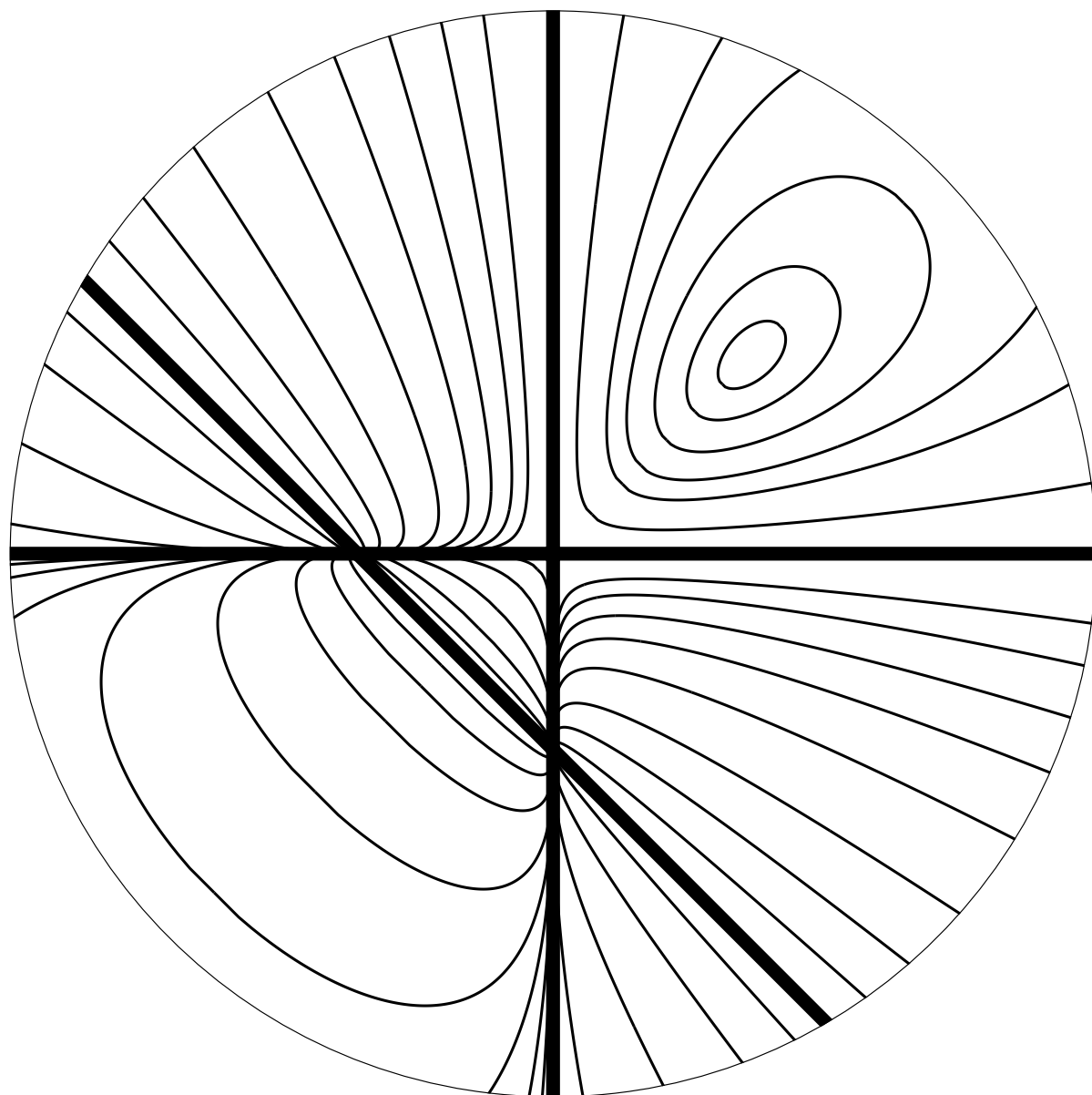


OTTMAR LOOS

ANALYSIS II



Institut für Mathematik
Universität Innsbruck

1997

Vorwort

Dieses Skriptum entstand während einer im Sommersemester 1997 gehaltenen 4-stündigen Vorlesung Analysis II, des zweiten Teils des viersemestrigen Analysis-Zyklus. Sie baut auf der Vorlesung Analysis I auf. Diese behandelte die Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Variablen und entsprach im Inhalt wie in der Darstellung ziemlich genau dem Buch *Analysis I* von O. Forster. Eine Ausnahme bildete die Integrationstheorie, bei der ich der von J. Kurzweil und E.J. McShane stammenden Idee gefolgt bin, das Lebesgue-Integral mit Hilfe von Riemannschen Summen einzuführen. Auf diese Weise entfällt die sonst übliche Zweiteilung in Riemann- und Lebesgue-Integral, man arbeitet von Anfang an mit der „richtigen“ Definition für das Lebesgue-Integral. Die weiterführende Theorie (Konvergenzsätze, Vollständigkeit der L^p -Räume usw.) folgt natürlich erst in der Analysis III. Aus diesem Grund habe ich den theoretischen Teil der Integrationstheorie einer Variablen, bis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, diesem Skriptum als Anhang beigelegt.

Die Vorlesung enthält eine Einführung in die Differentialrechnung mehrerer Variablen und die Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen. Als Unterschiede zu den Standard-Lehrbüchern (etwa O. Forster, *Analysis II*) möchte ich hervorheben:

Verwendung des (Bourbakischen) Begriffes „strikt differenzierbar“ als der natürlichen Voraussetzung für den Umkehrsatz, Betonung des Differentials statt des Gradienten, frühzeitige Einführung von Differentialformen 1. Stufe als der natürlichen Integranden für Kurvenintegrale, der äusseren Ableitung und vorher natürlich der Differentialformen 