X_2 = \emptyset$ nach (3). Also bleibt nur noch $M_2 \cap F(P_2 \setminus U_2) = \emptyset$ zu zeigen. Dazu verwenden wir (5) und (6):

$$M_2 \cap F(P_2 \setminus U_2) \subset M_2 \cap (F(P \setminus U) \cup (M \cap S)) \subset (M_2 \cap F(P \setminus U)) \cup (M_2 \cap S).$$

Der erste Term rechts ist enthalten in $F(U) \cap F(P \setminus U) = \emptyset$, und der zweite in $M_2 \cap X_1 = \emptyset$.

Schließlich ist nach Definition der Abschluss von \tilde{U} gerade \tilde{P} . Damit sind die Punkte (i) — (iv) von 12.2 verifiziert, was zu beweisen war.

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass X_2 ein Stück und X die fast disjunkte Vereinigung von X_1 und X_2 (wie in 12.6) ist.

§13. Orientierungen und die Integration von Differentialformen

Übersicht. Wir definieren Orientierungen von reellen endlichdimensionalen Vektorräumen und Orientierungen auf Teilmengen des \mathbf{R}^n . Rechnerisch verhalten sich Orientierungen ähnlich wie n -Formen (13.7). Das Produkt einer n -Form und einer Orientierung ist eine n -Dichte und kann somit integriert werden (13.8). Schließlich werden auch (tangente) Orientierungen von Mannigfaltigkeiten und Stücken eingeführt (13.10) und damit das Integral einer p -Form über ein orientiertes Stück definiert (13.8).

13.1. Definition (Orientierung eines Vektorraumes). Wir kommen nun zum Begriff der Orientierung eines reellen endlichdimensionalen Vektorraumes \mathbf{V} , der für den Anfänger immer etwas unheimlich ist. Grob gesprochen ist eine Orientierung nichts anderes als eine Vorschrift, die jeder Basis von \mathbf{V} in konsistenter Weise ein Vorzeichen ± 1 zuordnet. Genauer sei $\text{Bas}(\mathbf{V})$ die Menge aller Basen $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathbf{V} . Wäre \mathbf{V} der \mathbf{R}^n , dann könnten wir einer Basis \mathbf{b} ein kanonisches Vorzeichen zuordnen durch die Vorschrift

$$\varphi_{\text{can}}(\mathbf{b}) := \text{sgn det } \mathbf{b}, \quad (1)$$

weil dann ja das n -tupel \mathbf{b} der Spaltenvektoren als eine $n \times n$ -Matrix aufgefasst werden kann. Im Fall eines beliebigen \mathbf{V} ist das nicht möglich, und das Beste, was man erreichen kann, ist zunächst jedem Paar von Basen \mathbf{a} und \mathbf{b} ein relatives Vorzeichen zuzuordnen durch die Vorschrift

$$\text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \text{sgn det}(\mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b}).$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn die Basis \mathbf{b} ist dasselbe wie der Isomorphismus $\mathbf{b} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}$, der $e_i \mapsto b_i$ abbildet. Also ist $\mathbf{a}^{-1} \circ \mathbf{b} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ein Vektorraum-Isomorphismus und hat daher eine wohldefinierte von Null verschiedene Determinante. Für die relativen Vorzeichen gilt die Relation

$$\text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \text{sgn}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = \text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (2)$$

wie man leicht aus der Determinantenmultiplikationsformel ableitet.

Die Zuordnung absoluter Vorzeichen zu Basen ist nicht ohne Willkür möglich. Wir definieren: Eine *Orientierung von \mathbf{V}* ist eine Funktion $\varphi: \text{Bas}(\mathbf{V}) \rightarrow \{\pm 1\}$, sodass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \text{Bas}(\mathbf{V})$ gilt

$$\varphi(\mathbf{a}) \text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \varphi(\mathbf{b}). \quad (3)$$

Diese Bedingung besagt also einfach, dass die Vorzeichenzuordnung $\mathbf{a} \mapsto \varphi(\mathbf{a})$ *konsistent* ist in dem Sinne, dass zwei Basen, deren relatives Vorzeichen $\text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = +1$ ist, dasselbe $\varphi(\mathbf{a}) = \varphi(\mathbf{b})$ haben, während sie andernfalls entgegengesetztes Vorzeichen bekommen.

Beispiele. (a) Auf dem \mathbf{R}^n definiert (1) eine Orientierung, denn (3) folgt sofort aus der Multiplikativität der Determinante. Sie heißt die *kanonische Orientierung des \mathbf{R}^n* .

(b) Ein beliebiger Vektorraum \mathbf{V} hat mindestens eine Orientierung. Dazu fixieren wir eine Basis \mathbf{a} , und definieren $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) := \text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Dann folgt (3) aus (2). Wir nennen $\varphi_{\mathbf{a}}$ *die durch \mathbf{a} definierte Orientierung*. Speziell ist die kanonische Orientierung des \mathbf{R}^n gerade $\varphi_{\text{can}} = \varphi_{\mathbf{e}}$, wobei $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des \mathbf{R}^n ist.

(c) Falls φ eine Orientierung von \mathbf{V} ist, dann ist es auch $-\varphi$, genannt *die entgegengesetzte Orientierung*. Das folgt unmittelbar aus den Definitionen.

13.2. Lemma. *Die Menge $\text{Or}(\mathbf{V})$ der Orientierungen eines n -dimensionalen reellen Vektorraumes \mathbf{V} hat genau zwei Elemente.*

Beweis. Sei \mathbf{a} eine feste Basis von \mathbf{V} . Dann sind $\varphi_{\mathbf{a}}$ und $-\varphi_{\mathbf{a}}$ verschiedene Orientierungen, denn es ist $\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = 1$ und $(-\varphi_{\mathbf{a}})(\mathbf{a}) = -1$. Andererseits sei ψ eine beliebige Orientierung von \mathbf{V} und etwa $\psi(\mathbf{a}) = a \in \{\pm 1\}$. Dann gilt $\psi = a\varphi_{\mathbf{a}}$; denn für ein beliebiges $\mathbf{b} \in \text{Bas}(\mathbf{V})$ ist $(a\varphi_{\mathbf{a}})(\mathbf{b}) = \psi(\mathbf{a}) \text{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi(\mathbf{b})$ wegen 13.1.3.

Wir bemerken, dass dies alles auch noch für den Nullvektorraum gilt, mit der leeren Menge als einziger Basis. Für $n > 0$ ist keines der beiden Elemente von $\text{Or}(\mathbf{V})$ vor dem anderen ausgezeichnet (ausser in Spezialfällen wie dem \mathbf{R}^n selbst), dagegen hat der Nullvektorraum die ausgezeichnete (kanonische) Orientierung φ_{\emptyset} , die der Basis \emptyset die Zahl $+1$ zuordnet.

13.3. Orientierungen als Äquivalenzklassen von Basen. In der Literatur werden Orientierungen meist als Äquivalenzklassen von Basen definiert. Der Zusammenhang mit unserer Definition einer Orientierung ist der folgende: Die relative Vorzeichenfunktion $\text{sgn}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ liefert eine Äquivalenzrelation auf $\text{Bas}(\mathbf{V})$ durch

$$\mathbf{b} \sim \mathbf{c} \iff \text{sgn}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = +1$$

(dass dies wirklich eine Äquivalenzrelation ist, folgt sofort aus 13.1.2). Dann hat man eine natürliche Bijektion zwischen den Orientierungen und den Äquivalenzklassen dieser Relation, indem man jeder Orientierung φ die Klasse $\{\mathbf{b} \in \text{Bas}(\mathbf{V}) : \varphi(\mathbf{b}) = +1\}$ zuordnet. Die Details seien dem Leser überlassen.

13.4. Erweiterung der Orientierungsdefinition. Sei φ eine Orientierung auf dem n -dimensionalen Vektorraum \mathbf{V} . Es ist oft zweckmäßig, φ zu einer Funktion $\tilde{\varphi}$ auf beliebigen n -Tupeln $\mathbf{v} \in \mathbf{V}^n$ mit Werten in $\{0, \pm 1\}$ fortzusetzen durch die Festsetzung

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{v}), & \text{falls } \mathbf{v} \in \text{Bas}(\mathbf{V}), \\ 0 & \text{falls } \mathbf{v} \text{ linear abhängig ist.} \end{cases}$$

Dann gilt für $\tilde{\varphi}$ die Regel

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{v}A) = \tilde{\varphi}(\mathbf{v}) \operatorname{sgn} \det A, \quad (1)$$

für alle $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbf{R})$. Hier ist $\mathbf{v}A$ wie in 11.1 das formale Produkt von \mathbf{v} mit A bzw. die Zusammensetzung der Abbildungen $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ und $\mathbf{v}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{V}$, wobei letztere durch $e_i \mapsto v_i$ gegeben ist. In der Tat sind beide Seiten von (1) Null, falls \mathbf{v} keine Basis oder A nicht invertierbar ist, und im verbleibenden Fall gilt $\tilde{\varphi}(\mathbf{v}A) = \varphi(\mathbf{v}A) = \varphi(\mathbf{v}) \operatorname{sgn}(\mathbf{v}, \mathbf{v}A) = \varphi(\mathbf{v}) \operatorname{sgn} \det(\mathbf{v}^{-1}\mathbf{v}A) = \tilde{\varphi}(\mathbf{v}) \operatorname{sgn} \det A$, nach 13.1.3.

Umgekehrt sei $\tilde{\varphi}: \mathbf{V}^n \rightarrow \{0, \pm 1\}$ eine Funktion mit der Eigenschaft (1), die nicht konstant gleich Null ist. Dann ist die Einschränkung von $\tilde{\varphi}$ auf $\operatorname{Bas}(\mathbf{V})$ eine Orientierung von \mathbf{V} : In der Tat gibt es mindestens eine Basis \mathbf{a} mit $a := \tilde{\varphi}(\mathbf{a}) \neq 0$. Für eine beliebige Basis \mathbf{b} gilt dann, wenn wir $A = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{b}$ setzen, $\tilde{\varphi}(\mathbf{b}) = \tilde{\varphi}(\mathbf{a}A) = a \operatorname{sgn} \det A = a \operatorname{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})$, und somit ist $\tilde{\varphi}|_{\operatorname{Bas}(\mathbf{V})} = a\varphi_{\mathbf{a}}$ eine Orientierung.

Wir können und werden daher oft eine Orientierung φ von \mathbf{V} mit einer Abbildung $0 \neq \tilde{\varphi}: \mathbf{V}^n \rightarrow \{0, \pm 1\}$ mit der Eigenschaft (1) identifizieren und in der Bezeichnung keinen Unterschied machen.

13.5. Orientierungen auf Teilmengen des \mathbf{R}^n . Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Eine *Orientierung auf M* ist eine Abbildung $\xi: M \times (\mathbf{R}^n)^n \rightarrow \{0, \pm 1\}$, sodass für jedes $x \in M$ die Abbildung $\xi_x: \mathbf{v} \mapsto \xi(x; \mathbf{v})$ eine Orientierung des \mathbf{R}^n ist. Wir bemerken hier, dass im Falle $M = \mathbf{R}^n$ eine Orientierung *auf M* nicht mit einer Orientierung *von $M = \mathbf{R}^n$* identifiziert werden kann; denn die Abbildung $\xi: M \rightarrow \operatorname{Or}(\mathbf{R}^n)$ braucht nicht konstant zu sein! Genauer sollte man eine Orientierung ξ auf M als ein *Orientierungsfeld* auf M bezeichnen, das jedem $x \in M$ eine Orientierung ξ_x zuordnet.

Wegen der in 13.4 gemachten Überlegungen gilt also

$$\xi(x; \mathbf{v}A) = \xi(x; \mathbf{v}) \operatorname{sgn} \det A \quad (x \in M, \mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^n, A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbf{R})), \quad (1)$$

und $\xi_x \neq 0$ für alle $x \in M$. Man beachte die formale Ähnlichkeit von (1) mit der Eigenschaft 11.1.1 von Dichten! Der einzige Unterschied ist das Vorzeichen anstatt des Betrages der Determinante von A .

13.6. Beispiele. (a) Die *Standardorientierung* $\sigma = \sigma^n$ von M ordnet jedem Punkt $x \in \mathbf{R}^n$ die kanonische Orientierung des \mathbf{R}^n wie in 13.1.1 zu, also

$$\sigma(x; \mathbf{v}) = \operatorname{sgn} \det \mathbf{v}$$

für alle $x \in M, \mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^n$. Kombiniert man dies mit 10.5.5 im Fall $p = n$, so folgt

$$\sigma = \operatorname{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

(b) Sei $f: M \rightarrow \{\pm 1\}$ eine Funktion und ξ eine Orientierung auf M . Dann ist $f\xi$, definiert wie bei Dichten und Differentialformen als

$$(f\xi)(x; \mathbf{v}) := f(x) \xi(x; \mathbf{v}),$$

wieder eine Orientierung auf M .

(c) Ist ω eine nirgends verschwindende n -Form auf M , dann ist $\operatorname{sgn}(\omega)$ eine Orientierung auf M . Dies folgt sofort aus der Formel 11.2.1 durch Übergang zum Vorzeichen.

Hiermit lassen sich nun Orientierungen rechnerisch ganz ähnlich handhaben wie Dichten oder Differentialformen:

13.7. Satz. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$.

(a) (Normalform) Jede Orientierung ξ auf M lässt sich schreiben als

$$\xi = s \operatorname{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \quad (1)$$

mit einer eindeutig bestimmten Funktion $s: M \rightarrow \{\pm 1\}$, die gegeben ist durch $s(x) = \xi(x; \mathbf{e})$. Wir sagen, ξ sei stetig oder (lokal) integrierbar oder (lokal) konstant, falls die Funktion s die entsprechenden Eigenschaften hat.

(b) (Zurückholen unter Abbildungen) Seien U und V offen im \mathbf{R}^n und sei $\Phi: U \rightarrow V$ stetig differenzierbar mit nirgends verschwindender Funktionaldeterminante. Für eine Orientierung ξ auf V sei

$$\Phi^*(\xi)(x; \mathbf{v}) := \xi(x; \Phi'(x)\mathbf{v}).$$

Dann ist $\Phi^*(\xi)$ eine Orientierung auf U . Für diese Operation gelten (mit naheliegenden Änderungen) dieselben Regeln wie für das Zurückholen von Dichten und Differentialformen.

(c) Bezeichnet man die Koordinaten auf U bzw. V mit u^i bzw. x^i und schreibt ξ wie in (1), dann gilt explizit

$$\Phi^*(\xi) = (s \circ \Phi) \cdot \operatorname{sgn} \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(u^1, \dots, u^n)} \cdot \operatorname{sgn}(du^1 \wedge \cdots \wedge du^n). \quad (2)$$

Beweis. Die Beweise verlaufen ganz ähnlich wie die entsprechenden für Dichten in 11.3(b) und 11.4 bzw. Differentialformen in 10.11. Wir fassen uns daher kurz.

(a) Sei $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis des \mathbf{R}^n . Falls ξ in der Form 13.7 geschrieben ist, so ist $\xi(x; \mathbf{e}) = s(x)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt definiere man s durch diese Gleichung. Dann zeigt eine ähnliche Rechnung wie im Beweis von 11.3, unter Verwendung von 13.5.1, dass (1) gilt.

(b) Wie im Beweis von 11.4 sieht man, dass für $\Phi^*(\xi)$ die Eigenschaft 13.5.1 erfüllt ist. Weiter ist $(\Phi^*(\xi)(x; \mathbf{e}) = \xi(\Phi(x); \Phi'(x)) = \operatorname{sgn} \det \Phi'(x) \neq 0$ nach unserer Voraussetzung über die Funktionaldeterminante, also ist $\Phi^*(\xi)_x \neq 0$ für alle $x \in U$.

(c) Wegen der Rechenregeln für das Zurückholen und 10.12.3 ist

$$\begin{aligned} \Phi^*(s \operatorname{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)) &= (s \circ \Phi) \operatorname{sgn}(\Phi^*(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)) \\ &= (s \circ \Phi) \operatorname{sgn}((\det \Phi') du^1 \wedge \cdots \wedge du^n) \\ &= (s \circ \Phi) \operatorname{sgn}(\det \Phi') \operatorname{sgn}(du^1 \wedge \cdots \wedge du^n). \end{aligned}$$

Bemerkung. Da die Funktion s in (1) nur die Werte ± 1 annehmen kann, ist eine stetige Orientierung auf einer offenen Menge notwendigerweise lokal konstant und damit beliebig oft differenzierbar.

13.8. Integration von n -Formen über orientierte Mengen. Die Bedeutung der Orientierungen für die Integrationstheorie liegt darin, dass man mit ihrer Hilfe Differentialformen in Dichten verwandeln und dann wie in 11.6 integrieren kann. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$, sei $\xi = s \operatorname{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$ eine Orientierung auf M und sei $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ eine n -Form auf M . Dann gilt

$$\begin{aligned} (\xi\omega)(x; \mathbf{v}A) &= \xi(x; \mathbf{v}A)\omega(x; \mathbf{v}A) = \xi(x; \mathbf{v}) \operatorname{sgn} \det A \cdot \omega(x; \mathbf{v}) \det A \\ &= \xi(x; \mathbf{v})\omega(x; \mathbf{v})|\det A| = (\xi\omega)(x; \mathbf{v})|\det A|, \end{aligned}$$

für alle $\mathbf{v} \in (\mathbf{R}^n)^n$ und $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{R})$. Also ist $\xi\omega$ eine n -Dichte, und man sieht leicht, dass sie durch

$$\xi\omega = sf \cdot \text{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \cdot (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = sf |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$$

gegeben ist.

Nun sei M eine messbare Menge und ξ eine lokal integrierbare Orientierung auf M . Das Paar (M, ξ) nennen wir eine *orientierte Menge* und verwenden dafür auch die Schreibweise

$$\mathfrak{M} = (M, \xi).$$

Eine n -Form ω auf M heißt *über die orientierte Menge \mathfrak{M} integrierbar*, falls die Dichte $\xi\omega$ über M integrierbar ist (vgl. 11.6), oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die Funktion sf über M integrierbar ist. Das *Integral von ω über \mathfrak{M}* ist dann definiert als das Integral von $\xi\omega$ über M , also

$$\int_{\mathfrak{M}} \omega = \int_{(M, \xi)} \omega := \int_M \xi\omega = \int_M sf |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|. \quad (1)$$

In vielen Fällen verwendet man die Standardorientierung des \mathbf{R}^n , und trifft dann zur Vereinfachung der Schreibweise die Abmachung, dass das Integral einer n -Form bei nicht angegebener Orientierung als das Integral bezüglich der Standardorientierung zu verstehen ist:

$$\int_M \omega := \int_{(M, \sigma)} \omega = \int_M f |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| \quad (2)$$

Wir betonen aber ausdrücklich, dass dies nur für n -Formen im \mathbf{R}^n gilt; bei den später betrachteten Integralen von p -Formen über p -dimensionale Stücke ist immer die Angabe einer Orientierung erforderlich.

Aus den Definitionen und den bekannten Regeln für die Integration ist klar, dass $\int_{\mathfrak{M}} \omega$ in ω linear ist. Weiter ändert sich bei Umorientierung das Vorzeichen: Definieren wir die entgegengesetzt orientierte Menge durch

$$-\mathfrak{M} := (M, -\xi),$$

so ist offenbar

$$\int_{-\mathfrak{M}} \omega = - \int_{\mathfrak{M}} \omega. \quad (3)$$

Die Integraldreiecksungleichung gilt in der folgenden Form:

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} \omega \right| \leq \int_M |\omega|. \quad (4)$$

Der Beweis folgt sofort aus 11.6.2 und den Definitionen, weil $|\xi| = 1$.