2. Stufe. Auch auf die Veranschaulichung von Differentialformen, ähnlich wie im Buch *Differential- und Integralrechnung III* von H. Grauert und I. Lieb, wird eingegangen, ebenso wie auf die physikalische Interpretation. Mit diesen Mitteln lässt sich dann (in §10) der Fundamentalsatz der Algebra ohne grossen Aufwand beweisen.

Bei den Differentialgleichungen habe ich nach einem einführenden Paragraphen, in dem auch, als weitere Anwendungen der Differentialformen, Pfaffsche Gleichungen behandelt werden, die Theorie vom Speziellen zum Allgemeinen hin entwickelt: Erst lineare Gleichungen mit konstanten, dann mit variablen Koeffizienten, und erst danach die allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitsätze. Das hat nicht nur pädagogische Gründe, sondern dient auch dazu, den Satz über die Variationsgleichung und die differenzierbare Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen vorzubereiten. Letzterer ist wesentlich für die Anwendungen in der Differentialgeometrie. Schliesslich werden auch globale Sätze über den Fluss eines Vektorfeldes bewiesen.

Der Inhalt des Skriptums deckt sich weitgehend mit dem der Vorlesung, mit Ausnahme einiger Umstellungen und der Verwendung des Begriffes „kompakt“, der in der Vorlesung sträflich vernachlässigt wurde. Im Skriptum wird er gleich zu Anfang als folgenkompakt eingeführt, was für die Zwecke der Vorlesung vollkommen ausreicht. Überhaupt wurden die verwendeten topologischen Begriffe auf ein Minimum reduziert.

Abschliessend möchte ich Herrn Dr. R. Munk für eine Reihe von wertvollen Bemerkungen und Verbesserungen, besonders bei der Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen, herzlich danken.

Die 2. Auflage unterscheidet sich von der ersten nur durch die Korrektur einiger Druckfehler.