Das gewöhnliche eindimensionale Integral $\int_a^b f(x) dx$ einer Funktion f über ein kompaktes Intervall ist eigentlich das Integral der 1-Form $\omega = f dx$ über $[a, b]$ mit der Standardorientierung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{([a, b], \sigma)} f dx.$$

Die bekannte Regel $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ ist ein Spezialfall von (3).

13.9.* Satz (Transformationsformel für Differentialformen). Sei $\Phi : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen des \mathbf{R}^n und sei $\mathfrak{M} = (M, \xi)$ eine orientierte Menge mit $M \subset U$. Ferner sei ω eine n -Form auf $\Phi(M)$. Definiere die Orientierung $\Phi_*(\xi)$ von $\Phi(M)$ durch $\Phi_*(\xi) := (\Phi^{-1})^*(\xi)$. Dann ist $\Phi_*(\mathfrak{M}) := (\Phi(M), \Phi_*(\xi))$ eine orientierte Menge. Weiter ist ω genau dann über $\Phi_*(\mathfrak{M})$ integrierbar, wenn $\Phi^*(\omega)$ über \mathfrak{M} integrierbar ist, und in diesem Fall gilt die Formel

$$\int_{\Phi_*(\mathfrak{M})} \omega = \int_{\mathfrak{M}} \Phi^*(\omega). \quad (1)$$

Beweis. Aus 13.7.2 und der Stetigkeit der Funktionaldeterminante von Φ^{-1} folgt mit 5.2(c) die lokale Integrierbarkeit von $\Phi_*(\xi)$, und es gilt

$$\Phi^*(\Phi_*(\xi)) = \Phi^*((\Phi^{-1})^*(\xi)) = (\Phi^{-1} \circ \Phi)^*\xi = \xi.$$

Nun folgt die Behauptung aus der Transformationsformel für Dichten 11.7 und der Definition der Integrale über orientierte Mengen:

$$\begin{aligned} \int_{\Phi_*(\mathfrak{M})} \omega &= \int_{\Phi(M)} \Phi_*(\xi) \omega = \int_M \Phi^*(\Phi_*(\xi) \omega) \\ &= \int_M \Phi^*(\Phi_*(\xi)) \Phi^*(\omega) = \int_M \xi \Phi^*(\omega) = \int_{\mathfrak{M}} \Phi^*(\omega). \end{aligned}$$

13.10. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und Stücken. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *tangentiale Orientierung* von M ist eine Abbildung ξ , die jedem Punkt $a \in M$ eine Orientierung ξ_a des Tangentialraums $T_a(M)$ zuordnet. Wie gewohnt schreiben wir wieder $\xi(a; \mathbf{v}) = \xi_a(\mathbf{v})$, für $a \in M$ und $\mathbf{v} \in T_a(M)^p$. Streng genommen ist damit ξ eine Funktion

$$\xi : \bigcup_{a \in M} \{a\} \times T_a(M)^p \rightarrow \{0, \pm 1\}.$$

Eine tangentielle Orientierung von M ist also wohl zu unterscheiden von einer Orientierung *auf der Menge* M , die ja gemäß 13.5 jedem $a \in M$ eine Orientierung des umgebenden \mathbf{R}^n zuordnet. Komplementär zu den tangentialen Orientierungen kann man auch *transversale Orientierungen* von M betrachten, die jedem Punkt $a \in M$ eine Orientierung des Normalenraums $T_a(M)^\perp$ zuordnen. Solche werden wir aber nicht brauchen.

Unter einer *Orientierung eines Stückes* X verstehen wir eine tangentielle Orientierung des regulären Teils X_{reg} , der ja nach 12.13 eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit ist. In den singulären Punkten von X existiert der Tangentialraum nicht mehr, und daher ist auch eine Orientierung dort nicht mehr sinnvoll definierbar.

Sei speziell X ein 0-dimensionales Stück, also eine endliche Menge. Dann ist X in jedem seiner Punkte a glatt, mit Tangentialraum $T_a(X) = \{0\}$. Nach den Bemerkungen über die Orientierungen des Nullvektorraums in 13.2 ist dann eine Orientierung von X einfach eine Abbildung von X in die Menge $\{\pm 1\}$.

Sei wieder X ein beliebiges Stück und $F : P \rightarrow X$ eine Parametrisierung von X , mit Regularitätsbereich $U \subset P$. Dann ist $F(U) \subset X_{\text{reg}}$ nach 12.13, und wir können ξ nach U zurückholen durch die übliche Formel

$$F^*(\xi)(u; \mathbf{v}) = \xi(F(u); F'(u)\mathbf{v}) \quad (1)$$

für $u \in U$ und $\mathbf{v} \in (\mathbf{R}^p)^p$. Wir erinnern daran, dass $F'(u): \mathbf{R}^p \rightarrow T_{F(u)}(X)$ ein Isomorphismus der Vektorräume ist, und daher eine Basis von \mathbf{R}^p in eine Basis von $T_{F(u)}(X)$ abbildet. Folglich ist $F^*(\xi)$ tatsächlich eine Orientierung auf U . Die Orientierung ξ von X heißt *stetig* oder (lokal) *integrierbar*, falls $F^*(\xi)$ für alle Parametrisierungen von X die entsprechende Eigenschaft hat. Stetige Orientierungen braucht es nicht zu geben! Beispiel: Möbiusband.

Zur expliziten Berechnung von $F^*(\xi)$ benützt man die Normalform 13.7.1. Wir bezeichnen mit u^1, \dots, u^p die Koordinaten in U . Dann ist $F^*(\xi) = s_F \operatorname{sgn}(du^1 \wedge \dots \wedge du^p)$, mit

$$s_F(u) = F^*(\xi)(u; \mathbf{e}) = \xi(F(u); F'(u)\mathbf{e}) = \xi(F(u); \frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^p}). \quad (2)$$

13.11. Beispiel. *Die Standardorientierung der Sphäre.* Wir betrachten die Sphäre $X = \mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$. Jeder Punkt ist regulär, und $T_a(X) = (\mathbf{Ra})^\perp$ ist das orthogonale Komplement der Geraden \mathbf{Ra} (bezüglich des Euklidischen Skalarprodukts). Für eine Basis $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ von $T_a(X)$ ist daher (a, v_1, \dots, v_{n-1}) eine Basis des \mathbf{R}^n , und somit ist es sinnvoll, eine Orientierung ξ von X durch

$$\xi(a; \mathbf{v}) := \operatorname{sgn} \det(a, \mathbf{v}) \quad (1)$$

zu definieren. Wir nennen ξ die *Standardorientierung* von \mathbf{S}^{n-1} . Diese Orientierung ist stetig. In der Tat ist, für eine beliebige Parametrisierung F mit Regularitätsbereich U , nach der soeben angestellten Überlegung $(F(u); F'(u))$ eine Basis des \mathbf{R}^n , und die Abbildung $u \mapsto (F(u); F'(u))$ ist stetig. Also ist $s(u) = \operatorname{sgn} \det(F(u); F'(u))$ eine stetige Funktion auf U .

Sei $m = n - 2$ und sei $F: P \rightarrow X$ die Parametrisierung durch sphärische Koordinaten $\varphi, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ wie in 12.12.3. Hier ist $U = P^\circ =]0, 2\pi[\times] - \pi/2, \pi/2[^m$ ein Regularitätsbereich. Wir behaupten, dass $F^*(\xi)$ die Standardorientierung im Parameterraum ist, also

$$F^*(\xi) = \operatorname{sgn}(d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \dots \wedge d\vartheta_m). \quad (2)$$

Zum Beweis verwenden wir 13.10.2 und setzen zur Abkürzung $\vec{\vartheta} = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. Sei Φ die Polarkoordinatenabbildung von 8.7(e), sodass also $F(\varphi, \vec{\vartheta}) = \Phi(1, \varphi, \vec{\vartheta})$. Nach 8.8.3 ist die erste Spalte von $\Phi'(1, \varphi, \vec{\vartheta})$ gleich $\Phi(1, \varphi, \vec{\vartheta}) = F(\varphi, \vec{\vartheta})$. Daher folgt aus 8.8.1

$$\begin{aligned} s_F(\varphi, \vec{\vartheta}) &= \operatorname{sgn} \det \left(F(\varphi, \vec{\vartheta}); \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \vartheta_m} \right) = \operatorname{sgn} \det \Phi'(1, \varphi, \vec{\vartheta}) \\ &= \operatorname{sgn}(\cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \dots \cos^m \vartheta_m) = +1; \end{aligned}$$

denn $(\varphi, \vec{\vartheta}) \in P^\circ$, insbesondere $|\vartheta_i| < \pi/2$ und somit $\cos \vartheta_i > 0$.

13.12. Integration von Differentialformen über orientierte Stücke. Ähnlich wie eine orientierte Menge ist ein *orientiertes Stück* ein Paar $\mathfrak{X} = (X, \xi)$, bestehend aus einem p -dimensionalen Stück X und einer tangentialen lokal integrierbaren Orientierung ξ auf X_{reg} .

Sei ω eine p -Form auf einer offenen Obermenge von X . Ist F eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich $U \subset P$, dann ist $F^*(\omega)$ eine p -Form auf P und $F^*(\xi)$ eine Orientierung auf U . Daher ist wegen 13.8 $F^*(\xi)F^*(\omega)$ eine p -Dichte auf



U , die wir irgendwie (zum Beispiel durch Null) auf P fortsetzen. Wie in 12.12.1 und 13.8 definieren wir: ω heißt über das orientierte Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ *integrierbar*, falls $F^*(\xi) F^*(\omega)$ über P integrierbar ist, und definieren dann das Integral durch

$$\int_{\mathfrak{X}} \omega := \int_{(X, \xi)} \omega := \int_P F^*(\xi) F^*(\omega). \quad (1)$$

Weil $P \setminus U$ eine Nullmenge ist, spielt die Art der Fortsetzung auf ganz P weder für die Integrierbarkeit noch für den Wert des Integrals eine Rolle. Für stetiges ω existiert das Integral über \mathfrak{X} immer. Ähnlich wie in 12.12 sieht man, dass diese Definitionen von der Wahl der Parametrisierung unabhängig sind (Aufgabe!).

Für 0-dimensionales X ist nach 13.10 eine Orientierung einfach eine Abbildung $\xi : X \rightarrow \{\pm 1\}$, und wir definieren das Integral einer 0-Form, also einer Funktion, f über \mathfrak{X} durch $\sum_{x \in X} \xi(x) f(x)$.

Beispiel. Sei ξ die Standardorientierung der Sphäre \mathbf{S}^{n-1} und sei Θ_{n-1} die Raumwinkelform auf $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Wir setzen wieder $m = n - 2$. Nach 10.12.2 und 13.11.2 ist

$$F^*(\xi) F^*(\Theta_{n-1}) = \cos \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_2 \cdots \cos^m \vartheta_m |d\varphi \wedge d\vartheta_1 \wedge \cdots \wedge d\vartheta_m|,$$

und daher gilt wegen 12.12.4 sowie 12.12.5

$$\int_{(\mathbf{S}^{n-1}, \xi)} \Theta_{n-1} = \mu_{n-1}(\mathbf{S}^{n-1}) \neq 0. \quad (2)$$

§14. Der Gaußsche Integralsatz

Übersicht. Wir formulieren den fundamentalen Gaußschen Integralsatz 14.8, die n -dimensionale Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, der das Integral der äußeren Ableitung einer $(n - 1)$ -Form ω über eine stückweise glatt berandete orientierte Menge $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ als das Integral von ω über den Rand von X ausdrückt. Dazu muss der Rand mit der richtigen, von ξ induzierten Orientierung (14.6) versehen werden, was mit Hilfe der in glatten Randpunkten wohldefinierten äußeren Normalen von X geschieht (14.3). Der technisch aufwendige Beweis des Gaußschen Integralsatzes wird erst im nächsten Paragraphen erbracht.

14.1. Stückweise glatt berandete Mengen. Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}^n$ heißt *stückweise glatt berandet*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) X ist kompakt und gleich dem Abschluss ihres Inneren: $X = \overline{X^\circ}$;
- (ii) der Rand von X ist ein $(n - 1)$ -dimensionales Stück.

In diesem Fall heißen die Punkte des regulären Teils (siehe 12.13) von $\text{Rd } X$ die *glatten Randpunkte* von X .

Wie schon in 12.6 bemerkt, ist ein niederdimensionales Stück eine Nullmenge im \mathbf{R}^n . Daher zeigt 12.4, dass wir die Bedingung (i) in der Definition auch durch

- (i)' X ist ein n -dimensionales Stück

ersetzen können.

Beispiele. (a) Ein nicht ausgearteter kompakter Quader ist stückweise glatt berandet, denn er erfüllt (i) nach 1.1.1, und sein Rand ist nach 12.7(a) ein $(n - 1)$ -dimensionales Stück. Die glatten Randpunkte sind genau die Punkte im relativen Inneren der Randquader.

(b) Die n -dimensionale Vollkugel (mit Radius 1 und Mittelpunkt 0) ist stückweise glatt berandet: Ihr Rand ist die Sphäre \mathbf{S}^{n-1} und diese ist nach 12.3(a) ein $(n - 1)$ -dimensionales Stück. Jeder Randpunkt ist glatt.

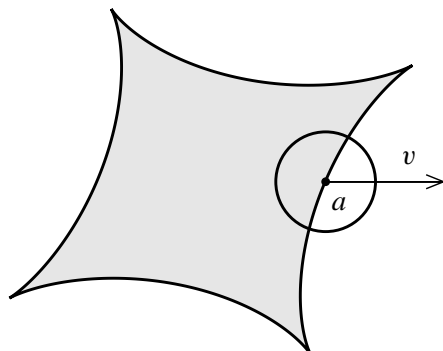
(c) Ähnlich sieht man leicht, dass Mengen wie ein Vollzylinder, ein Tetraeder, eine Pyramide mit stückweise glatt berandeter Grundfläche usw. stückweise glatt berandet sind.

(d) Eine Teilmenge $X \subset \mathbf{R}$ ist genau dann stückweise glatt berandet, wenn sie die disjunkte Vereinigung von endlich vielen Intervallen ist (Aufgabe!).

(e) Nicht jedes n -dimensionale Stück ist stückweise glatt berandet: Sei etwa $X \subset \mathbf{R}$ die Vereinigung der Intervalle $[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}]$ ($k \geq 1$) zusammen mit dem Nullpunkt.

Dann ist X ein eindimensionales Stück mit Rand $\{0\} \cup \{\frac{1}{k} : k \geq 1\}$, und ist daher nicht stückweise glatt berandet. Ein zweidimensionales Beispiel ist etwa die Teilmenge des \mathbf{R}^2 , die von der Horizontalen $y = 1$, den Vertikalen $x = 0$ und $x = 1$ und dem Graphen der Funktion $y = x \sin(1/x)$ begrenzt wird.

14.2. Äußere Vektoren. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ stückweise glatt berandet und $Y = \text{Rd } X$. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass eine stetige Orientierung auf X° in natürlicher Weise eine stetige Orientierung von Y induziert (14.6). Dazu brauchen wir den Begriff des nach aussen weisenden Vektors in einem glatten Randpunkt $a \in Y_{\text{reg}}$:



Die genaue Definition lautet: Ein Vektor $v \in \mathbf{R}^n$ heißt ein *äußerer Vektor* von X im Punkt a , wenn er folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) $v \notin T_a(Y)$;
- (ii) es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $a + tv \notin X$ für alle $0 < t < \varepsilon$.

Die Bedingung (i) ist wesentlich und folgt nicht aus (ii), Beispiel: Ist X eine Vollkugel und $0 \neq v \in T_a(Y)$, dann gilt $a + tv \notin X$ für alle $t \neq 0$.

Anschaulich ist klar, dass die äußeren Vektoren gerade einen der beiden offenen Halbräume bilden, in die $\mathbf{R}^n \setminus T_a(Y)$ zerfällt, aber der Beweis dieser Tatsache ist nicht einfach:

14.3. Satz (über die äußeren Vektoren und die äußere Normale). Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ stückweise glatt berandet mit Rand Y , und sei a ein glatter Randpunkt von X .

(a) Es gibt eine offene Umgebung V von a und eine Submersion $g : V \rightarrow \mathbf{R}$, sodass $Y \cap V = g^{-1}(0)$ ist und die Mengen $X^\circ \cap V$ und $\complement X \cap V$ zusammenhängend und durch

$$X^\circ \cap V = \{x \in V : g(x) < 0\}, \quad \complement X \cap V = \{x \in V : g(x) > 0\} \quad (1)$$

gegeben sind.

(b) Ein Vektor v ist genau dann ein äußerer Vektor von X in a , wenn $g'(a)v > 0$. Es gibt genau einen äußeren Vektor $\mathbf{n}_X(a)$ der Euklidischen Länge 1, der auf $T_a(Y)$ senkrecht steht, genannt die äußere Normale von X in a . Das auf Y_{reg} definierte Vektorfeld \mathbf{n}_X ist differenzierbar.

Beweis. Sei V eine offene Umgebung von a und $g: V \rightarrow \mathbf{R}$ eine Submersion mit $g^{-1}(0) = Y \cap V$. Nach Umnummerierung der Koordinaten können wir $(\partial g / \partial x^1)(a) \neq 0$ annehmen. Betrachte die Abbildung $\varphi = (g, x^2 - a^2, \dots, x^n - a^n): V \rightarrow \mathbf{R}^n$. Dann gilt $\varphi(a) = 0$ und $\varphi'(a)$ ist invertierbar. Nach dem Umkehrsatz können wir daher, nach Verkleinern von V , annehmen, dass φ ein Diffeomorphismus von V auf $] - \delta, \delta[^n$ ist. Dann sind die Mengen

$$V_- := \{x \in V : g(x) < 0\}, \quad V_+ := \{x \in V : g(x) > 0\} \quad (2)$$

zusammenhängend, denn $V_- = \varphi^{-1}(] - \delta, 0[\times] - \delta, \delta[^{n-1})$ ist das Bild eines offenen Quaders unter einem Diffeomorphismus, und analog für V_+ .

Weil X der Abschluss seines Inneren ist, liegen in jeder Umgebung von a , insbesondere also in V , noch Punkte von X° . Offenbar ist V die disjunkte Vereinigung von V_+ , V_- und $g^{-1}(0) = V \cap Y$. Wegen $X^\circ \cap Y = \emptyset$ ist daher $X^\circ \cap V = X^\circ \cap (V_+ \cup V_-) \neq \emptyset$.

Nun behaupten wir:

$$X^\circ \cap V_- \neq \emptyset \implies V_- \subset X^\circ. \quad (3)$$

In der Tat ist der \mathbf{R}^n die disjunkte Vereinigung von X° , $Y = \text{Rd } X$ und $\text{C}X$, und $\text{C}X$ ist offen. Wegen $V \cap Y = g^{-1}(0)$ ist $V_- \cap Y = \emptyset$. Also ist $V_- = (V_- \cap X^\circ) \cup (V_- \cap \text{C}X)$ die disjunkte Vereinigung von zwei offenen Mengen. Weil V_- zusammenhängend und $X^\circ \cap V$ nicht leer ist, muss $V_- \cap \text{C}V$ leer sein (siehe Analysis 2, 5.9). Das beweist (3). Ebenso zeigt man, dass $X^\circ \cap V_+ \neq \emptyset$ die Inklusion $V_+ \subset X^\circ$ nach sich zieht. Hätte schließlich X° mit V_+ und V_- nicht leeren Durchschnitt, so wäre $V = V_- \cup (V \cap Y) \cup V_+ \subset X$ und somit a ein innerer Punkt von X , im Widerspruch zu $a \in \text{Rd } X$. Indem man also gegebenenfalls g durch $-g$ ersetzt, wobei sich die Rollen von V_- und V_+ vertauschen, kann man annehmen, dass

$$X^\circ \cap V = V_-, \quad \text{C}X \cap V = V_+. \quad (4)$$

Wegen (2) ist damit (1) bewiesen.

Als Nächstes zeigen wir (b) gleich für einen beliebigen Punkt $y \in Y \cap V$ anstelle von a . Zum Beweis betrachten wir die für genügend kleine reelle t definierte Funktion $f(t) := g(y + tv)$. Es ist $f(0) = 0$ und $\dot{f}(0) = g'(y)v$. Wenn also $g'(y)v > 0$ ist, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(t) > 0$ und daher wegen (4) $y + tv \notin X$ für $0 < t < \varepsilon$. Also ist v ein äußerer Vektor von X in y . Umgekehrt sei das der Fall. Dann ist $y + tv \notin X$ für $0 < t < \varepsilon$ und daher $f(t) > 0$ nach (1). Da $g(y) = 0$, folgt durch Differenzieren $0 \leq \dot{f}(0) = g'(y)v$, und es muss sogar echt positiv sein, denn sonst wäre $v \in T_y(Y) = \text{Ker } g'(y)$.

Der Normalenraum von $T_y(Y)$ ist eindimensional. Daher ist die Existenz und Eindeutigkeit der äußeren Normalen klar. Für sie gilt die Formel

$$\mathbf{n}_X(y) := \frac{\text{grad}_y g}{\|\text{grad}_y g\|}, \quad (5)$$

denn $\text{grad}_y g$ steht senkrecht auf $\text{Ker } g'(y) = T_y(Y)$, und ist ein äußerer Vektor, weil $g'(y) \text{grad}_y g = \|\text{grad}_y g\|^2 > 0$. Aus dieser Formel erkennt man auch die Differenzierbarkeit von $\mathbf{n}_X: Y_{\text{reg}} \rightarrow \mathbf{R}^n$, denn die rechte Seite von (5) ist noch für alle $x \in V$ anstelle von y sinnvoll und zeigt, dass sich \mathbf{n}_X differenzierbar auf V fortsetzen lässt.

14.4.* Bemerkung. Sei $D \subset \mathbf{R}^n$ eine offene Menge. In der Literatur (siehe etwa K. Königsberger, Analysis 2) heißt ein Punkt $a \in \text{Rd } D$ ein *regulärer* oder *glatter Randpunkt* von D , wenn es eine offene Umgebung V von a und eine differenzierbare Funktion $g: V \rightarrow \mathbf{R}$ mit nirgends verschwindender Ableitung gibt, sodass

$$D \cap V = \{x \in D : g(x) < 0\}. \quad (1)$$

Es ist dann leicht zu sehen, dass $(\text{Rd } D) \cap V = g^{-1}(0)$, und daher ist der Rand von D im Punkt a wirklich glatt (und von der Kodimension 1). Umgekehrt stimmt es nicht: Beispielsweise sind die Punkte der positiven x -Achse glatte Punkte des Randes von $D = \mathbf{R}^2 \setminus [0, \infty[$, aber D hat überhaupt keine regulären Randpunkte.

Nun sei X eine stückweise glatt berandete Menge wie in 14.1. Wie hängen dann die regulären Randpunkte von X° mit den in 14.1 definierten glatten Randpunkten von X zusammen? Antwort: Beide Begriffe stimmen überein. Bezeichnen wir nämlich den Rand von X wieder mit Y , so ist wegen Satz 14.3(a) jeder Punkt $a \in Y_{\text{reg}}$ ein regulärer Randpunkt von X° . Umgekehrt sei a ein regulärer Randpunkt von X° im obigen Sinne und seien V und g wie in (1) gewählt. Wegen Bedingung (i) in 14.1 ist $\text{Rd } X^\circ = \overline{X^\circ} \setminus X^\circ = X \setminus X^\circ = \text{Rd } X = Y$. Also ist Y in a glatt von der Kodimension 1, und nach Satz 12.15 gilt $a \in Y_{\text{reg}}$.

14.5. Lemma. Sei $M \subset \mathbf{R}^n$ eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und sei ξ eine $(n-1)$ -dimensionale Orientierung auf der Menge M .

(a) Sei $f: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ ein Vektorfeld, das nirgends tangential an M ist, also $f(x) \notin T_x(M)$ für alle $x \in M$. Dann induziert f eine tangentialen Orientierung $\xi \lrcorner f$ durch

$$(\xi \lrcorner f)(x; \mathbf{v}) := \xi(x; f(x), \mathbf{v}), \quad (1)$$

für alle $x \in M$ und $\mathbf{v} \in (T_x(M))^{n-1}$.

(b) Ist g ein weiteres nirgends tangentialen Vektorfeld auf M , so gilt $\xi \lrcorner f = \xi \lrcorner g$ dann und nur dann, wenn $f(x)$ und $g(x)$ für alle $x \in M$ im selben offenen Halbraum von $\mathbf{R}^n \setminus T_x(M)$ liegen.

Beweis. (a) Beachte, dass die rechte Seite von (1) für eine Basis \mathbf{v} von $T_x(M)$ gleich ± 1 ist, denn wegen $f(x) \notin T_x(M)$ ist $(f(x), \mathbf{v})$ eine Basis des \mathbf{R}^n . Zum Beweis der Orientierungseigenschaft von $\xi \lrcorner f$ sei $A \in \text{Mat}_{n-1}(\mathbf{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\xi \lrcorner f)(x; \mathbf{v}A) &= \xi(x; (f(x), \mathbf{v}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}) \\ &= \xi(x; f(x), \mathbf{v}) \cdot \text{sgn det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = (\xi \lrcorner f)(x; \mathbf{v}) \cdot \text{sgn det } A. \end{aligned}$$

(b) Weil $T_x(M)$ eine Hyperebene ist, zerfällt $\mathbf{R}^n \setminus T_x(M)$ in zwei disjunkte offene Halbräume, etwa H_1 und H_2 . Elementare lineare Algebra zeigt, dass $f(x) = \lambda g(x) + w$ mit $\lambda \neq 0$ und $w \in T_x(M)$. Dabei ist $\lambda > 0$ dann und nur dann, wenn $f(x)$ und $g(x)$ im selben Halbraum liegen. Sei $\mathbf{v} = (v_2, \dots, v_n)$ eine Basis von $T_x(M)$ und etwa $w = \sum_{i=2}^n \lambda_i v_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\xi \lrcorner f)(x; \mathbf{v}) &= \xi(x; \lambda g(x) + w, \mathbf{v}) \\ &= \xi(x; (g(x), v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ \lambda_2 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \lambda_n & & & & 1 \end{pmatrix}) \\ &= \xi(x; g(x), \mathbf{v}) \text{sgn}(\lambda) = (\xi \lrcorner g)(x; \mathbf{v}) \text{sgn}(\lambda). \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Beispiel. Sei $M = \mathbf{S}^{n-1}$ die Sphäre. Dann ist das Einheitsnormalenfeld $\mathbf{n}(x) = x$ ein nirgends tangentiales Vektorfeld. Die Orientierung $\sigma^n \lrcorner \mathbf{n}$ ist die in 13.11.1 eingeführte Standardorientierung von \mathbf{S}^{n-1} .

14.6. Randorientierung und Randintegral. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ stückweise glatt berandet mit Rand Y , und sei ξ eine stetige Orientierung auf X° . Wir behaupten, dass sich ξ eindeutig zu einer stetigen, wieder mit ξ bezeichneten Orientierung auf $X^\circ \cup Y_{\text{reg}}$ fortsetzen lässt. Dazu sei $a \in Y_{\text{reg}}$ und V eine Umgebung von a wie in Satz 14.3(a). Dann ist $X^\circ \cap V$ zusammenhängend. Wegen der Stetigkeit von ξ und der in 13.7 gemachten Bemerkung gilt daher $\xi(x; \mathbf{v}) = s(x) \operatorname{sgn} \det \mathbf{v}$ und $s(x) = \alpha \in \{\pm 1\}$ ist unabhängig von $x \in X^\circ \cap V$. Also lässt sich ξ durch $\xi(y; \mathbf{v}) = \alpha \operatorname{sgn} \det \mathbf{v}$ eindeutig stetig auf $Y_{\text{reg}} \cap V$ (und sogar auf ganz V) fortsetzen. Schließlich setzen wir ξ irgendwie auf ganz X fort, und bezeichnen diese Fortsetzung der Einfachheit halber auch wieder mit ξ . Die Fortsetzung von ξ auf ganz X ist im Allgemeinen nicht mehr stetig, siehe 14.7(c). Für das Integral einer n -Form über X spielt das aber keine Rolle, denn der Rand von X ist eine n -dimensionale Nullmenge. Jedenfalls ist ξ auf X fast überall stetig, insbesondere lokal integrierbar, und somit ist $\mathfrak{X} := (X, \xi)$ eine orientierte Menge im Sinne von 13.8.

Nach Lemma 14.5 induziert ξ und ein beliebiges äußeres Vektorfeld \mathbf{f} , zum Beispiel das äußere Normalenfeld \mathbf{n}_X , eine tangentialen Orientierung auf Y_{reg} , die wir mit

$$\partial \xi := \xi \lrcorner \mathbf{f} = \xi \lrcorner \mathbf{n}_X \quad (1)$$

bezeichnen. Wir nennen sie die *induzierte Orientierung des Randes*, und erhalten so ein orientiertes $(n-1)$ -dimensionales Stück

$$\mathfrak{Y} := \partial \mathfrak{X} := (Y, \partial \xi), \quad (2)$$

genannt der *orientierte Rand von \mathfrak{X}* .

Die Orientierung $\partial \xi$ von Y ist stetig. Um dies einzusehen, sei etwa $\xi = s \operatorname{sgn}(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$ wie in 13.7, und F eine Parametrisierung von Y . Bezeichnen wir die Koordinaten in \mathbf{R}^{n-1} mit u^2, \dots, u^n , dann ist wegen 13.10.2 (das dortige X und ξ ist jetzt durch Y und $\partial \xi$ zu ersetzen!)

$$F^*(\partial \xi) = s_F \operatorname{sgn}(du^2 \wedge \cdots \wedge du^n), \quad (3)$$

wobei

$$\begin{aligned} s_F(u) &= (F^*(\partial \xi))(u; \mathbf{e}) = \xi(F(u); \mathbf{n}_X(F(u)), F'(u)) \\ &= s(F(u)) \operatorname{sgn} \det(\mathbf{n}_X(F(u)), F'(u)) \end{aligned} \quad (4)$$

für $u \in U \subset P$. Wegen der Stetigkeit von \mathbf{n}_X und der stetigen Differenzierbarkeit von F sowie der Stetigkeit von s auf Y_{reg} ist s_F stetig, und das bedeutet nach 13.7(a) gerade die Stetigkeit von $F^*(\partial \xi)$.

Nun sei ω eine stetige $(n-1)$ -Form auf X . Dann existiert das Integral

$$\int_{\partial \mathfrak{X}} \omega := \int_{(Y, \partial \xi)} \omega = \int_P F^*(\partial \xi) F^*(\omega), \quad (5)$$

denn $F^*(\omega) = f du^2 \wedge \cdots \wedge du^n$ mit einer stetigen Funktion f auf der kompakten Menge P , und $F^*(\partial \xi) = s_F \operatorname{sgn}(du^2 \wedge \cdots \wedge du^n)$ ist wegen der Stetigkeit von s_F auf

U und weil $P \setminus U$ eine Nullmenge ist, nach 5.12 lokal integrierbar. Wir nennen (5) das *Randintegral von ω* (bezüglich \mathfrak{X}). Ist speziell $\xi = \sigma$ die Standardorientierung des \mathbf{R}^n , so verwenden wir, analog zu 13.8.2, die einfachere Schreibweise

$$\int_{\partial X} \omega := \int_{\partial \mathfrak{X}} \omega. \quad (6)$$

Schließlich sagen wir, die Parametrisierung F von $\text{Rd } X$ sei bezüglich ξ *korrekt orientiert*, wenn s_F konstant gleich 1 ist.

14.7. Beispiele. (a) Sei $X = Q$ ein nicht ausgearteter Quader und $\xi = \sigma$ die Standardorientierung des \mathbf{R}^n . Mit den Bezeichnungen von 12.7 ist der reguläre Teil des Randes von Q die Vereinigung der $(Q_i^\pm)_{\text{reg}} = F_{\pm i}(P_i^\circ)$, und es gilt $\mathbf{n}_Q(a) = \pm e_i$ für $a \in (Q_i^\pm)_{\text{reg}}$. Wir behaupten, dass für die wie in 14.6.4 definierten Vorzeichenfaktoren gilt:

$$s_{F_{i,\pm}} = \pm(-1)^{i-1}. \quad (1)$$

In der Tat ist nach Definition der $F_{i,\pm}$ (vgl. 12.7.2)

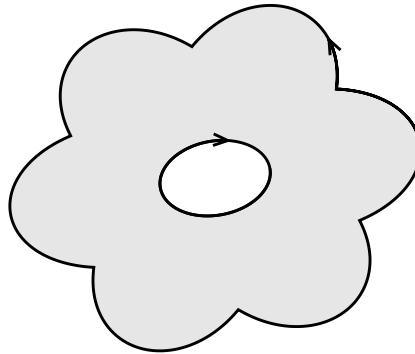
$$\frac{\partial F_{i,\pm}}{\partial u^2} = e_1, \quad \dots, \quad \frac{\partial F_{i,\pm}}{\partial u^i} = e_{i-1}, \quad \frac{\partial F_{i,\pm}}{\partial u^{i+1}} = e_{i+1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F_{i,\pm}}{\partial u^n} = e_n,$$

und somit wegen 14.6.4 und (1)

$$s_{F_{i,\pm}} = \text{sgn} \det(\pm e_i, e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) = \pm(-1)^{i-1}.$$

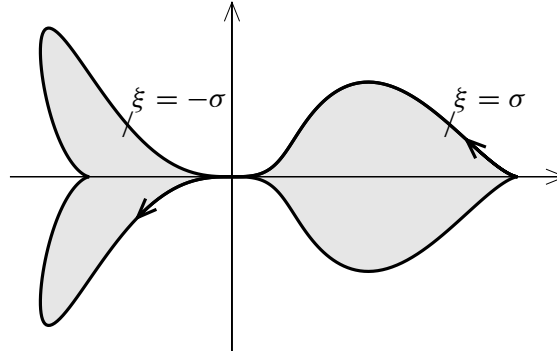
(b) Sei X die Einheitsvollkugel im \mathbf{R}^n und wieder $\xi = \sigma^n$. Dann ist $\text{Rd } X = \mathbf{S}^{n-1}$ und $\mathbf{n}_X(a) = a$. Daher ist hier die induzierte Orientierung gerade die Standardorientierung wie in 13.11.1. Für die sphärische Koordinatenabbildung F gilt $s_F = +1$ nach 13.11.2. Diese Parametrisierung des Randes der Vollkugel ist also korrekt orientiert.

(c) Sei speziell $X \subset \mathbf{R}^2$. Dann ist eine Parametrisierung des Randes Y eine stückweise glatte Kurve γ , und die Randorientierung entspricht einer Durchlaufungsrichtung dieser Kurve. Falls $\xi = \sigma$ die Standardorientierung des \mathbf{R}^2 ist, dann ist $\partial \xi$ dadurch gekennzeichnet, dass beim Durchlaufen des Randes das Innere von X zur Linken liegt:



Dies folgt einfach daraus, dass γ korrekt orientiert, also $s_\gamma = +1$ ist dann und dann, wenn die Basis $\mathbf{n}_X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)$ des \mathbf{R}^2 die Standardorientierung des \mathbf{R}^2 repräsentiert, also der zweite Vektor aus dem ersten bis auf einen positiven Faktor durch

eine Drehung um 90 Grad gegen den Uhrzeiger hervorgeht. Entsprechend liegt das Innere beim Durchlaufen dort rechts, wo $\xi = -\sigma$ ist:



Dies ist auch ein Beispiel dafür, wo sich die angegebene stetige Orientierung ξ auf dem Inneren von X nicht stetig auf ganz X fortsetzen lässt: Hier zerfällt X° in zwei disjunkte offene Mengen U_+ in der rechten und U_- in der linken Halbebene. Da der Nullpunkt in $\overline{U_+}$ liegt, müsste eine stetige Fortsetzung von ξ im Nullpunkt gleich der Standardorientierung des \mathbf{R}^2 sein, wegen $0 \in \overline{U_-}$ mit demselben Argument aber auch gleich ihrem Negativen, Widerspruch.

14.8. Der Integralsatz von Gauß. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ stückweise glatt berandet, sei ξ eine stetige Orientierung auf X° und sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$ -Form auf einer offenen Umgebung von X . Dann gilt mit den in 14.6 eingeführten Bezeichnungen

$$\int_x d\omega = \int_{\partial x} \omega. \quad (1)$$

Im Spezialfall der Standardorientierung lautet die Formel mit den in 13.8 und 14.6.6 eingeführten Konventionen einfacher

$$\int_X d\omega = \int_{\partial X} \omega. \quad (2)$$

Der Beweis dieses Satzes in voller Allgemeinheit erfordert eine Reihe neuer Techniken und wird daher erst im nächsten Paragraphen behandelt. Hier bringen wir nur den Beweis im Spezialfall eines Quaders, der sich leicht auf den Satz von Fubini und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zurückführen lässt.

Beweis des Gaußschen Satzes für einen Quader. Sei

$$\omega = \sum_{i=1}^n f^i \Delta_i, \quad \text{und} \quad d\omega = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

wie in 10.7.2 und in 10.8.2. Weil Q° zusammenhängend ist, gilt $\xi = \pm\sigma$, sodass wir, eventuell nach einem trivialen Vorzeichenwechsel, $\xi = \sigma$ annehmen können. Dann

ergibt der Satz von Fubini und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} \int_Q d\omega &= \sum_{i=1}^n \int_Q \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{P_i} \left(\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial f^i}{\partial x^i} dx^i \right) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{P_i} f^i(x^1, \dots, x^{i-1}, b^i, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{P_i} f^i(x^1, \dots, x^{i-1}, a^i, x^{i+1}, \dots, x^n) dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n. \end{aligned}$$

Andrerseits ist $F_{i,\pm}^*(\Delta_k) = 0$ für $i \neq k$; denn in Δ_k kommt ein Faktor dx^i vor, während $x^i \circ F_{i,\pm} = \text{const}$ und daher $F_{i,\pm}^*(dx^i) = d(x^i \circ F_{i,\pm}) = 0$. Für $i = k$ ist

$$F_{i,\pm}^*(\Delta_i) = F_{i,\pm}^*((-1)^{i-1} dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n) = (-1)^{i-1} du^2 \wedge \cdots \wedge du^n,$$

und daher nach 14.7.1

$$F_{i,\pm}^*(\partial\xi) \cdot F_{i,\pm}^*(\omega) = \pm f^i(u^2, \dots, u^i, a_{\pm}^i, u^{i+1}, \dots, u^n) |du^2 \wedge \cdots \wedge du^n|,$$

mit $a_-^i := a^i$ und $a_+^i := b^i$. Für das Randintegral bekommen wir also

$$\begin{aligned} \int_{\partial Q} \omega &= \sum_{i=1}^n \int_{P_i} f^i(u^2, \dots, u^i, b^i, u^{i+1}, \dots, u^n) du^1 \cdots du^{n-1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \int_{P_i} f^i(u^2, \dots, u^i, a^i, u^{i+1}, \dots, u^n) du^2 \cdots du^n. \end{aligned}$$

Da es auf die Bezeichnung der Integrationsvariablen nicht ankommt, folgt die Behauptung.