Inhaltsverzeichnis

1.	Topologische Begriffe im \mathbf{R}^n	1
2.	Normierte Vektorräume	4
3.	Kurven im \mathbf{R}^n	10
4.	Differentiation	13
5.	Differentiale und Differentiationsregeln	21
6.	Höhere Ableitungen, Taylorformel, Extrema	27
7.	Der Umkehrsatz	31
8.	Implizite Funktionen, Lagrangesche Multiplikatoren	35
9.	Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale	39
10.	Differentialformen zweiter Stufe	46
11.	Differentialgleichungen: Definitionen, Beispiele und elementare Lösungsmethoden	55
12.	Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten	67
13.	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	74
14.	Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten	79
15.	Allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsätze	85
16.	Der Fluss eines Vektorfeldes	91
Anhang		
A.	Das bestimmte Integral	100
B.	Integration und Differentiation	107
Bezeichnungen und Konventionen		114
Namen- und Sachverzeichnis		115

§1. Topologische Begriffe im \mathbf{R}^n

1.1. Konvergenz und Stetigkeit. Eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbf{N}}$ im \mathbf{R}^n heisst *konvergent* gegen einen Punkt $a \in \mathbf{R}^n$, wenn die n Komponentenfolgen $(a_k^i)_{k \in \mathbf{N}}$ im gewöhnlichen Sinne gegen die i -te Komponente a^i von a konvergieren. Wir schreiben hier, zumindest für theoretische Zwecke, die Koordinaten a^i eines Punktes $a \in \mathbf{R}^n$ als obere Indizes, um die untere Position für die Numerierung der Folgenglieder frei zu haben. Hiermit können nun *Limites von Funktionen* in der üblichen Weise definiert werden: Ist $D \subset \mathbf{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine Funktion, dann gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ definitionsgemäss genau dann, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = b$ für alle Folgen $a_k \in D$ mit $\lim a_k = a$.

Die *Stetigkeit* ist wie üblich ein Spezialfall davon: f heisst im $a \in D$ stetig, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, und stetig in D oder stetig schlechthin, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist.

Beispiele. (a) Nach Definition ist klar, dass die n *Koordinatenfunktionen*

$$x^i : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \quad x^i(p) = p^i \quad \text{für } p = (p^1, \dots, p^n)$$

stetig sind.

(b) Die Zusammensetzung stetiger Funktionen ist stetig: Beweis wie im Fall einer Variablen.

(c) Die elementaren Rechenregeln für Limites besagen insbesondere, dass die Addition $+: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ und die Multiplikation $\cdot: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ stetig sind, ebenso die Quotientenbildung $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbf{R}$.

(d) Damit bekommt man schon einen grossen Vorrat von stetigen Funktionen, etwa Polynome und rationale Funktionen in x^1, \dots, x^n und alles, was sich aus den elementaren Funktionen und den Koordinatenfunktionen aufbauen lässt. Bezeichnen wir zur leichteren Schreibweise die Koordinatenfunktionen im \mathbf{R}^3 mit $x = x^1, y = x^2, z = x^3$, so sind also etwa die folgenden Funktionen stetig, wo sie definiert sind:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \sin(xy) \exp(z) + 2x^5 y, \quad \log(1 + xz), \quad \dots$$

(e) Eine vektorwertige Funktion $f = (f^1, \dots, f^m)$ ist genau dann stetig, wenn dies für jede Komponentenfunktion f^j der Fall ist. Das folgt unmittelbar aus der Definition. Jede lineare Abbildung $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ ist stetig, denn hier sind die f^j die Linearformen

$$f^j = \sum_{i=1}^n \alpha_i^j x^i,$$

also homogene Polynome vom Grad 1, wobei (α_i^j) gerade die Matrix von f bezüglich der Standardbasen ist.

1.2. Abgeschlossene Mengen, innere Punkte und offene Mengen. Eine Teilmenge $A \subset \mathbf{R}^n$ heisst *abgeschlossen*, wenn sie unter Limesbildung abgeschlossen ist, genauer: Für jede konvergente Folge (a_k) mit $a_k \in A$ ist auch $a = \lim a_k \in A$. Ein Punkt a einer Menge X heisst ein *innerer Punkt*, falls er „von aussen nicht erreichbar ist“, genauer: wenn es keine Folge (a_k) mit $a_k \notin X$ gibt, sodass $a = \lim a_k$. Eine Menge U heisst *Umgebung* eines Punktes a , wenn a ein innerer Punkt von U ist. Aus diesen Definitionen folgt sofort, dass für eine Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ folgende Aussagen gleichbedeutend sind:

- (i) jeder Punkt von U ist innerer Punkt;
- (ii) U ist Umgebung jedes seiner Punkte;
- (iii) das Komplement $\mathbf{R}^n \setminus U$ ist abgeschlossen.