14.9. Anwendung: Berechnung von Inhalten durch Randintegrale. Für ein stückweise glatt berandetes $X \subset \mathbf{R}^n$ ist

$$\mu(X) = \int_X |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| = \int_{(X, \sigma^n)} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Falls man also irgendeine $(n-1)$ -Form ω mit $d\omega = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ hat, so gilt nach Gauß

$$\mu(X) = \int_{\partial X} \omega.$$

Zum Beispiel ist

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = d(x^1 dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

oder in einer symmetrischeren Form

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \frac{1}{n} d\left(\sum_{i=1}^n x^i \Delta_i\right),$$

nach 10.8.2.

14.10.* Der Satz von Gauß in Divergenzform. In Anwendungen in der Physik wird oft die sogenannte Divergenzform des Gaußschen Integralsatzes verwendet. Dabei betrachtet man ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n f^i e_i$ und definiert die *Divergenz* von \mathbf{f} (in koordinatenabhängiger Weise!) durch

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x^i}$$

Dann lässt sich die Gaußsche Formel für die Standardorientierung folgendermassen umschreiben:

$$\int_X \operatorname{div}(\mathbf{f}) d\sigma_n = \int_{\operatorname{Rd} X} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n}_X \rangle d\sigma_{n-1}. \quad (1)$$

Beweis. Wir erinnern an das *äußere Produkt* $[\mathbf{v}] = [v_1, \dots, v_{n-1}]$ von $n-1$ Vektoren $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{n-1})$ im \mathbf{R}^n (siehe Lehrbücher der linearen Algebra). Dieses ist eindeutig bestimmt durch die Bedingung

$$\langle x, [\mathbf{v}] \rangle = \det(x, \mathbf{v}) \quad (2)$$

für alle $x \in \mathbf{R}^n$, und hat die Eigenschaften

$$[\mathbf{v}] \perp v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1, \quad (3)$$

$$\|[\mathbf{v}]\|^2 = \operatorname{Gr}(\mathbf{v}), \quad (4)$$

$$[\mathbf{v}]^i = (-1)^{i-1} \det \begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_{n-1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^{i-1} & \dots & v_{n-1}^{i-1} \\ v_1^{i+1} & \dots & v_{n-1}^{i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_{n-1}^n \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Sei $F: P \rightarrow \operatorname{Rd} X$ eine Parametrisierung des Randes von X mit Regularitätsbereich U . Dann gilt für $u \in U$ die folgende Formel für die äußere Normale:

$$\mathbf{n}_X(F(u)) \cdot \operatorname{Gr}(F')^{1/2} = \operatorname{sgn} \det(\mathbf{n}_X(F(u)), F'(u)) \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u^{n-1}} \right]. \quad (6)$$

In der Tat liegt die rechte Seite wegen (3) im eindimensionalen Normalenraum von $\operatorname{Rd} X$ im Punkte $F(u)$ und unterscheidet sich daher von der linken Seite nur um einen Faktor, und dieser ist ± 1 , wie man durch Übergang zur Euklidischen Länge in (6) wegen (4) sieht. Durch Bilden des Skalarprodukts beider Seiten mit der äußeren Normale ergibt sich dann wegen (2), dass dieser Faktor $+1$ ist.

Betrachte nun die $(n-1)$ -Form $\omega = \sum_{i=1}^n f^i \Delta_i$, mit der äußeren Ableitung $d\omega = \operatorname{div}(\mathbf{f}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ (10.8.2). Dann bleibt zum Beweis von (1) wegen 14.8.2 nur noch

$$\int_{\partial X} \omega = \int_{\partial X} \langle \mathbf{f}, \mathbf{n}_X \rangle d\sigma_{n-1} \quad (7)$$

zu zeigen. Die rechte Seite ist wegen 11.5.2 und (6) gleich

$$\begin{aligned} \int_P F^*(\langle \mathbf{f}, \mathbf{n}_X \rangle) F^*(d\sigma_{n-1}) &= \int_P \langle \mathbf{f} \circ F, \mathbf{n}_X \circ F \rangle \operatorname{Gr}(F')^{1/2} |du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}| \\ &= \int_P \langle \mathbf{f} \circ F, [F'] \rangle \operatorname{sgn} \det(\mathbf{n}_X \circ F, F') |du^1 \wedge \dots \wedge du^{n-1}|. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der linken Seite von (7) zeigen wir erst

$$F^*(\Delta_i) = [F']^i du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1}.$$

In der Tat ist $F^*(\Delta_i)$ ein Vielfaches von $du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1}$, und dieses Vielfache ist

$$\begin{aligned} (F^*(\Delta_i))(u; \mathbf{e}) &= \Delta_i(F(u); F'(u)) \\ &= (-1)^{i-1} \left(dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n \right) (F(u); F'(u)) = [F']^i, \end{aligned}$$

wegen 10.5.5 und (5). Daher ist die linke Seite von (7) wegen 14.6.4 gleich

$$\begin{aligned} \int_P F^*(\partial\sigma^n) F^*(\omega) &= \int_P \sum_{i=1}^n (f^i \circ F) F^*(\partial\sigma^n) F^*(\Delta_i) \\ &= \int_P \left(\sum_{i=1}^n (f^i \circ F) [F']^i \right) s_F |du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1}| \\ &= \int_P \langle f \circ F, [F'] \rangle \operatorname{sgn} \det(\mathbf{n}_X \circ F, F') |du^1 \wedge \cdots \wedge du^{n-1}|, \end{aligned}$$

wie behauptet.

§15.* Beweis des Gaußschen Integralsatzes

Übersicht. Beim Beweis des Gaußschen Integralsatzes werden eine Reihe neuer Begriffe und Techniken benötigt. Wir beginnen mit Charakterisierung der Kompaktheit durch die endliche Überdeckungseigenschaft. Wichtig ist der Begriff des Trägers einer Funktion oder Differentialform (15.2.1). Mit Hilfe einer Partition der Eins (15.6) lassen sich globale Aussagen lokalisieren. Damit wird der Gaußsche Integralsatz im Spezialfall bewiesen, wo der Träger der Differentialform ω die sogenannte Ausnahmemenge A (im Wesentlichen die Menge der singulären Punkte des Randes von X) nicht trifft (15.8). Der Beweis im allgemeinen Fall beruht wesentlich darauf, dass A eine $(n-1)$ -dimensionalen Nullmenge (15.10) ist. Dies ermöglicht es, ω durch Differentialformen ω_k , für die der Satz schon gilt, so zu approximieren, dass sich dann der allgemeine Fall durch den Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ aus dem Spezialfall ergibt (15.14).

15.1. Überdeckungssatz von Heine-Borel. *Jede offene Überdeckung einer kompakten Menge $K \subset \mathbf{R}^n$ enthält eine endliche Teilüberdeckung.*

Beweis. Sei \mathcal{U} eine Familie offener Mengen mit $K \subset \bigcup \mathcal{U}$. Weil K beschränkt ist, gibt es einen kompakten Quader Q mit $K \subset Q$. Für jedes $x \in K$ wähle ein $U_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in U_x$ und ein $\varrho(x) > 0$ mit $B_{\varrho(x)}(x) \subset U_x$. Für $x \in Q \setminus K$ sei $\varrho(x) = d(x, K)$ der Abstand von x zu K , der wegen der Abgeschlossenheit von K positiv ist. Nach Lemma 2.2 gibt es eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (\xi_i, Q_i)_{i \in E}$ von Q . Nach Definition von ϱ ist klar, dass für eine Stützstelle $\xi_i \in Q \setminus K$ auch $Q_i \subset Q \setminus K$ ist. Andererseits gilt $Q_i \subset B_{\varrho(\xi_i)}(\xi_i) \subset U_{\xi_i}$ für $\xi_i \in K$. Setzen wir $F := \{i \in E : \xi_i \in K\}$, so folgt

$$K \subset \bigcup_{i \in F} Q_i \subset \bigcup_{i \in F} U_{\xi_i},$$

und damit die Behauptung.

15.2. Definition (Träger). Sei f eine Funktion auf einer Teilmenge des \mathbf{R}^n mit Werten in \mathbf{R} . Der Träger von f ist der Abschluss der Menge der Nichtnullstellen von f :

$$\text{Tr}(f) := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}. \quad (1)$$

Man überlegt sich leicht die Regeln

$$\text{Tr}(f + g) \subset \text{Tr}(f) \cup \text{Tr}(g), \quad (2)$$

$$\text{Tr}(fg) \subset \text{Tr}(f) \cap \text{Tr}(g). \quad (3)$$

Für vektorwertige Funktionen $f = (f^1, \dots, f^k)$ definieren wir den Träger wie in (1). Dann ist der Träger von f die Vereinigung der Träger der Komponenten f^i , und die Regeln (2) und (3) bleiben erhalten, letztere bei Multiplikation mit einer skalaren Funktion g . Schließlich definieren wir den Träger $\text{Tr}(\omega)$ einer Differentialform ω ganz analog als den Abschluss der Menge aller x mit $\omega_x \neq 0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als den Träger der vektorwertigen Funktion mit den Komponenten f_i , wenn ω wie in 10.6.1 dargestellt ist. Für den Träger der äußeren Ableitung und der Zurückholung einer Differentialform gelten die Regeln

$$\text{Tr}(F^*(\omega)) \subset F^{-1}(\text{Tr}(\omega)), \quad (4)$$

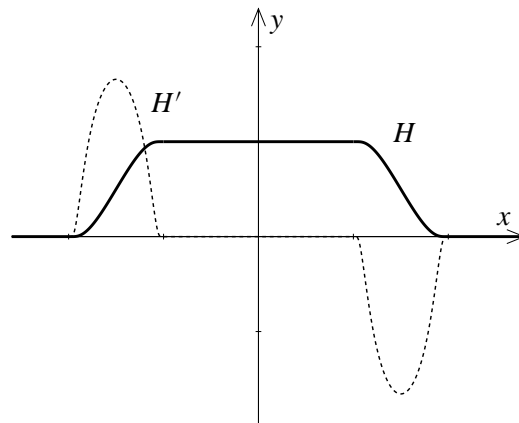
$$\text{Tr}(d\omega) \subset \text{Tr}(\omega). \quad (5)$$

Der Beweis sei dem Leser überlassen. Ferner ist die folgende einfache Bemerkung nützlich: Sei U offen und \tilde{f} die Nullfortsetzung einer Funktion f auf den \mathbf{R}^n . Dann gilt

$$f \in \mathcal{C}^k(U) \text{ und } \text{Tr}(f) \subset U \implies \tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n). \quad (6)$$

In der Tat ist der \mathbf{R}^n die Vereinigung der offenen Mengen U und $\mathbb{C} \setminus \text{Tr}(f)$, und \tilde{f} ist auf jeder dieser Mengen von der Klasse \mathcal{C}^k . Für Differentialformen statt Funktionen gilt (6) genauso.

15.3. Lemma. (a) Es gibt eine \mathcal{C}^∞ -Funktion H auf \mathbf{R} mit $0 \leq H \leq 1$, $\text{Tr}(H) = [-2, 2]$, $H(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $|H'(x)| \leq 2$ für alle $x \in \mathbf{R}$:



(b) Für $a \in \mathbf{R}^n$ und $r > 0$ sei

$$H_{a,r}(x) = \prod_{i=1}^n H\left(\frac{x^i - a^i}{r}\right).$$

Dann gilt $0 \leq H_{a,r} \leq 1$, $\text{Tr}(H_{a,r}) \subset \overline{B_{2r}(a)}$, $H_{a,r}(x) = 1$ für alle $x \in \overline{B_r(a)}$, und

$$\left| \frac{\partial H_{a,r}}{\partial x^j}(x) \right| \leq \begin{cases} \frac{2}{r} & \text{für } r < |x - a| < 2r. \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1)$$

Beweis. (a) Die Funktion

$$\varphi(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0, \\ \exp(-\frac{1}{t}) & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

ist von der Klasse \mathcal{C}^∞ (Aufgabe!). Daher ist dies auch für $f(x) := e \cdot \varphi(1 - x^2)$ der Fall, und man stellt leicht fest, dass $0 \leq f \leq 1$, $f(0) = 1$ und $\text{Tr}(f) = [-1, 1]$. Folglich ist auch die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} f(2x + 3) & \text{falls } -2 \leq x \leq -1, \\ -f(2x - 3) & \text{falls } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

von der Klasse \mathcal{C}^∞ . Setzt man noch $C := \int_{-1}^1 f(x) dx$, dann hat

$$H(x) := \frac{2}{C} \int_{-\infty}^x F(t) dt$$

die gewünschten Eigenschaften (Details als Aufgabe).

(b) Bis auf (1) folgen die Eigenschaften von $H_{a,r}$ sofort aus den entsprechenden von H . Die Ableitung von $H_{a,r}$ ist nach der Produkt- und der Kettenregel

$$\frac{\partial H_{a,r}}{\partial x^j} = \left(\prod_{i \neq j} H\left(\frac{x^i - a^i}{r}\right) \right) H'\left(\frac{x^j - a^j}{r}\right) \frac{1}{r}.$$

Hieraus folgt (1) wegen der Eigenschaften von H .

Wir nennen $H_{a,r}$ auch die *Hutfunktion* zu den konzentrischen Würfeln $B_r(a) \subset B_{2r}(a)$.

15.4. Lemma. Sei $K \subset V \subset \mathbf{R}^n$, K kompakt, V offen. Dann gibt es eine \mathcal{C}^∞ -Funktion h auf \mathbf{R}^n mit den Eigenschaften

- (i) h hat kompakten Träger $\text{Tr}(h) \subset V$,
- (ii) $0 \leq h \leq 1$,
- (iii) $h(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wähle zu jedem $x \in K$ ein $r_x > 0$ so, dass $\overline{B_{2r_x}(x)} \subset V$. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$, sodass K in der Vereinigung der $B_{r_a}(a)$, $a \in E$, enthalten ist. Setze $s := \sum_{a \in E} H_{a,r_a}$ mit H_{a,r_a} wie in 15.3. Nach 15.2.2 ist $\text{Tr}(s)$ in der Vereinigung der $\overline{B_{2r_a}(a)}$ ($a \in E$) enthalten, also kompakt und in V enthalten. Weiter liegt jedes $x \in K$ in einem der $B_{r_a}(a)$ ($a \in E$) und daher gilt $s(x) \geq 1$. Nun setze $h(x) := 1 - H(2s(x))$, mit H wie in 15.3. Wegen der Eigenschaften von H gilt dann $0 \leq h \leq 1$. Für $x \in K$ ist $2s(x) \geq 2$, also $H(2s(x)) = 0$ und somit $h(x) = 1$. Schließlich gilt $\text{Tr}(h) \subset \text{Tr}(s)$; denn wenn $h(x) \neq 0$, dann ist $H(2s(x)) < 1$, also $2s(x) > 1$ und daher $x \in \text{Tr}(s)$.

15.5. Lemma. Sei K kompakt und enthalten in der Vereinigung endlich vieler offener Mengen V_1, \dots, V_m . Dann gibt es kompakte Mengen $K_i \subset V_i$, sodass $K \subset K_1 \cup \dots \cup K_m$.

Beweis. Wähle zu jedem $x \in K$ ein $r_x > 0$ so klein, dass $\overline{B_{r_x}(x)} \subset V_{j(x)}$ für einen geeigneten Index $j(x) \in \{1, \dots, m\}$. Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz gibt es eine endliche Teilmenge $E \subset K$ mit $K \subset \bigcup_{a \in E} B_{r_a}(a)$. Nun setze

$$K_i := \bigcup_{a \in E, j(a)=i} \overline{B_{r_a}(a)}.$$

15.6. Satz von der Partition der Eins. Sei $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt und enthalten in der Vereinigung $V_1 \cup \dots \cup V_m$ endlich vieler offener Mengen V_i . Dann gibt es C^∞ -Funktionen f_i auf \mathbf{R}^n mit den Eigenschaften

- (i) f_i hat kompakten Träger $\text{Tr}(f_i) \subset V_i$,
- (ii) $0 \leq f_i \leq 1$,
- (iii) $\sum_{i=1}^m f_i(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Beweis. Wähle kompakte $K_i \subset V_i$ wie in 15.5, und Funktionen h_i für $K_i \subset V_i$ wie in 15.4. Setze $s := \sum_{i=1}^m h_i$ und $V := \{x : s(x) > 0\}$. Dann ist $K \subset V$. Wähle h zu $K \subset V$ wie in 15.4, und sei f_i die Nullfortsetzung von $h_i h/s$. Dann ist $\text{Tr}(h_i h/s) \subset \text{Tr}(h_i) \cap \text{Tr}(h) \subset V_i \cap V$ nach 15.2.3, also ist f_i von der Klasse C^∞ nach 15.2.6 und es gilt (i). Eigenschaft (ii) ist klar nach Definition. Für $x \in K$ ist $h(x) = 1$ und somit $\sum_{i=1}^m f_i(x) = \sum_{i=1}^m h_i(x)/s(x) = 1$. Damit ist auch (iii) gezeigt.

15.7. Lemma. Sei X stückweise glatt berandet, und sei $F : P \rightarrow Y = \text{Rd } X$ eine Parametrisierung des Randes von X mit Regularitätsbereich U . Sei $a = F(b)$ ($b \in U$) ein glatter Randpunkt von X und v ein äußerer Vektor von X in a . Definiere $\Phi : \mathbf{R} \times P \rightarrow \mathbf{R}^n$ durch

$$\Phi(t, u) = tv + F(u).$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass Φ ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(0, b) =]-\varepsilon, \varepsilon[\times B_\varepsilon(b)$ auf eine offene beschränkte Umgebung $W = \Phi(B_\varepsilon(0, b))$ von a ist, und die Durchschnitte von X und Y mit W durch

$$X \cap W = \Phi(] - \varepsilon, 0] \times B_\varepsilon(b)), \quad Y \cap W = \Phi(\{0\} \times B_\varepsilon(b)) \quad (1)$$

beschrieben werden.

Beweis. Wähle zunächst eine offene Umgebung V von a und eine Submersion $g : V \rightarrow \mathbf{R}$ wie in Satz 14.3. Es gilt $\Phi(0, b) = F(b) = a \in V$. Daher gibt es aus Stetigkeitsgründen ein $\varepsilon > 0$, sodass $B_\varepsilon(b) \subset U$ und $W := \Phi(B_\varepsilon(b, 0)) \subset V$. Offenbar ist $W \subset \Phi(]-\varepsilon, \varepsilon[\times P)$ und somit wegen der Stetigkeit von Φ und der Kompaktheit von P beschränkt.

Wir bezeichnen die Koordinaten auf $\mathbf{R} \times P \subset \mathbf{R}^n$ mit u^1, u^2, \dots, u^n . Dann sind die Spalten der Matrix $\Phi'(0, b)$ durch $(\partial\Phi/\partial u^1)(0, b) = v$ und $(\partial\Phi/\partial u^i)(0, b) = (\partial F/\partial u^i)(b)$, $i = 2, \dots, n$, gegeben. Da die $(\partial F/\partial u^i)(b)$ eine Basis von $T_a(Y)$ bilden und $v \notin T_a(Y)$, ist $\Phi'(b, 0)$ invertierbar. Also können wir nach dem Umkehrsatz durch Verkleinern von ε erreichen, dass Φ ein Diffeomorphismus von $B_\varepsilon(b, 0)$ auf sein Bild W ist.

Nun betrachte die Funktion $h := g \circ \Phi$ auf $]-\varepsilon, \varepsilon[\times B_\varepsilon(b)$. Es gilt $(\partial h/\partial u^1)(0) = g'(a)v > 0$, denn v ist ein äußerer Vektor (Satz 14.3(b)). Daher können wir durch

neuerliches Verkleinern von ε erreichen, dass $\partial h / \partial u^1$ auf ganz $] - \varepsilon, \varepsilon[\times B_\varepsilon(b)$ positiv ist. Dann ist die Funktion $t \mapsto h(t, u)$ für jedes $u \in B_\varepsilon(b)$ im Intervall $] - \varepsilon, \varepsilon[$ streng monoton wachsend, und sie verschwindet für $t = 0$, denn $h(0, u) = g(F(u)) = 0$, weil $F(u) \in Y = g^{-1}(0)$. Also ist das Vorzeichen von $h(t, u)$ gleich dem Vorzeichen von t . Wegen 14.3.1 bedeutet dies:

$$\begin{aligned}\Phi(] - \varepsilon, 0[\times B_\varepsilon(b)) &\subset X^\circ \cap W, \\ \Phi(\{0\} \times B_\varepsilon(b)) &\subset Y \cap W, \\ \Phi(]0, \varepsilon[\times B_\varepsilon(b)) &\subset \complement X \cap W.\end{aligned}$$

In diesen Inklusionen muss aber sogar die Gleichheit stehen, denn die Vereinigung der links stehenden Mengen ist ganz W und die rechts stehenden Mengen sind disjunkt. Nun folgt (1) aus $X = X^\circ \cup Y$.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zum Beweis des Gaußschen Integralsatzes. Wir verwenden die in 14.6 und 14.8 eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen. Ferner fixieren wir eine Parametrisierung $F : P \rightarrow Y = \text{Rd } X$ des Randes von X mit Regularitätsbereich U . Nach 12.2(i) ist $P \setminus U$ eine Nullmenge im \mathbf{R}^{n-1} . Die Menge

$$A := F(P \setminus U)$$

heißt auch die *Ausnahmemenge*. Offenbar gilt $Y_{\text{sing}} \subset A$.

15.8. Lemma. *Der Gaußsche Integralsatz gilt unter der zusätzlichen Voraussetzung $\text{Tr}(\omega) \cap A = \emptyset$.*

Beweis. Wir behandeln erst drei Spezialfälle.

(a) $\text{Tr}(\omega) \subset Q^\circ$, wobei Q ein kompakter, in X enthaltener Quader sei.

In diesem Fall ist das Randintegral trivialerweise Null. Andererseits folgt nach der schon bewiesenen Gaußformel für Q (14.8), dass $\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{(Q, \xi)} d\omega = \int_{(\text{Rd } Q, \partial\xi)} \omega = 0$, denn ω verschwindet auf dem Rand von Q .

(b) $\text{Tr}(\omega) \subset W$, mit $W = \Phi(B_\varepsilon(0, b))$ wie in Lemma 15.7.

Wegen der Beschränktheit von W ist der Träger von ω kompakt, und somit auch $\text{Tr}(\Phi^*(\omega)) = \Phi^{-1}(\text{Tr}(\omega))$. Folglich gibt es ein positives $\delta < \varepsilon$, sodass $\text{Tr}(\Phi^*(\omega)) \subset B_\delta(0, b)$. Wir setzen $R := \overline{B_\delta(b)} \subset \mathbf{R}^{n-1}$ und $Q := [-\delta, 0] \times R \subset B_\varepsilon(0, b)$. Wegen 15.7.1 gilt $\text{Tr}(\omega) \cap X \subset \Phi(Q)$, und daher ist nach der Transformationsformel für Dichten 11.7.1, der Vertauschbarkeit der äußeren Ableitung mit dem Zurückholen, und der Gaußformel für Quader:

$$\begin{aligned}\int_{\mathfrak{X}} d\omega &= \int_{(\Phi(Q), \xi)} d\omega = \int_{\Phi(Q)} \xi d\omega = \int_Q \Phi^*(\xi) \Phi^*(d\omega) \\ &= \int_{(Q, \Phi^*(\xi))} d(\Phi^*(\omega)) = \int_{(\text{Rd } Q, \partial\Phi^*(\xi))} \Phi^*(\omega).\end{aligned}$$

Wegen $\text{Tr}(\Phi^*(\omega)) \subset] - \delta, \delta[\times R^\circ$ verschwindet $\Phi^*(\omega)$ auf allen Seiten von Q mit Ausnahme der Seite $Q_1^+ = \{0\} \times R$, in der Bezeichnung von 12.7.

Zur Berechnung des verbleibenden Anteils im Randintegral von $\Phi^*(\omega)$ parametrisieren wir Q_1^+ durch $F_{1,+} : R \rightarrow Q_1^+$, $u \mapsto (0, u)$, wie in 12.7(a). Dann gilt $F = \Phi \circ F_{1,+}$ und folglich $F_{1,+}^*(\Phi^*(\omega)) = F^*(\omega)$. Als Nächstes berechnen wir die

Randorientierung $F_{1,+}^*(\partial(\Phi^*(\xi)))$. Die äußere Normale von Q auf der Seite Q_1^+ ist gerade der Einheitsvektor e_1 , sodass

$$\partial(\Phi^*(\xi)) = \Phi^*(\xi) \lrcorner e_1$$

auf Q_1^+ , nach 14.6.1. Aus der Definition von Φ in 15.7 ist klar, dass

$$\Phi'(0, u) \cdot e_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, u) = v$$

für alle $u \in B_\varepsilon(b)$. Also bildet Φ das äußere Vektorfeld e_1 auf $\{0\} \times B_\varepsilon(b)$ gerade in das (konstante) äußere Vektorfeld v auf $Y \cap W$ ab. Es folgt

$$\Phi^*(\partial\xi) = \Phi^*(\xi \lrcorner v) = \Phi^*(\xi) \lrcorner e_1 = \partial\Phi^*(\xi).$$

Daher gilt

$$F_{1,+}^*(\partial\Phi^*(\xi)) = F_{1,+}^*(\Phi^*(\partial\xi)) = (\Phi \circ F_{1,+})^*(\partial\xi) = F^*(\partial\xi).$$

Schließlich ist $\text{Tr}(F^*(\omega)) \subset F^{-1}(\text{Tr}(\omega)) \subset R$. Somit erhalten wir für das Randintegral von $\Phi^*(\omega)$:

$$\begin{aligned} \int_{(\text{Rd } Q, \partial\Phi^*(\xi))} \Phi^*(\omega) &= \int_R F_{1,+}^*(\partial\Phi^*(\xi)) F_{1,+}^*(\Phi^*(\omega)) \\ &= \int_R F^*(\partial\xi) F^*(\omega) = \int_P F^*(\partial\xi) F^*(\omega) = \int_{\partial X} \omega, \end{aligned}$$

und damit ist (b) bewiesen.

(c) ω verschwindet auf X .

Dann ist das Randintegral klarerweise Null. Weiter verschwindet $d\omega$ jedenfalls auf X° , und weil der Abschluss von X° ganz X ist, auch auf X . Also ist auch $\int_X d\omega = 0$.

Der *allgemeine Fall* wird mit Hilfe einer Partition der Eins erledigt. Zu jedem $a \in X \cap \text{Tr } \omega$ wähle eine offene Umgebung $V(a)$ wie folgt: Falls $a \in X^\circ$, sei $V(a) = Q^\circ$, für einen geeigneten kompakten Quader $Q \subset X$ mit $a \in Q^\circ$. Ist $a = F(b) \in F(U)$, dann sei $V(a) = \Phi(B_\varepsilon(0, b))$ wie in Lemma 15.7. Die $V(a)$ bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge $X \cap \text{Tr } \omega$. Nach Satz 15.1 wird diese bereits von endlich vielen $V(a_i)$, $i = 1, \dots, m$, überdeckt. Sei f_1, \dots, f_m eine zugehörige Partition der Eins, und sei $\omega_i = f_i \omega$. Dann verschwindet $\omega_0 := \omega - \sum_1^m \omega_i$ auf X , und für $i \geq 1$ sind die ω_i vom Typ (a) oder (b). Also gilt die Gaußformel für jedes ω_i und daher durch Summation auch für ω .

Als Nächstes nehmen wir den Fall in Angriff, wo der Träger von ω die Ausnahmemenge A trifft. Hier ist es wesentlich, dass A nicht nur eine Nullmenge ist, sondern sogar eine besonders „dünne“ Nullmenge, weil sie ja das Bild unter F der Nullmenge $P \setminus U \subset \mathbf{R}^{n-1}$ ist. Die Präzisierung (und Verallgemeinerung) dieser Vorstellung ist der Begriff der p -dimensionalen Nullmenge im \mathbf{R}^n , dem wir uns nun zuwenden. Erst ein Lemma über kompakte Nullmengen.

15.9. Lemma. Sei $N \subset \mathbf{R}^p$ eine kompakte Nullmenge. Dann gibt es zu jedem positiven ε endlich viele offene Würfel W_1, \dots, W_m mit $N \subset W_1 \cup \dots \cup W_m$ und $\sum_{i=1}^m \mu(W_i) \leq \varepsilon$.

Beweis. Wähle wie in 6.9 abzählbar viele kompakte Würfel W'_k mit $N \subset \bigcup_1^\infty W'_k$ und $\sum_1^\infty \mu(W'_k) \leq \varepsilon/2$. Sei etwa W'_k der Abschluss des offenen Würfels mit Mittelpunkt a_k und Radius r_k und sei $\lambda := 2^{1/p}$. Dann bilden die $W_k := B_{\lambda r_k}(a_k)$ ($k \in \mathbf{N}$) eine offene Überdeckung von N . Nach Heine-Borel ist N schon in endlich vielen davon enthalten, etwa $N \subset W_1 \cup \dots \cup W_m$, und $\sum_1^m \mu(W_k) = \lambda^p \sum_1^m \mu(W'_k) \leq 2 \sum_1^\infty \mu(W'_k) \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$.

15.10. Definition (p -dimensionale Nullmenge). Sei $p \leq n$. Eine kompakte Teilmenge $A \subset \mathbf{R}^n$ heißt eine p -dimensionale Nullmenge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele offene Würfel W_i mit Radien r_i gibt, die A überdecken, und sodass $\sum_{i=1}^m r_i^p \leq \varepsilon$. Man beachte den hier auftretenden Exponenten p . Es ist leicht zu sehen, dass eine p -dimensionale Nullmenge auch eine q -dimensionale Nullmenge ist, sofern $p \leq q$, aber nicht umgekehrt. Je kleiner p ist, desto stärker ist die Eigenschaft, p -dimensionale Nullmenge zu sein. Nicht kompakte p -dimensionale Nullmengen werden wir nicht brauchen; der interessierte Leser sei auf Bücher über geometrische Maßtheorie unter dem Stichwort „Hausdorffmaß“ verwiesen.

15.11. Lemma. Sei $p \leq n$, sei $N \subset \mathbf{R}^p$ eine kompakte Nullmenge und $F : N \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine lokal dehnungsbeschränkte Abbildung. Dann ist $F(N) \subset \mathbf{R}^n$ eine p -dimensionale Nullmenge.

Beweis. Wegen Satz 0.12 genügt F auf N einer Lipschitzbedingung, etwa mit der Konstanten L . Überdecke N wie in Lemma 15.9 mit endlich vielen Würfeln W'_i , etwa mit Radius s_i und Mittelpunkt b_i , sodass $\sum_1^m \mu(W'_i) \leq \varepsilon/L^p$. Dann ist $F(N \cap W'_i)$ enthalten in einem Würfel W_i vom Radius $r_i := 2Ls_i$ und geeignetem Mittelpunkt a_i : Wenn $N \cap W'_i = \emptyset$, ist nichts zu beweisen; andernfalls fixiere ein $b \in N \cap W'_i$. Dann gilt für alle $x \in N \cap W'_i$, dass $|x - b| < \text{diam } W'_i = 2s_i$ und daher $|F(x) - F(b)| < 2Ls_i$, und die Behauptung stimmt für $a_i := F(b)$. Hieraus folgt nun $F(N) \subset \bigcup_1^m W_i$, und $\sum_1^m r_i^p = (2L)^p \sum_1^m s_i^p = L^p \sum_1^m \mu(W'_i) \leq \varepsilon$.

15.12. Lemma. Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ eine kompakte p -dimensionale Nullmenge und sei $\delta_k > 0$ eine Nullfolge. Zu jedem $k \in \mathbf{N}$ wähle offene Würfel W_{ik} , $i = 1, \dots, m_k$, mit Radien r_{ik} , sodass

$$A \cap W_{ik} \neq \emptyset \quad \text{für alle } i, k, \quad (1)$$

$$A \subset V_k := \bigcup_{i=1}^{m_k} W_{ik}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m_k} (r_{ik})^p \leq \delta_k. \quad (3)$$

Dann gibt es zu jedem $x \notin A$ einen Index k_0 , sodass $x \notin V_k$ für alle $k \geq k_0$. Insbesondere ist

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = A. \quad (4)$$

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass die Bedingung (1) keine Schwierigkeiten macht, denn wenn (2) und (3) für W_{ik} gelten, so kann man immer die W_{ik} , die A nicht treffen, weglassen.

Für ein $x \notin A$ ist $\delta := d(x, A) > 0$, weil A abgeschlossen ist. Gäbe es kein k_0 mit der behaupteten Eigenschaft, dann gäbe es eine Folge von Indizes $k_1 < k_2 < \dots$ und zugehörige Würfel W_{i_ν, k_ν} mit $x \in W_{i_\nu, k_\nu}$. Nach Voraussetzung (1) ist $A \cap W_{i_\nu, k_\nu} \neq \emptyset$. Also ist der Durchmesser $\text{diam}(W_{i_\nu, k_\nu}) = 2r_{i_\nu, k_\nu} \geq \delta$, und daher wegen (3)

$$0 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p \leq \sum_{i=1}^{m_{k_\nu}} (r_{i, k_\nu})^p \leq \delta_{k_\nu}$$

für alle $\nu \in \mathbf{N}$, im Widerspruch zu $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \delta_{k_\nu} = 0$. Nun ist (4) klar.

15.13. Topffunktionen. Komplementär zu der in 15.3 betrachteten Hutfunktion $H_{a,r}$ definieren wir die *Topffunktion* $T_{a,r} := 1 - H_{a,r}$ zu einem Paar konzentrischer Würfel $B_r(a) \subset B_{2r}(a)$. Allgemeiner seien W_1, \dots, W_m kompakte Würfel mit Mittelpunkten a_i und Radien r_i , und seien W_i^* die konzentrischen Würfel mit den doppelten Radien. Wir setzen

$$g := \prod_{i=1}^m T_{a_i, r_i}, \quad V := \bigcup_{i=1}^m W_i, \quad V^* := \bigcup_{i=1}^m W_i^*. \quad (1)$$

Dann ist die Funktion g stetig differenzierbar auf \mathbf{R}^n , und hat die folgenden Eigenschaften:

$$0 \leq g \leq 1, \quad (2)$$

$$\text{Tr}(g) \subset \mathbb{C}V, \quad (3)$$

$$g(x) = 1 \quad \text{für } x \notin V^*, \quad (4)$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x^j}(x) \right| \leq \sum_{i=1}^m \frac{2}{r_i} \chi_{W_i^*}. \quad (5)$$

Hier folgen die Eigenschaften (2)–(4) leicht aus der Definition und den entsprechenden Eigenschaften der Hutfunktionen, und (5) aus 15.3.1 und $dT_{a,r} = -dH_{a,r}$ sowie

$$\frac{\partial g}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^m \left(\prod_{l \neq i} T_{a_l, r_l} \right) \frac{\partial T_{a_i, r_i}}{\partial x^j}.$$

15.14. Beweis des Gaußschen Integralsatzes. Nach Lemma 15.11 ist die Ausnahmemenge $A = F(P \setminus U)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Nullmenge. Zu $\delta_k = 1/k$ wähle offene

Würfel W_{ik} mit Radien r_{ik} wie in Lemma 15.12. Die konzentrischen Würfel W_{ik}^* mit den doppelten Radien erfüllen dann ebenfalls die Voraussetzungen von Lemma 15.12 mit $\delta_k^* = 2^{n-1}\delta_k$. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ sei g_k eine Topffunktion wie in 15.13.1 für die Würfel Familie W_{ik} , $i = 1, \dots, m_k$, und seien V_k und V_k^* analog zu 15.13.1 definiert. Dann gilt

$$\text{Tr}(g_k) \subset \mathbb{C}V_k \subset \mathbb{C}A \quad (1)$$

wegen 15.12.2 und 15.13.3. Weiter ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 1 - \chi_A. \quad (2)$$

In der Tat verschwinden alle g_k auf A nach (1). Für ein $x \notin A$ gibt es dagegen nach Lemma 15.12, angewandt auf die W_{ik}^* , einen Index k_0 , sodass $x \notin V_k^*$ für alle $k \geq k_0$. Also ist $g_k(x) = 1$ nach 15.13.4, und wir haben (2) gezeigt.

Wegen (1) und 15.2.3 ist $\text{Tr}(g_k \omega) \cap A = \emptyset$. Also gilt die Gaußformel für diese Differentialformen nach 15.8, und wir erhalten mit der Produktregel für die äußere Ableitung

$$\int_{\mathfrak{X}} d(g_k \omega) = \int_{\mathfrak{X}} dg_k \wedge \omega + \int_{\mathfrak{X}} g_k d\omega = \int_{\partial \mathfrak{X}} g_k \omega. \quad (3)$$

Wir behaupten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{X}} dg_k \wedge \omega = 0. \quad (4)$$

In der Tat sei etwa $\omega = \sum_1^n f^j \Delta_j$ wie in 10.7.2. Dann ist

$$dg_k \wedge \omega = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x^j} f^j \right) (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$

Weil ω auf der kompakten Menge X stetig ist, sind die f^j beschränkt, etwa $|f^j| \leq C$. Daher folgt nun wegen 15.13.5

$$|dg_k \wedge \omega| \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial g_k}{\partial x^j} \right| \cdot C \cdot |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| \leq \sum_{i=1}^{m_k} \frac{2nC}{r_{ik}} \chi_{W_{ik}^*} |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|,$$

und mit 13.8.4 weiter, weil $\mu(W_{ik}^*) = 4^n r_{ik}^n$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{X}} dg_k \wedge \omega \right| &\leq \int_X |dg_k \wedge \omega| \leq \sum_{i=1}^{m_k} \frac{2nC}{r_{ik}} \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{W_{ik}^*} |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| \\ &= \sum_{i=1}^{m_k} \frac{2nC}{r_{ik}} \mu(W_{ik}^*) = 2n4^n C \sum_{i=1}^{m_k} (r_{ik})^{n-1} \leq \frac{2n4^n C}{k}, \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung (4).

Als Nächstes betrachte das Verhalten der Integrale über $g_k d\omega$ für $k \rightarrow \infty$. Wegen (2) konvergieren die $g_k d\omega$ auf X° punktweise gegen $d\omega$, und sie sind wegen 15.13.2 durch $|d\omega|$ beschränkt. Ferner ist die stetige Dichte $|d\omega|$ über die kompakte Menge X integrierbar. Schließlich ist $X \setminus X^\circ = F(P)$ nach 6.13 eine Nullmenge. Also liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz (in einer auf der Hand liegenden Umformulierung für Differentialformen)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{X}} g_k d\omega = \int_{\mathfrak{X}} d\omega.$$

Es bleiben die Randintegrale der $g_k \omega$ zu betrachten. Hier gilt

$$\int_{\partial \mathfrak{X}} g_k \omega = \int_P F^*(\partial \xi) F^*(g_k \omega) = \int_P (g_k \circ F) F^*(\partial \xi) F^*(\omega), \quad (5)$$

und aus (2) folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} (g_k \circ F) = \chi_P - \chi_{P \setminus U} = \chi_U$. Daher konvergieren die Integranden von (5) auf U punktweise gegen $F^*(\partial \xi) F^*(\omega)$ und sind wieder durch die integrierbare Dichte $|F^*(\omega)|$ beschränkt. Weil $P \setminus U$ eine Nullmenge ist, ergibt der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\partial \mathfrak{X}} g_k \omega = \int_P F^*(\partial \xi) F^*(\omega) = \int_{\partial \mathfrak{X}} \omega,$$

und die Gaußformel 14.8.1 folgt aus (3) für $k \rightarrow \infty$.