Man nennt eine Menge U mit den Eigenschaften (i)–(iii) *offen*. Die Eigenschaften „offen“ und „abgeschlossen“ vertauschen sich also beim Übergang zur Komplementärmenge, sind aber nicht die logischen Negationen voneinander. Es gibt Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, und die meisten Mengen sind weder offen noch abgeschlossen.

Praktisch konstruiert man abgeschlossene bzw. offene Mengen oft mit Hilfe des folgenden Satzes.

1.3. Satz. Sei $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion und $c \in \mathbf{R}$. Dann ist die Menge

$$A = f^{-1}(c) = \{x : f(x) = c\} \quad (1)$$

abgeschlossen, und die Menge

$$U = \{x : f(x) \neq c\} \quad (2)$$

offen. Analoges gilt, wenn man in (1) die Bedingung $f(x) = c$ durch $f(x) \geq c$ oder $f(x) \leq c$ ersetzt, und in (2) die Bedingung $f(x) \neq c$ durch $f(x) > c$ oder $f(x) < c$.

Beweis. Seien $a_k \in A$ und $\lim a_k = a$. Dann ist $f(a) = \lim f(a_k) = \lim c = c$ wegen der Stetigkeit von f , also gilt $a \in A$. Somit ist A abgeschlossen. Nach Definition ist U das Komplement von A , also offen. Der Beweis der anderen Fälle ist ähnlich.

1.4. Satz. (a) Die Vereinigung von endlich vielen und der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist wieder abgeschlossen.

(b) Der Durchschnitt von endlich vielen und die Vereinigung von beliebig vielen offenen Mengen ist wieder offen.

Beweis. (a) Durch Induktion genügt es zu zeigen, dass die Vereinigung von zwei abgeschlossenen Mengen, etwa A und B , wieder abgeschlossen ist. Sei also (a_k) eine Folge in $A \cup B$ und sei $\lim a_k = a$. Sei $I = \{k \in \mathbf{N} : a_k \in A\}$ und $J = \{k \in \mathbf{N} : a_k \in B\}$. Dann ist $I \cup J = \mathbf{N}$, also ist I oder J unendlich, und eventuell nach Vertauschen von A und B können wir I als unendlich annehmen. Sei etwa $I = \{k_1, k_2, \dots\}$ mit $k_1 < k_2 < \dots$. Dann ist die Folge (a_{k_i}) eine Folge in A mit demselben Limes a wie die ursprüngliche Folge, also ist $a \in A \subset A \cup B$ wegen der Abgeschlossenheit von A . Die Behauptung über den Durchschnitt folgt unmittelbar aus der Definition.

(b) Dies folgt aus (a) durch Übergang zum Komplement.

1.5. Beschränkte Mengen. Eine Menge $B \subset \mathbf{R}^n$ heisst *beschränkt*, falls alle ihre Projektionen $x^i(B)$ auf die Koordinatenachsen beschränkte Teilmengen von \mathbf{R} sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn es eine Zahl $M > 0$ gibt, sodass

$$|b^i| < M \quad \text{für alle } b \in B \text{ und alle } i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Eine Folge (b_k) im \mathbf{R}^n heisst beschränkt, wenn die Menge $\{b_k : k \in \mathbf{N}\}$ beschränkt ist, mit anderen Worten: wenn alle Komponentenfolgen $(b_k^i)_{k \in \mathbf{N}}$ beschränkt sind. Wie im \mathbf{R}^1 gilt dann der



Satz von Bolzano-Weierstrass im \mathbf{R}^n . Jede beschränkte Folge im \mathbf{R}^n besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis. Durch Induktion nach n . Für $n = 1$ ist das der bekannte Satz von Bolzano-Weierstrass. Nun sei der Satz für n schon bewiesen, und sei (a_k) eine beschränkte Folge im $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$. Wir setzen entsprechend $a_k = (b_k, c_k)$, wobei (b_k) und (c_k) beschränkte Folgen im \mathbf{R}^n bzw. in \mathbf{R} sind. Nach Induktionsannahme hat die Folge (b_k) eine konvergente Teilfolge (b_{k_v}) , und die Folge (c_{k_v}) hat eine konvergente Teilfolge $(c_{k_{v_j}})$. Dann ist $(a_{k_{v_j}})$ eine konvergente Teilfolge von (a_k) .