§16. Der Satz von Stokes

Übersicht. Der Satz von Stokes für ein p -dimensionales orientiertes Stück \mathfrak{X} besagt die Existenz eines $(p-1)$ -dimensionalen orientierten Stückes \mathfrak{Y} , sodass für alle $(p-1)$ -Formen ω die Formel $\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\mathfrak{Y}} \omega$ gilt. Wir zeigen, dass \mathfrak{Y} eindeutig bestimmt ist (16.6); es heißt die Berandung von \mathfrak{X} und wird mit $\partial\mathfrak{X}$ bezeichnet. Für $p = n$ ist dies mit der in §14 eingeführten Terminologie konsistent (16.14). Ein Stück mit leerer Berandung heißt geschlossen. Ähnlich wie bei Differentialformen gilt die Regel $\partial(\partial\mathfrak{X}) = 0$ (16.12).

16.1. Problemstellung. Der Satz von Stokes ist die niederdimensionale Variante des Gaußschen Integralsatzes. Anstelle einer stückweise glatt berandeten Menge $X \subset \mathbf{R}^n$ mit einer stetigen Orientierung ξ auf X° wie in 14.8 tritt ein p -dimensionales stetig orientiertes Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$, anstelle des (topologischen) Randes $\text{Rd } X$ und seiner induzierten Orientierung $\partial\xi = \xi \lrcorner \mathbf{n}_X$ wie in 14.6 tritt ein geeignetes $(p-1)$ -dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$. Dann besagt der Satz von Stokes 16.10, ganz analog zu 14.8.1, für jede stetig differenzierbare $(p-1)$ -Form ω auf einer offenen Umgebung von X die Gültigkeit der Formel

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\mathfrak{Y}} \omega. \quad (1)$$

Soweit scheint das ganz einfach zu sein. Die Schwierigkeiten liegen jedoch in der richtigen Definition des „Randes“ Y von X und der Definition der Randorientierung η . Das (bisher noch hypothetische) $(p-1)$ -dimensionale Stück Y kann nämlich nicht einfach als der Rand von X im üblichen topologischen Sinne definiert werden, weil X für $p < n$ überhaupt nur aus Randpunkten besteht. Da uns (Y, η) nur insofern interessiert, als wir eine $(p-1)$ -Form darüber integrieren können, stellen wir die frühere Vorgangsweise auf den Kopf und führen den Begriff der Berandung ein, bei dem die gewünschte Formel (1) gleich in die Definition eingebaut wird.

In diesem Paragraphen wird unter einem orientierten Stück stets ein Stück mit *stetiger* Orientierung verstanden.

16.2. Definition (Berandung eines orientierten Stücks). Eine *Testform* ist eine Differentialform der Klasse C^∞ mit kompaktem Träger auf \mathbf{R}^n . Testformen der Stufe Null heißen auch *Testfunktionen*. Ein orientiertes p -dimensionales Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ heißt *berandet*, wenn es ein orientiertes $(p-1)$ -dimensionales Stück $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ gibt, sodass für alle Testformen der Stufe $p-1$ die Formel 16.1.1 gilt. In diesem Fall heißt \mathfrak{Y} eine *Berandung* oder, zur Unterscheidung vom topologischen Rand, auch ein *analytischer Rand* von \mathfrak{X} .

Bemerkungen. (a) In der Definition der Berandung wird die Gültigkeit der Formel 16.1.1 nur für Testformen verlangt. Dies hat seinen Grund darin, dass diese Klasse von Formen unter äußerer Ableitung abgeschlossen und relativ klein ist, sodass also 16.1.1 (zumindest prinzipiell) leichter verifiziert werden kann. Zum Auffinden von Y ist auch Satz 16.8 hilfreich, der besagt, dass $Y \subset X_{\text{sing}}$ sein muss. Andererseits ist die Klasse der Testformen so groß, dass \mathfrak{X} durch seine Integralwerte $\int_{\mathfrak{X}} \omega$ eindeutig bestimmt ist (Satz 16.5). Der eigentliche Satz von Stokes 16.10 besagt dann die Gültigkeit von 16.1.1 für stetig differenzierbare Differentialformen auf einer offenen Umgebung von X , und wird durch ein Approximationsverfahren erbracht.

(b) Aus dem Eindeutigkeitsatz 16.5 folgt (Korollar 16.6), dass ein analytischer Rand, falls er existiert, eindeutig bestimmt ist. Daher ist es sinnvoll, von *der* Berandung von \mathfrak{X} zu sprechen und sie wie in §14 mit

$$\mathfrak{Y} = \partial\mathfrak{X}$$

zu bezeichnen.

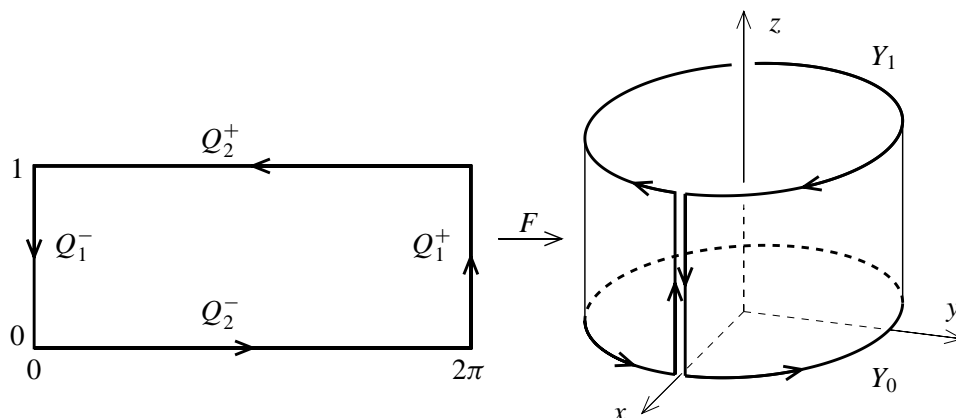
(c) Unsere Definition liefert für $p = n$ genau die in §14 betrachteten stückweise glatt berandeten Mengen: Der Gaußsche Integralsatz besagt, dass ein stückweise glatt berandetes X im analytischen Sinne berandet ist, und die Umkehrung wird in Satz 16.14 gezeigt.

(d) Die Nichtexistenz der Berandung eines Stückes X kann ihren Grund in der zu komplizierten Geometrie des singulären Teils $X_{\text{sing}} = X \setminus X_{\text{reg}}$ (vgl. Beispiele in 14.1) oder im schlechten Verhalten der Orientierung ξ haben. Insbesondere ist es wichtig, sich klarzumachen, dass die Existenz der Berandung keine rein geometrische Eigenschaft des Stückes X ist, sondern auch wesentlich von der Orientierung ξ abhängt. Es kann auch ohne weiteres vorkommen, dass (X, ξ) berandet ist, aber diese Eigenschaft bei Wahl einer anderen Orientierung ξ' verloren geht, siehe 16.3(c).



16.3. Beispiele. (a) *Der Zylindermantel.* Sei X der Zylindermantel im \mathbf{R}^3 mit der Parametrisierung

$$F: Q = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow X, \quad F(\varphi, t) = (\cos \varphi, \sin \varphi, t).$$



Als Orientierung wählen wir die durch die äußere Normale $\mathbf{n} = \mathbf{n}_Z$ des Vollzylinders $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ induzierte, also

$$\xi(a; v_1, v_2) = \sigma(a; \mathbf{n}(a), v_1, v_2) = \text{sgn} \det(\mathbf{n}(a), v_1, v_2),$$

für alle $a \in X_{\text{reg}}$ und $v_1, v_2 \in T_a(X)$. Wenn etwa $a = F(\varphi, t)$, so ist $\mathbf{n}(a) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$. Es ist naheliegend zu vermuten, dass die Berandung von (X, ξ) die Vereinigung der zwei Kreise $Y_0 := \mathbf{S}^1 \times \{0\} = F(Q_2^-)$ und $Y_1 = \mathbf{S}^1 \times \{1\} = F(Q_2^+)$ ist, mit Orientierung η_i auf Y_i wie in der Skizze angegeben. Diese Vermutung lässt sich leicht rechnerisch bestätigen. Dazu wenden wir einfach den Satz von Gauß auf $F^*(\omega)$ und das Parameterrechteck Q mit der zurückgeholten Orientierung $F^*(\xi)$ an. Diese ist wegen

$$(F^*(\xi))(u; e_1, e_2) = \xi(F(u); \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \frac{\partial F}{\partial t}) = \text{sgn} \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

gerade die Standardorientierung $\sigma^2 = \sigma$ des \mathbf{R}^2 . Also liefert der Satz von Gauß und die Vertauschbarkeit des Zurückholens mit der äußeren Ableitung

$$\int_{(X, \xi)} d\omega = \int_Q dF^*(\omega) = \int_{\partial Q} F^*(\omega)$$

$$= \int_{(Q_1^+, \sigma \perp e_1)} F^*(\omega) - \int_{(Q_1^-, \sigma \perp e_1)} F^*(\omega) \tag{1}$$

$$+ \int_{(Q_2^+, \sigma \perp e_2)} F^*(\omega) - \int_{(Q_2^-, \sigma \perp e_2)} F^*(\omega). \tag{2}$$

Hierbei heben sich die beiden Integrale in (1) auf: Mit den Bezeichnungen von 12.7(a) ist, wegen der Periodizität von \sin und \cos , $F \circ F_{1,-} = F \circ F_{1,+} : [0, 1] \rightarrow X$, mit Bild die (in der Abbildung doppelt gezeichnete) Mantellinie $\{(1, 0, z) : 0 \leq z \leq 1\}$, und folglich

$$\begin{aligned} \int_{(Q_1^+, \sigma \perp e_1)} F^*(\omega) &= \int_0^1 F_{1,+}^* (F^*(\omega)) = \int_0^1 (F \circ F_{1,+})^*(\omega) \\ &= \int_0^1 (F \circ F_{1,-})^*(\omega) = \int_{(Q_1^-, \sigma \perp e_1)} F^*(\omega). \end{aligned}$$

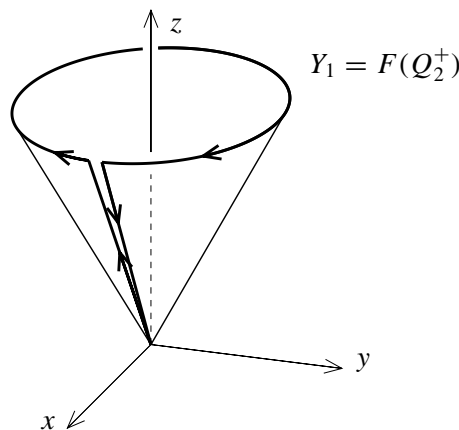
Andrerseits ist

$$\int_{(Q_2^+, \sigma \perp e_2)} F^*(\omega) = \int_{(Y_1, \eta_1)} \omega,$$

denn $G := F \circ F_{2,+} : [0, 2\pi] \rightarrow Y_1$ ist eine Parametrisierung von Y_1 und die Orientierung $G^*(\eta_1)$ ist gerade die Orientierung $F_{2,+}^*(\sigma \perp e_2)$.

Ähnlich ist das zweite Summand in (2) das Integral $\int_{(Y_0, \eta_0)} \omega$ über den unteren Kreis Y_0 . Damit ist also die Stokesformel 16.1.1 und $\partial(X, \xi) = (Y, \eta) = (Y_0, \eta_0) \cup (Y_1, \eta_1)$ nachgewiesen.

(b) *Der Kegelmantel.* Hier ist $X = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq 1\}$, mit Parametrisierung $F(\varphi, t) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, t)$ auf demselben Parameterrechteck Q wie im Beispiel des Zylindermantels.

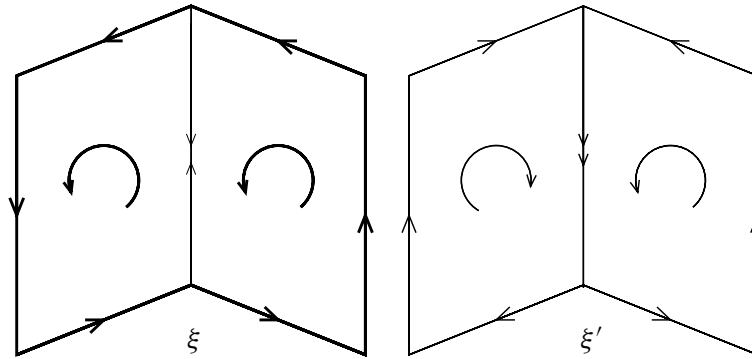


Wieder verwenden wir die Orientierung nach der äußeren Normalen des Vollkegels,

$$\mathbf{n}(F(\varphi, t)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt ist $F(Q_2^-) = \{0\}$, das entsprechende Integral in (2) also Null. Als Berandung verbleibt die wie oben orientierte Kreislinie (Y_1, η_1) , die beiden Integrale in (1) heben sich wieder auf.

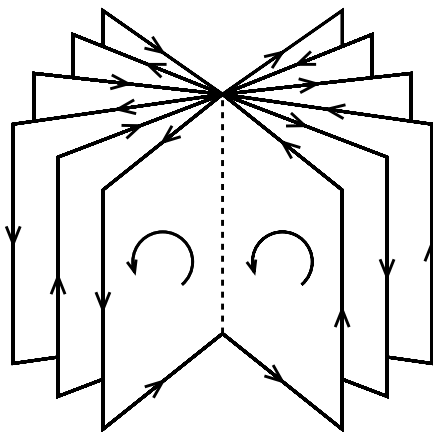
(c) *Das Dach.* Sei X die Vereinigung von zwei nicht in einer Ebene liegenden Rechtecken R_1 und R_2 im \mathbf{R}^3 , die eine Kante K gemeinsam haben. Hier ist X_{reg} die Vereinigung der relativen Inneren der Rechtecke, und demgemäß gibt es, bis auf einen globalen Vorzeichenfaktor, zwei wesentlich verschiedene stetige Orientierungen ξ und ξ' von X wie in der Skizze angegeben:



Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes verifiziert man leicht, dass (X, ξ) als Berandung die stark ausgezogene Kurve hat, weil sich die Integrale über die gemeinsame Kante K wegen der von R_1 und R_2 induzierten entgegengesetzten Orientierung wegheben. Dagegen ist (X, ξ') nicht berandet, denn jetzt müsste das Integral über K doppelt gezählt werden, also K die Vielfachheit 2 bekommen. Es ist möglich, eine Theorie verallgemeinerter Orientierungen mit Vielfachheiten zu entwickeln, die solche Fälle noch erfasst. Dies liegt jedoch ausserhalb des Rahmens dieser Vorlesung.

Man beachte, dass eine solche Situation nur bei niederdimensionalen Stücken auftreten kann. Ein n -dimensionales Stück mit stückweise glattem Rand ist nach dem Gaußschen Integralsatz für jede Wahl einer stetigen Orientierung berandet.

(d) Je nach Geschmack kann man das vorige Beispiel als ein Dach oder als ein *Buch* (mit nur zwei Blättern) interpretieren. Verallgemeinerungen auf mehr als zwei Blätter sind leicht möglich:



Wir kommen nun zu dem schon angekündigten Eindeutigkeitsatz, und beweisen erst ein Lemma.

16.4. Lemma. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ ein p -dimensionales Stück und ξ eine stetige Orientierung auf X . Sei $V \subset \mathbf{R}^n$ eine offene Teilmenge mit $V \cap X \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Testform ω der Stufe p mit $\text{Tr } \omega \subset V$ und $\int_{\mathfrak{X}} \omega \neq 0$.

Beweis. Sei $F : P \rightarrow X$ eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich U . Es gilt $V \cap F(U) \neq \emptyset$, denn X ist der Abschluss von $F(U)$ (siehe 12.2.1), also liegen in jeder Umgebung eines Punktes von $V \cap X$, insbesondere also in V selber, noch Punkte von $F(U)$. Sei also $a = F(b) \in V \cap F(U)$. Durch Ummumerieren der Koordinaten kann man erreichen, dass die Unterdeterminante

$$f(u) := \frac{\partial(F^1, \dots, F^p)}{\partial(u^1, \dots, u^p)}(u)$$

im Punkte b nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit von F und f gibt es einen offenen Würfel $U' = B_\delta(b) \subset U$ um b mit $F(U') \subset V$ und $f(u) \neq 0$ für alle $u \in U'$. Durch geeignetes Verkleinern von V können wir nach 12.9 erreichen, dass $V \cap X = F(U')$. Sei h eine Hutfunktion zu $\{a\}$ und V wie in 15.4, also $0 \leq h \leq 1$, $h(a) = 1$ und $\text{Tr } h \subset V$, und sei $\omega := h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$. Die stetige Orientierung $F^*(\xi) = s \text{sgn}(du^1 \wedge \dots \wedge du^p)$ ist auf der zusammenhängenden Menge U' konstant. Dann ist nach 10.12.4

$$F^*(\omega)F^*(\xi) = (h \circ F)fs |du^1 \wedge \dots \wedge du^p|,$$

und die Funktion $u \mapsto h(F(u))f(u)s(u)$ auf U ist stetig, hat ihren Träger in U' , ist im Punkt b von Null verschieden und wechselt auf U' ihr Vorzeichen nicht. Also folgt aus Korollar 2.10, dass $\int_{\mathfrak{X}} \omega = \int_P F^*(\omega)F^*(\xi) = \int_{U'} F^*(\omega)F^*(\xi) \neq 0$.

16.5. Eindeutigkeitsatz. Ein stetig orientiertes Stück ist durch seine Integralwerte auf den Testformen eindeutig bestimmt: Seien $\mathfrak{X}_i = (X_i, \xi_i)$ ($i = 1, 2$) zwei p -dimensionale stetig orientierte Stücke im \mathbf{R}^n mit der Eigenschaft, dass $\int_{\mathfrak{X}_1} \omega = \int_{\mathfrak{X}_2} \omega$ für alle Testformen der Stufe p . Dann ist $X_1 = X_2$ und $\xi_1 = \xi_2$.

Beweis. Angenommen, $X_1 \setminus X_2 \neq \emptyset$. Dann ist $V := \complement X_2$ offen und $V \cap X_1 \neq \emptyset$. Nach Lemma 16.4 gibt es eine Testform ω mit Träger in V und $\int_{\mathfrak{X}_1} \omega \neq 0$. Andererseits verschwindet ω auf der offenen Umgebung $\complement \text{Tr } \omega$ von X_2 , sodass $\int_{\mathfrak{X}_2} \omega = 0$, Widerspruch. Also ist $X_1 \subset X_2$, und aus Symmetriegründen $X_1 = X_2 =: X$.

Es bleibt noch die Gleichheit der Orientierungen zu zeigen. Sei $F : P \rightarrow X$ eine Parametrisierung von X mit Regularitätsbereich U . Angenommen, $F^*(\xi_1)$ und $F^*(\xi_2)$ sind im Punkt $b \in U$ verschieden, also wegen 13.2 entgegengesetzt. Sei $U' \subset U$ eine zusammenhängende offene Umgebung von b und $V \subset \mathbf{R}^n$ offen mit $X \cap V = F(U')$ (vgl. 12.9). Wähle wie in 16.4 eine Testform ω mit $\text{Tr } \omega \subset V$ und $\int_{(X, \xi_1)} \omega \neq 0$. Weil $F^*(\xi_1)$ und $F^*(\xi_2)$ aus Stetigkeitsgründen auf U' konstant und im Punkt b entgegengesetzt sind, gilt $F^*(\xi_1) = -F^*(\xi_2)$ auf U' . Andererseits ist $\text{Tr } F^*(\omega) \subset U'$ und daher $\int_{(X, \xi_1)} \omega = \int_{U'} F^*(\omega)F^*(\xi_1) = -\int_{U'} F^*(\omega)F^*(\xi_2) = -\int_{(X, \xi_2)} \omega$, Widerspruch.

16.6. Korollar. Die Berandung eines orientierten Stücks \mathfrak{X} ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Sind \mathfrak{Q}_i Berandungen von \mathfrak{X} , dann gilt $\int_{\mathfrak{Q}_1} \omega = \int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\mathfrak{Q}_2} \omega$ für alle Testformen ω der Stufe $p - 1$. Also folgt die Behauptung aus Satz 16.5.

Als Nächstes zeigen wir, dass die Berandung im singulären Teil eines Stückes enthalten ist. Auch dies erfordert einen Hilfssatz.

16.7. Lemma. Sei $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ ein p -dimensionales orientiertes Stück. Dann gilt für alle Testformen ω der Stufe $p - 1$:

$$\text{Tr}(\omega) \cap X_{\text{sing}} = \emptyset \implies \int_{\mathfrak{X}} d\omega = 0.$$

Beweis. Wir betrachten erst den folgenden *Spezialfall*: Es gibt eine Parametrisierung $F : P \rightarrow X$, einen Regularitätsbereich $U \subset P$ und einen kompakten Quader $Q \subset U$, sodass $\text{Tr}(\omega) \cap X \subset F(Q^\circ)$.

Dann ist $\text{Tr} F^*(d\omega) \subset \text{Tr} F^*(\omega) \subset Q^\circ$, und $F^*(\xi)$ ist eine stetige Orientierung auf Q° . Also folgt nach dem Gaußschen Integralsatz für Q :

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_Q F^*(\xi) F^*(d\omega) = \int_{(Q, F^*(\xi))} d(F^*(\omega)) = \int_{\partial(Q, F^*(\xi))} F^*(\omega) = 0,$$

weil $F^*(\omega)$ auf dem Rand von Q verschwindet.

Der *allgemeine Fall* wird mit Hilfe einer Partition der Eins auf den Spezialfall zurückgeführt. Wegen $\text{Tr}(\omega) \cap X_{\text{sing}} = \emptyset$ ist $\text{Tr}(\omega) \cap X = \text{Tr}(\omega) \cap X_{\text{reg}}$. Also gibt es zu jedem $a \in \text{Tr}(\omega) \cap X$ eine Parametrisierung $F_a : P_a \rightarrow X$ mit Regularitätsbereich U_a und einen Punkt $b_a \in U_a$, sodass $F_a(b_a) = a$. Wähle einen kompakten Quader Q_a mit $b_a \in Q_a^\circ$ und $Q_a \subset U_a$, sowie eine offene Menge $V_a \subset \mathbf{R}^n$, sodass $F(Q_a^\circ) = X \cap V_a$, was nach Lemma 12.9 möglich ist. Für ein $a \in \text{Tr}(\omega) \setminus X$ wähle eine offene Umgebung $V_a \subset \mathbb{C}X$. Dann bilden die V_a eine offene Überdeckung der kompakten Menge $\text{Tr}(\omega)$. Nach Heine-Borel gibt es eine endliche Teilüberdeckung V_{a_1}, \dots, V_{a_m} , und nach Satz 15.6 eine zugehörige Partition der Eins f_1, \dots, f_m . Die $\omega_i := f_i \omega$ erfüllen die Voraussetzungen des Spezialfalles, und es gilt $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i$. Nun folgt der Satz durch Summation aus $\int_{\mathfrak{X}} d\omega_i = 0$.

16.8. Satz. Für ein berandetes Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ mit Berandung $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ gilt $Y \subset X_{\text{sing}}$.

Beweis. Nach 12.13 ist X_{sing} kompakt, insbesondere abgeschlossen. Daher ist $V := \mathbb{C}X_{\text{sing}}$ offen. Wäre $Y \cap V \neq \emptyset$, dann gäbe es nach Lemma 16.4 eine Testform ω der Stufe $p - 1$ mit $\text{Tr}(\omega) \subset V$ und $\int_{\mathfrak{Y}} \omega \neq 0$. Aber $\int_{\mathfrak{Y}} \omega = \int_{\mathfrak{X}} d\omega = 0$ nach Lemma 16.7, weil $\text{Tr}(\omega) \cap X_{\text{sing}} = \emptyset$, Widerspruch.

Bemerkung. Das Beispiel des Kegelmantels (16.3(b)) zeigt, dass Gleichheit im Allgemeinen nicht zutrifft: Dort besteht nämlich X_{sing} aus der Kreislinie $Y = \mathbf{S}^1 \times \{1\}$ und der Kegelspitze $\{0\}$. Andererseits ist für n -dimensionale berandete Stücke nach Satz 16.14 und 12.13.1 immer $Y = \text{Rd} X = X_{\text{sing}}$.

16.9.* Lemma (Approximation durch Testfunktionen). Sei f eine stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger auf \mathbf{R}^n . Dann lässt sich f samt seinen ersten Ableitungen durch eine Testfunktion gleichmäßig approximieren, d.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine C^∞ -Funktion g mit kompaktem Träger, sodass $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ und $\left| \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial g}{\partial x^i}(x) \right| \leq \varepsilon$, für alle $x \in \mathbf{R}^n$ und alle $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Sei h eine nicht negative C^∞ -Funktion h mit Träger im Würfel $W = \overline{B_1(0)}$ und $\int_{\mathbf{R}^n} h = 1$. Man erhält h zum Beispiel durch Multiplikation mit einer positiven Konstanten aus der Hutfunktion $H_{0,1/2}$ von 15.3. Für $\lambda > 0$ sei

$$f_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x - \lambda t) h(t) dt. \quad (1)$$

Wir zeigen, dass f_λ für genügend kleines λ die gewünschten Eigenschaften hat. Der Integrand von (1) ist (als Funktion von t) offenbar stetig mit Träger enthalten in W . Hieraus folgt die Existenz des Integrals. Ferner ist der Integrand Null, wenn $x \notin \text{Tr}(f) + \lambda W$. Daher hat f_λ kompakten Träger enthalten in $\text{Tr}(f) + \lambda W$. Um zu sehen, dass f_λ eine C^∞ -Funktion ist, verwenden wir, bei festem x , die Transformation $\Phi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $t = \Phi(u) = \frac{x-u}{\lambda}$. Dann ist $\Phi'(u) = -\lambda^{-1}\text{Id}$, also $|\det \Phi'| = \lambda^{-n}$, und die Transformationsformel liefert

$$f_\lambda(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(u)h\left(\frac{x-u}{\lambda}\right)\lambda^{-n} du. \quad (2)$$

Weil h eine C^∞ -Funktion ist, folgt nun aus (2) und Satz 7.10 durch Induktion dasselbe für f_λ . Schließlich gilt wegen $\int h = 1$

$$f_\lambda(x) - f(x) = \int_{\mathbf{R}^n} (f(x-\lambda t) - f(x))h(t) dt. \quad (3)$$

Weil f kompakten Träger hat, folgt aus Satz 0.11 leicht, dass f auf ganz \mathbf{R}^n gleichmäßig stetig ist. Es gibt also ein $\delta_0 > 0$, sodass $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle x, y mit $|y - x| \leq \delta_0$. Wegen $\text{Tr}(h) \subset W$ brauchen wir das Integral in (3) nur über $|t| \leq 1$ zu erstrecken. Für $\lambda \leq \delta_0$ ist dann $|f(x-\lambda t) - f(x)| \leq \varepsilon$ und somit auch

$$|f_\lambda(x) - f(x)| \leq \int \varepsilon h(t) dt = \varepsilon.$$

Nach 7.10 gilt

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x^i}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x-\lambda t)h(t) dt.$$

Weil die partiellen Ableitungen von f ebenfalls stetig mit kompaktem Träger sind, folgt mit denselben Schlüssen die Existenz positiver δ_i , sodass

$$\left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^i}(x) - \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \right| \leq \varepsilon$$

für alle x und alle $\lambda \leq \delta_i$. Nun setze man $g = f_\lambda$ für $\lambda = \min(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n)$.

16.10. Satz von Stokes. Sei $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ ein p -dimensionales orientiertes berandetes Stück mit Berandung $\partial\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = (Y, \eta)$. Dann gilt für alle $(p-1)$ -Formen der Klasse C^1 auf einer offenen Umgebung von X die Formel

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\partial\mathfrak{X}} \omega. \quad (1)$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, dass die rechte Seite von (1) sinnvoll ist: Nach 16.8 gilt insbesondere $Y \subset X$ und somit ist ω auf einer Umgebung von Y definiert.

Nun zeigen wir, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit ω auf ganz \mathbf{R}^n definiert und mit kompakten Träger annehmen können. Sei etwa ω auf der offenen Menge $V \supset X$ definiert. Wähle eine offene Menge $B \supset X$ mit kompaktem Abschluss $\bar{B} \subset V$ (Lemma 8.3). Wähle eine C^∞ -Funktion h mit kompaktem Träger $\text{Tr} h \subset V$ und $h|_B = 1$ (Lemma 15.4). Dann lässt sich $h\omega$ durch Null zu einer Differentialform $\tilde{\omega}$ der Klasse C^1 mit kompaktem Träger auf ganz \mathbf{R}^n fortsetzen, und es gilt $\tilde{\omega}|_B = \omega|_B$,

also auch $d\tilde{\omega}|_B = d\omega|_B$. Folglich ist $\int_{\mathfrak{Y}} \omega = \int_{\mathfrak{Y}} \tilde{\omega}$ und $\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \int_{\mathfrak{X}} \tilde{\omega}$. Wir können also ω durch $\tilde{\omega}$ ersetzen und daher ω auf ganz \mathbf{R}^n definiert mit kompaktem Träger annehmen.

Sei $\omega = \sum_I f_I dx^I$ wie in 10.6.1, wobei I die aufsteigend geordneten $(p-1)$ -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft, und die f_I auf \mathbf{R}^n stetig differenzierbar mit kompaktem Träger sind. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle dazu C^∞ -Funktionen g_I mit kompaktem Träger wie in Lemma 16.9, und sei $\omega' = \sum_I g_I dx^I$. Dann ist ω' eine Testform, und aus 11.2.6 und der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt

$$|\omega - \omega'| \leq \sum_I |f_I - g_I| \cdot |dx^I| \leq \sum_I \varepsilon |dx^I| \leq \varepsilon \binom{n}{p-1}^{1/2} d\omega_{p-1}. \quad (2)$$

Ähnlich ist

$$\begin{aligned} |d\omega - d\omega'| &\leq \sum_I \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_I}{\partial x^j} - \frac{\partial g_I}{\partial x^j} \right| \cdot |dx^j \wedge dx^I| \leq \varepsilon \sum_I \sum_{j=1}^n |dx^j \wedge dx^I| \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^n \sum_{I \not\ni j} |dx^j \wedge dx^I| = \varepsilon p \sum_J |dx^J| \leq \varepsilon p \binom{n}{p}^{1/2} d\omega_p, \end{aligned} \quad (3)$$

wobei J die aufsteigend geordneten p -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ durchläuft. Integration von (2) und (3) liefert wegen 12.12.2

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathfrak{Y}} \omega - \int_{\mathfrak{Y}} \omega' \right| &\leq \int_Y |\omega - \omega'| \leq \varepsilon \binom{n}{p-1}^{1/2} \mu_{p-1}(Y), \\ \left| \int_{\mathfrak{X}} d\omega - \int_{\mathfrak{X}} d\omega' \right| &\leq \int_X |d\omega - d\omega'| \leq \varepsilon p \binom{n}{p}^{1/2} \mu_p(X). \end{aligned}$$

Weil (1) für ω' gilt und ε beliebig war, folgt die Behauptung.

16.11. Geschlossene Stücke. Das leere Stück \emptyset (dem wir gemäß unseren Konventionen in 12.2(d) jede Dimension zuschreiben) versehen mit seiner einzig möglichen Orientierung \emptyset bezeichnen wir mit $0 = (\emptyset, \emptyset)$. Ein p -dimensionales orientiertes Stück $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ heißt *geschlossen*, wenn die Berandung existiert und leer ist: $\partial\mathfrak{X} = 0$. Nach Definition der Berandung bedeutet das also nichts anderes als

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = 0 \quad (1)$$

für alle Testformen ω der Stufe $p-1$.

Ein Beispiel ist die 2-Sphäre mit ihrer Standardorientierung ξ wie in 13.11.1. Der Beweis kann, unter Verwendung sphärischer Koordinaten $F(\varphi, \vartheta) = (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, \sin \vartheta)$ mit dem Parameterrechteck $P = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$, durch direkte Rechnung erbracht werden (Aufgabe!), folgt jedoch auch aus dem folgenden Satz. Der Begriff „geschlossen“ für Stücke ist nicht zu verwechseln mit „abgeschlossen“ im topologischen Sinn. Vielmehr sind geschlossene Stücke die höherdimensionale Verallgemeinerung von geschlossenen Kurven. Ferner hat dieser Begriff für Stücke eine gewisse Verwandtschaft mit dem gleichnamigen für Differentialformen. Dies zeigt auch das Analogon 16.12.1 für Stücke der Regel $d\alpha = 0$ für Differentialformen.



16.12. Satz. (a) Die Berandung eines orientierten Stücks \mathfrak{X} ist geschlossen, kurz:

$$\partial(\partial\mathfrak{X}) = 0. \quad (1)$$

(b) Ein nichtsinguläres orientiertes Stück ist geschlossen.

Beweis. (a) Sei ω eine Testform der Stufe $p - 2$. Dann ist $d\omega$ eine Testform der Stufe $p - 1$. Wegen $dd\omega = 0$ folgt

$$\int_{\mathfrak{Y}} d\omega = \int_{\mathfrak{X}} dd\omega = 0,$$

und das besagt nach 16.11.1 gerade $\partial\mathfrak{Y} = 0$.

(b) Das folgt sofort aus Lemma 16.7 und der Definition eines geschlossenen Stücks.

16.13. Korollar. (a) Die Sphäre \mathbf{S}^{n-1} mit der Standardorientierung ξ ist geschlossen.

(b) Die Raumwinkelform Θ_{n-1} auf $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ ist nicht exakt.

Beweis. (a) Sei K die Einheitsvollkugel (in der Euklidischen Norm) mit der Standardorientierung σ . Nach dem Gaußschen Integralsatz ist $\mathfrak{K} = (K, \sigma)$ ein n -dimensionales berandetes Stück mit Berandung $\partial\mathfrak{K} = (\mathbf{S}^{n-1}, \xi)$, und damit folgt die Behauptung aus 16.12(a). (Man könnte auch 16.12(b) verwenden, weil die Sphäre ein nichtsinguläres Stück ist.)

(b) Wäre $\Theta_{n-1} = d\omega$ für eine $(n-2)$ -Form ω auf $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, dann wäre das Integral von Θ_{n-1} über (\mathbf{S}^{n-1}, ξ) wegen der Geschlossenheit der Sphäre und Satz 16.10 gleich Null. Nach 13.12.2 ist dies jedoch nicht der Fall.

16.14.* Konsistenzsatz. Sei $X \subset \mathbf{R}^n$ ein n -dimensionales Stück und sei ξ eine stetige Orientierung auf X° . Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

- (i) X ist stückweise glatt berandet im Sinne von 14.1, d.h., der topologische Rand $\text{Rd } X$ ist ein $(n-1)$ -dimensionales Stück;
- (ii) $\mathfrak{X} = (X, \xi)$ ist berandet im Sinne der Definition 16.2.

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist der analytische Rand $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ gegeben durch $Y = \text{Rd } X$ und $\eta = \xi \lrcorner \mathbf{n}_X$; die Bezeichnungen in 14.6 und 16.2 sind also konsistent.

Beweis. (i) \implies (ii): Der Gaußsche Integralsatz besagt, dass \mathfrak{X} im Sinne von 16.2 berandet ist, mit Berandung $(\text{Rd } X, \xi \lrcorner \mathbf{n}_X)$.

(ii) \implies (i): Sei $\mathfrak{Y} = (Y, \eta)$ die Berandung von \mathfrak{X} im Sinne von 16.2. Wir zeigen $Y = \text{Rd } X$. Nach Satz 16.8 und 12.13.1 ist $Y \subset X_{\text{sing}} = \text{Rd } X$.

Umgekehrt sei $a \in \text{Rd } X$ aber $a \notin Y$. Wegen der Abgeschlossenheit von Y gibt es eine offene Kugel $V = B_\delta(a)$ mit $V \cap Y = \emptyset$. Weiter ist $V \cap \mathbb{C}X \neq \emptyset$, weil a ein Randpunkt von X ist, und es ist $V \cap X^\circ \neq \emptyset$, weil $a \in X$ und X der Abschluss seines Inneren ist. Wir konstruieren eine Testform ω der Stufe $n-1$ mit $\text{Tr } \omega \subset V$ und der Eigenschaft, dass $\int_{\mathfrak{X}} d\omega \neq 0$. Das liefert dann den gesuchten Widerspruch, denn wegen $\text{Tr } \omega \cap Y = \emptyset$ ist $\int_{\mathfrak{Y}} \omega = 0$.

Wähle Punkte $c_0 \in V \cap X^\circ$ und $c_1 \in V \cap \mathbb{C}X$. Ergänze den Vektor $b_1 := c_1 - c_0$ zu einer Basis $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ von \mathbf{R}^n , und sei $|v|^*$ die Maximumnorm bezüglich dieser Basis; also $|v|^* = \max(|\lambda^1|, \dots, |\lambda^n|)$ für $v = \sum \lambda^i b_i$. Nach Analysis 2, Satz 2.3 ist diese Norm zur üblichen Maximumnorm äquivalent. Sei $d^*(x, y) = |x - y|^*$ der

Abstand bezüglich dieser Norm. Weil V konvex ist, liegt die abgeschlossene Strecke $S = [c_0, c_1]$ ganz in V , und daher ist der Abstand zwischen der kompakten Menge S und der abgeschlossenen Menge $\complement V$ positiv. Folglich gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$P := \{x : d^*(x, S) \leq \varepsilon\} \subset V.$$

Durch Verkleinern von ε können wir erreichen, dass für die abgeschlossenen Kugeln $K_\varepsilon(c_i) := \{x : |x - c_i|^* \leq \varepsilon\}$ (bezüglich der Norm $|\cdot|^*$) gilt:

$$K_\varepsilon(c_0) \subset V \cap X^\circ \quad \text{und} \quad K_\varepsilon(c_1) \subset V \cap \complement X. \quad (1)$$

Insbesondere ist dann $\varepsilon < 1/2$, weil ja $|c_1 - c_0|^* = 1$. Die gesuchte Differentialform drückt sich am einfachsten in Koordinaten aus, die dem Problem angepasst sind. Dazu seien $y^1, \dots, y^n : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ die affinen Koordinaten zur Basis \mathbf{b} mit Ursprung c_0 , also $y^i(c_0 + \sum_{j=1}^n \lambda^j b_j) = \lambda^i$. Die Koordinaten von c_1 in diesen Koordinaten sind offenbar $(1, 0, \dots, 0)$. Wir überlassen es dem Leser zu zeigen, dass P und $K_\varepsilon(c_i)$ durch

$$P = \{x : -\varepsilon \leq y^1(x) \leq 1 + \varepsilon, |y^i(x)| \leq \varepsilon \text{ für } i \geq 2\}, \quad (2)$$

$$K_\varepsilon(c_0) = \{x : |y^i(x)| \leq \varepsilon \text{ für } i \geq 1\}, \quad (3)$$

$$K_\varepsilon(c_1) = \{x : |y^1(x) - 1| \leq \varepsilon, |y^i(x)| \leq \varepsilon \text{ für } i \geq 2\} \quad (4)$$

beschrieben werden.