1.6. Kompakte Mengen. Eine Teilmenge K des \mathbf{R}^n heisst *kompakt*, wenn sie folgende Eigenschaft hat:

- (K) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Limes wieder in K liegt.

Diese Mengen lassen sich folgendermassen beschreiben:

Charakterisierung kompakter Mengen im \mathbf{R}^n . Eine Teilmenge $K \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis. Sei K kompakt. Wäre K nicht beschränkt, dann gäbe es nach 1.5.1 für jedes $k \in \mathbf{N}$ ein $b_k \in K$ und eine Koordinate $i_k \in \{1, \dots, n\}$, sodass $|b_k^{i_k}| \geq k$. Weil die Menge $\{1, \dots, n\}$ der möglichen Koordinaten endlich ist, muss für eine der Koordinaten, etwa j , die Zahlenfolge $(b_k^j)_{k \in \mathbf{N}}$ unbeschränkt sein und kann somit keine konvergente Teilfolge besitzen. Damit kann auch die Folge (b_k) keine konvergente Teilfolge haben, im Widerspruch zur Kompaktheit. Also ist K beschränkt. Zum Beweis der Abgeschlossenheit sei (a_k) eine Folge in K , die gegen $a \in \mathbf{R}^n$ konvergiere. Wegen der Kompaktheit von K besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge $b_v = a_{k_v}$ mit $\lim b_v = b \in K$. Da aber jede Teilfolge einer konvergenten Folge gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Folge konvergiert, folgt $a = b \in K$. Also ist K abgeschlossen.

Umgekehrt sei K beschränkt und abgeschlossen, und sei (b_k) eine Folge in K . Dann ist diese Folge beschränkt (weil K es ist). Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass im \mathbf{R}^n hat sie also eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder in K liegt, weil K abgeschlossen ist.

1.7. Bemerkung. Auf Grund dieses Satzes fragt man sich natürlich, warum es sinnvoll ist, kompakte Mengen überhaupt eigens zu definieren, wenn es sich doch nur um die beschränkten und abgeschlossenen Mengen handelt. Hierfür gibt es eine Reihe von guten Gründen, wir führen drei davon an. Der erste ist ziemlich banal: Die Kombination „beschränkt und abgeschlossen“ kommt so oft vor, dass es sich lohnt, eine kurze Bezeichnung dafür zu haben. Zweitens verwenden viele Beweise, in denen kompakte Mengen vorkommen, genau die Eigenschaft (K), während die Beschränktheit und Abgeschlossenheit sekundär ist. Also ist es natürlich, eben diese charakteristische Eigenschaft als Definition zu nehmen. Ein Beispiel dafür ist der untenstehende Satz 1.8. Schliesslich gilt, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, die obige Charakterisierung kompakter Mengen in unendlichdimensionalen Vektorräumen nicht mehr. Dort kann es beschränkte und abgeschlossene Mengen geben, die nicht kompakt sind. Also ist dann wirklich „kompakt“ ein eigener (und sehr wichtiger) Begriff.

* Der in 1.6 definierte Begriff „kompakt“ heisst genauer „folgenkompakt“ und ist in normierten Vektorräumen (siehe den nächsten Paragraphen) und allgemeiner metrischen Räumen ausrei-

chend. In beliebigen topologischen Räumen wird Kompaktheit mit Hilfe der sogenannten Heine-Borelschen Überdeckungseigenschaft definiert (jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung). Für Details siehe Lehrbücher der Topologie. *

1.8. Satz über die Extrema stetiger Funktionen auf kompakten Mengen. Sei $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann ist f auf K beschränkt und nimmt sein Maximum und Minimum an.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass f auf K beschränkt ist, d.h., dass die Menge $f(K) \subset \mathbf{R}$ beschränkt ist. Wäre das nicht der Fall, dann gäbe es eine Folge $a_k \in K$ mit

$$|f(a_k)| \geq k, \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N}. \quad (1)$$

Wegen der Kompaktheit von K gibt es eine konvergente Teilfolge (a_{k_v}) , deren Limes, etwa a , wieder in K liegt. Weil f im Punkt a stetig ist, gilt $f(a) = \lim_{v \rightarrow \infty} f(a_{k_v})$, im Widerspruch zu (1).