Sei H die Hutfunktion von Lemma 15.3(a). Wir definieren C^∞ -Funktionen h und g auf \mathbf{R} durch

$$h(t) := H\left(\frac{2t}{\varepsilon}\right), \quad g(t) := \int_{-\varepsilon}^t (h(s) - h(s-1)) ds,$$

sodass also $g'(t) = h(t) - h(t-1)$ (Skizze!). Man sieht leicht, dass

$$\text{Tr}(h) \subset [-\varepsilon, \varepsilon], \quad \text{Tr}(g) \subset [-\varepsilon, 1 + \varepsilon], \quad (5)$$

$$\text{Tr}(g') \subset [-\varepsilon, \varepsilon] \cup [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon], \quad (6)$$

sowie $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t) dt > 0$.

Nun definieren wir

$$\omega := \left[g(y^1) \prod_{i=2}^n h(y^i) \right] dy^2 \wedge \dots \wedge dy^n.$$

Aus (2) und (5) folgt $\text{Tr}(\omega) \subset P \subset V$. Nach den Regeln für die äußere Ableitung ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[g'(y^1) \cdot \prod_{i=2}^n h(y^i) \right] dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \left[(h(y^1) - h(y^1 - 1)) \prod_{i=2}^n h(y^i) \right] dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \end{aligned} \quad (7)$$

und daher, wegen (3), (4) und (6),

$$\text{Tr}(d\omega) \subset K_\varepsilon(c_0) \cup K_\varepsilon(c_1).$$

Nach (1) gilt also $X \cap \text{Tr}(d\omega) \subset K_\varepsilon(c_0)$. Die stetige Orientierung ξ ist auf der zusammenhängenden Menge $K_\varepsilon(c_0)$ konstant gleich $\pm\sigma$. Ferner verschwindet $h(y^1 - 1)$ auf $K_\varepsilon(c_0)$. Daher folgt aus (7)

$$\int_{\mathfrak{X}} d\omega = \pm \int_{(K_\varepsilon(c_0), \sigma)} d\omega = \pm \int_{K_\varepsilon(c_0)} \left[\prod_{i=1}^n h(y^i) \right] \sigma \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n.$$

Nun gilt $\sigma \cdot dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \text{sgn}(\det \mathbf{b}) |dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n|$, wie man durch Auswerten beider Seiten auf $(x; \mathbf{b})$ erkennt (benütze $dy^i(x; b_j) = \delta_j^i$). Sei $\Phi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ der durch $\Phi(\lambda^1, \dots, \lambda^n) = c_0 + \sum \lambda^i b_i$ gegebene Diffeomorphismus. Dann ist $K_\varepsilon(c_0) = \Phi([- \varepsilon, \varepsilon]^n)$ und $y^i \circ \Phi = x^i$ ist die übliche i -te Koordinatenfunktion auf \mathbf{R}^n . Also gilt $(h(y^1) \cdots h(y^n)) \circ \Phi = h(x^1) \cdots h(x^n)$ und $\Phi^*(|dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n|) = |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n|$. Daher liefert die Transformationsformel und der Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \pm \int_{\mathfrak{X}} d\omega &= \int_{K_\varepsilon(c_0)} h(y^1) \cdots h(y^n) |dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n| \\ &= \int_{[-\varepsilon, \varepsilon]^n} h(x^1) \cdots h(x^n) |dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n| \\ &= \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} h(t) dt \right)^n \neq 0. \end{aligned}$$

Das ist der gesuchte Widerspruch.

Die letzte Behauptung des Satzes ergibt sich sofort aus der Eindeutigkeit der Berandung 16.6.

Bezeichnungen und Konventionen

$A \subset B$	A ist (echte oder unechte) Teilmenge von B
$\text{Card } M$	Kardinalität einer Menge M
$\complement M$	Komplement
\overline{M}	abgeschlossene Hülle, Abschluss
\mathfrak{M}°	offener Kern, Inneres
$\text{Rd } M$	(topologischer) Rand
\mathbf{N}	natürliche Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbf{Z}	ganze Zahlen
\mathbf{R}	reelle Zahlen
\mathbf{R}_+	nichtnegative reelle Zahlen
\mathbf{R}_{++}	positive reelle Zahlen
\mathbf{C}	komplexe Zahlen
\mathbf{K}	reelle oder komplexe Zahlen
sgn	Vorzeichen
Re, Im	Realteil, Imaginärteil
$\text{Mat}_{pq}(\mathbf{K})$	$p \times q$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbf{K}
$\text{Mat}_n(\mathbf{K})$	$n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbf{K}
$\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$	Diagonal(block)matrix
$\det A$	Determinante
$\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$	Standardbasis des \mathbf{R}^n
x^i	Koordinatenfunktionen im \mathbf{R}^n
$ \cdot , \ \cdot\ $	Absolutbetrag, Norm
$\ \cdot\ _p$	p -Norm
$B_r(a)$	offene Kugel mit Radius r und Mittelpunkt a
$\dot{\gamma}$	Ableitung einer Kurve
$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \partial_i f(a)$	partielle Ableitung
$\frac{\partial(f^1, \dots, f^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}$	Funktionaldeterminante
\mathcal{C}^k	k -mal stetig partiell differenzierbar
$f'(a)$	(totale) Ableitung von f in a
df	Differential von f
$\text{grad}_a f$	Gradient von f in a
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall, Strecke von a nach b
$]a, b[$	offenes Intervall
$[a, b[$ und $]a, b]$	halboffene Intervalle
μ, μ^n	Lebesgue-Maß im \mathbf{R}^n
$S_Z(f)$	Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z
$Z \prec \varrho$	Zerlegung Z feiner als ϱ
$f \otimes g$	Tensorprodukt von Funktionen
$O(f)$	Ordnatenmenge einer Funktion
χ_M	charakteristische Funktion einer Menge
M^y, M_x	horizontale und vertikale Schnittmenge
$\mathcal{L}^1(M)$	integrierbare Funktionen auf M
$\mathcal{L}_{\text{loc}}^1$	lokal integrierbare Funktionen
\mathcal{N}	unwesentliche Funktionen
\mathcal{L}^p	p -integrierbare Funktionen
L^p	p -integrierbare Funktionen modulo \mathcal{N}

\mathcal{T}	Treppenfunktionen
\mathfrak{S}_p	symmetrische Gruppe
Alt^p	alternierende Multilinearformen p -ter Stufe
Ω^p	Differentialformen p -ter Stufe
Δ_i	Basis für Ω^{n-1}
$\Phi^*(\omega)$	Zurückholen einer Differentialform
$\Phi^*(\mathfrak{w}), \Phi^*(\xi)$	Zurückholen einer Dichte oder Orientierung
$d\omega$	äußere Ableitung einer Differentialform
$\omega_1 \wedge \omega_2$	äußeres Produkt von Differentialformen
$\omega \lrcorner \mathbf{f}$	inneres Produkt von Differentialform und Vektorfeld
\mathfrak{w}	Dichte
\mathfrak{W}^p	p -dimensionale Dichten
ds	Linielement
do_p	p -dimensionales Oberflächenelement
$X_{\text{reg}}, X_{\text{sing}}$	regulärer und singulärer Teil eines Stücks
$\mu_p(X)$	p -dimensionales Maß eines Stücks X
Gr	Gramsche Determinante
$\text{Bas}(\mathbf{V})$	Menge der Basen eines Vektorraums \mathbf{V}
$\text{Or}(\mathbf{V})$	Menge der Orientierungen von \mathbf{V}
ξ	Orientierung auf einer Menge oder Mannigfaltigkeit
σ, σ^n	Standardorientierung des \mathbf{R}^n
$\mathfrak{M} = (M, \xi), \mathfrak{X} = (X, \xi)$	orientierte Menge, orientiertes Stück
\mathbf{n}_X	äußeres Einheitsnormalenfeld
$\partial\xi, \xi \lrcorner \mathbf{n}_X$	induzierte Orientierung des Randes
$\text{div } \mathbf{f}$	Divergenz eines Vektorfeldes \mathbf{f}
$[v_1, \dots, v_{n-1}]$	äußeres Produkt von Vektoren
Tr	Träger einer Funktion oder Differentialform
$\partial\mathfrak{X}$	Berandung, analytischer Rand

Für Zwecke der linearen Algebra, insbesondere die üblichen Regeln über Produkte von Vektoren und Matrizen, wird unter \mathbf{K}^n der Vektorraum der Spaltenvektoren mit Koeffizienten in \mathbf{K} verstanden, und es werden die Komponenten eines Spaltenvektors $v \in \mathbf{K}^n$ mit oberen Indizes nummeriert, also

$$v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.$$

Aus Gründen der typographischen Bequemlichkeit weichen wir jedoch oft von dieser Konvention ab und schreiben v auch als Zeilenvektor.

Namen- und Sachverzeichnis

- abändern**
 — einer Funktion auf einer Nullmenge 36
 abgeschlossen 1
 abgeschlossene Hülle 1
 Abstand 3
 Achterschleife 86
 äußere Ableitung 74, 75
 äußere Normale 102
 äußerer Vektor 102
 äußeres Produkt
 — von Differentialformen 72
 — von Linearformen 71
 — von Multilinearformen 70
 — von Vektoren 109
 alternierend
 —, Differentialform 72
 —, Multilinearform 70
 analytischer Rand 119
 Approximation
 — durch Testfunktionen 124
 — durch Treppenfunktionen 68
 — messbarer Mengen 44
 ausgearteter Quader 4
 Ausnahmemenge 114
 Ausschöpfung 33
 Ausschöpfungslemma 43
- Banachraum** 66, 68
 berandet 119, 126
 Berandung 119, 125
 Borel-Menge 43
 Buch 122
- Cantorsches Diskontinuum** 42
 Cauchyfolge 66
 Cauchy Kriterium für Integrierbarkeit 14
 Cavalieri
 —, Prinzip von — 47
 —, verallgemeinertes —sches Prinzip 51
 Charakterisierung
 — von messbaren Mengen 45
 — von Nullmengen 44
 charakteristische Funktion 12, 23, 35
- Dach** 121
 dehnungsbeschränkt 4, 46, 116
 Dichte 77
 Diffeomorphismus 84
 — der Klasse \mathcal{C}^1 57, 69
 — der Klasse \mathcal{C}^2 59
 Differentialform
 —, geschlossen, exakt 75
 — der Stufe n 73
 — der Stufe $n - 1$ 73
 differenzierbar
 —, Abbildung, auf beliebiger Menge 84
- Dimension
 — einer Mannigfaltigkeit 88
 — eines Stücks 85
 Divergenz 109
 Dreiecksungleichung
 — für die p -Norm 66
 — für Integrale vektorwertiger Funktionen 17
 — für Integrale von Funktionen 16
 Durchmesser 3
 Durchschnitt von messbaren Mengen 41
- Eindeutigkeit der Berandung** 123
 Eindeutigkeitssatz für orientierte Stücke 122
 exakt 75, 126
- fast disjunkt** 5, 9, 36, 87
 fast überall 36
 feiner als ϱ 10
 Fischer-Riesz
 —, Satz von — 67
 Fouriertransformation 54
 Fubini
 —, Satz von — für den \mathbf{R}^n 34
 —, Satz von — für Quader 19
 —, verbesserte Version für \mathbf{R}^n 39
 —, verbesserte Version für Quader 38
 Funktionaldeterminante 62
 — als infinitesimales Verzerrungsverhältnis 56
- Gammafunktion** 55
 Gaußscher Integralsatz 107
 —, in Divergenzform 109
 geschlossen
 —, Differentialform 75
 —, Sphäre 126
 —, Stück 125
 glatt 88
 — impliziert regulär 92
 glatter Randpunkt 101
 gleichmäßig stetig 4
 —, stetige Funktion auf kompakter Menge 4
 graduiert kommutativ 71
 Gramsche Determinante 78
- Heine-Borel** 110
 Henstock
 —, Lemma von — 27
 Hilbertraum 66, 68
 Höldersche Ungleichung 65
 Homothetie
 —, Verhalten des Integrals unter — 13, 33
 Hutfunktion 112
- Immersion** 85
 induzierte Orientierung 105

- Inhalt
 —, Additivität 8
 —, Berechnung als Randintegral 108
 — eines Quaders 5
 innerer Punkt 1
 inneres Produkt
 — von Differentialform und Vektorfeld 77
 Integral
 —, differenzierbare Abhängigkeit von Parametern 53
 —, Konsistenz der Definitionen 32
 —, stetige Abhängigkeit von Parametern 52
 —, vektorwertiger Funktionen 17
 — als Maß der Ordinatenmenge 23
 — als Netzlimes 11
 — einer n -Form über eine orientierte Menge 97
 — einer Dichte über ein Stück 90
 — einer Differentialform über ein orientiertes Stück 100
 — komplexwertiger Funktionen 17, 32
 — über \mathbf{R}^n , Definition 32
 — über messbare Mengen 49
 — über Quader, Definition 11
 — vektorwertiger Funktionen 32
 — von n -Dichten 82
 — von p -Dichten längs Abbildungen 82
 Integraldreiecksungleichung 33, 82
 Integralsatz
 — von Gauß 107
 — von Stokes 125
 integrierbar
 —, Absolutbetrag einer Funktion 16
 —, beschränkte offene oder kompakte Menge 43
 —, Funktion 11
 —, fast überall stetige Funktion 36
 —, lokal — 31
 —, Menge 23, 40
 —, Norm einer vektorwertigen Funktion 17
 —, Nullfortsetzung einer Funktion 26, 31
 —, Produkt von Funktionen 30, 32
 —, stetige Funktion 15, 31, 51
 —, Tensorprodukt von Funktionen 22, 35
 —, über Teilquader 24
 — über \mathbf{R}^n 31
- K**anonische Orientierung 95
 Kegelmantel 86, 120, 124
 Kodimension
 — einer Mannigfaltigkeit 88
 kompakt 3
 —, stetiges Bild einer —en Menge 4
 — Charakterisierung durch Überdeckungen 110
 Konsistenzsatz
 — für n -dimensionale Stücke 126
 — für das Integral über \mathbf{R}^n 32
 Konvergenzsätze 27, 29, 34
 —, verbesserte Version 37
- korrekt orientiert 106
 Kugel 1
 —, Volumen 48, 63
- L**agrangesche Identität 79
 Lebesgue
 —, Satz von — 29
 Lebesgue, H. 11
 \mathcal{L}^1 11
 Levi
 —, Satz von B. Levi 27
 Limes
 — von Riemannschen Summen 11
 Lindelöf 45
 linear
 —, Integral als lineare Abbildung 12, 33
 Linienelement 78
 —, in Polarkoordinaten 81
 Lipschitzbedingung *Siehe* dehnungsbeschränkt
 \mathcal{L}^p 63
 L^p 65
- M**ajorantenkriterium 32
 majorisierte Konvergenz
 —, Satz von der — 29, 34
 Mannigfaltigkeit 88
 Maß 23, 40
 —, p -dimensionales Maß eines Stücks 90
 messbar 40
 —, Bild einer messbaren Menge 46
 —, nicht messbare Menge 42
 —, offene, abgeschlossene Menge 43
 monotone Konvergenz
 —, Satz von der — 27, 34
 —, verbesserter Satz von der — 37
 Monotonie
 — des Integrals 13, 33
 — des Maßes 40
- N**egativer Anteil 17, 78
 Netz 11
 nichtsingulär 92
 — impliziert geschlossen 126
 Normalform
 — einer Orientierung 96
 — von n -Dichten 80
 — von Differentialformen 73
 Nullmenge 35, 36, 40
 —, p -dimensionale 115
 —, Bild einer — 46
 —, überabzählbare — in \mathbf{R} 42
- O**berfläche 83
 Oberflächenelement 79
 —, in Polarkoordinaten 81
 offen 1
 offener Kern 1
 Ordinatenmenge 23, 50
 orientierte Menge 97
 orientierter Rand 105

Orientierung 94–96
 —, kanonische 95
 — einer Mannigfaltigkeit 99
 — eines Stücks 99
 Orientierungsfeld 96

Parameterabhängiges Integral 52–55

Parameterbereich 85
 Parameterwechsel 89
 Parametrisierung 85
 Partition der Eins 113, 115, 123
 Polarkoordinaten
 — im \mathbf{R}^2 60
 — im \mathbf{R}^3 61
 — im \mathbf{R}^n 61, 76
 positiver Anteil 17, 78
 Pyramide 48
 p -Form 70
 p -integrierbar 63
 p -Norm 64, 65

Quader 4

—, Inhalt 5
 quadratintegrierbar 63

Rand

—, analytischer 119
 —, topologischer 1
 —, topologischer = analytischer 126
 — eines Quaders 87
 Randintegral 106
 Randorientierung 105
 Randpunkt
 —, glatter 101
 Raumwinkelform 74, 126
 regulärer Punkt 91
 regulärer Teil 91
 Regularitätsbereich 85, 87
 Riemannsche Summe 10
 —, Limes von — 11

Schachtelungsprinzip 3, 10, 58

Scherung 56
 Schnittmenge
 —, horizontale 47
 —, vertikale 47
 Seminorm 31, 65, 66
 Sesquilinearform 66
 singulärer Teil 91, 123
 Skalarprodukt 66
 Sphäre 86, 126
 —, Oberfläche 91
 sphärische Koordinaten 91
 Standardorientierung
 — der Sphäre 100, 105, 106
 — des \mathbf{R}^n 96
 Stokes
 —, Satz von — 125
 Stokesformel 118, 125

Stück

—, 0-dimensionales 85
 —, n -dimensionales 86
 —, p -dimensionales 85
 —, Vereinigung von —en 87
 stückweise glatt 85
 stückweise glatt berandet 101, 126
 Stützstelle 9
 Submersion 85
 summierbar 31

Tangentialraum 88

Tensorprodukt 22, 35
 Testform 119, 127
 Testfunktion 119
 Tietze
 —, Fortsetzungssatz von — 51
 Topffunktion 116
 Träger 110, 111
 Transformationsformel
 —, Variante der — 60
 — für C^1 -Diffeomorphismen 69
 — für C^2 -Diffeomorphismen 59
 — für Dichten 82
 — für Differentialformen 99
 Transformationssatz
 — für messbare Mengen 57
 Translationsinvarianz 13, 33
 Treppenfunktion 68

Überdeckung

—, abzählbare Teil— 45
 —, endliche Teil— 110
 Überdeckungssatz 110
 Umgebung 1
 Unterteilung 5
 —, angepasste 7
 —, Erweiterung fast disjunkter Teilquader zu
 — 9
 —, nicht ausgeartete 6
 —, Produkt von —en 6
 —, Zusammensetzung von —en 6
 unwesentlich 36

Vereinigung

— von messbaren Mengen 41
 verträglich 14
 Vitalische Menge 42
 vollständig 66
 —, $\mathcal{L}^p(M)$ 67
 —, $L^p(M)$ 68
 Volumen
 — der Vollkugel 48, 63
 Volumenelement 79

Vorzeichenzuordnung 94

Würfel 1

Zerlegung 9

—, Existenz ϱ -feiner — 10

—, partielle 26–28

—, verträgliche —en 14

—, Zusammensetzung von —en 10

Zurückholen

— des Oberflächenelements 81

— von n -Dichten 81

— von Dichten 80

— von Differentialformen 75

— von Orientierungen 97

Zylinderkoordinaten 61

Zylindermantel 86, 119