Nun sei $s = \sup f(K)$. Nach bekannten Eigenschaften des Supremums gibt es eine Folge $s_k \in f(K)$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$, und es gilt $s_k = f(b_k)$ für geeignete $b_k \in K$. Wieder wegen der Kompaktheit von K gibt es eine konvergente Teilfolge (b_{k_v}) mit $\lim_{v \rightarrow \infty} b_{k_v} = b \in K$. Daher folgt wegen der Stetigkeit von f in b , dass $s = \lim_{v \rightarrow \infty} f(b_{k_v}) = f(b)$. Der Beweis für das Minimum ist analog.

1.9. Topologische Begriffe im \mathbf{C}^n . Die meisten Definitionen und Ergebnisse dieses Paragraphen gelten mit naheliegenden Änderungen im \mathbf{C}^n genauso wie im \mathbf{R}^n , weil sie auf den entsprechenden Aussagen über komplexe Folgen beruhen. Eine Ausnahme ist lediglich Satz 1.8. Hier gilt die Beschränktheit von f zwar auch für komplexwertiges f , aber die Existenz des Minimums und Maximums nur für reelles f , weil Ordnungsrelationen zwischen komplexen Zahlen nicht sinnvoll sind.

§2. Normierte Vektorräume

2.1. Normen. Um auch im \mathbf{R}^n wie im \mathbf{R}^1 die ε - δ -Definition der Stetigkeit und dergleichen verwenden zu können, braucht man einen Ersatz für den Absolutbetrag. Als solcher kann etwa dienen

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |a^i|^2}, \quad |a|_\infty := \max\{|a^1|, \dots, |a^n|\}, \quad |a|_1 := \sum_{i=1}^n |a^i|, \quad (1)$$

genannt die Euklidische Norm bzw. die Maximum-Norm bzw. die 1-Norm, aber es gibt auch viele andere Möglichkeiten. Jedenfalls gibt es keinen ausgezeichneten Absolutbetrag wie im \mathbf{R}^1 .

Weiter ist es oft wünschenswert, den \mathbf{R}^n durch einen beliebigen Vektorraum zu ersetzen. Das zeigt sich schon, wenn man den Vektorraum der linearen Abbildungen $\text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ betrachtet. Zunächst einmal ist das nur ein Vektorraum, der zwar unter Benützung der Standardbasen kanonisch isomorph zum Raum der $m \times n$ -Matrizen ist, aber eben nicht kanonisch isomorph zum \mathbf{R}^{mn} . Schliesslich ist es oft praktisch, auch komplexe Vektorräume zuzulassen.

Wir definieren daher: Sei \mathbf{V} ein beliebiger (möglicherweise auch unendlichdimensionaler) Vektorraum über $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder \mathbf{C} . Eine Norm auf \mathbf{V} ist eine Funktion $|\cdot|: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}_+$, sodass für alle $a, b \in \mathbf{V}$ und $\lambda \in \mathbf{K}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt

sind:

$$|a| = 0 \iff a = 0, \quad (2)$$

$$|\lambda a| = |\lambda| |a|, \quad (3)$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

Ein *normierter Vektorraum* ist ein Paar $(\mathbf{V}, |\cdot|)$ bestehend aus einem Vektorraum \mathbf{V} und einer Norm auf \mathbf{V} . Oft lässt man die explizite Angabe der Norm weg, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Norm gemeint ist.

Sei $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbf{V} . Mit denselben Schlüssen wie beim gewöhnlichen Absolutbetrag folgt aus der Dreiecksungleichung (4) die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad (5)$$

Zwei Normen $|\cdot|$ und $|\cdot|'$ heißen *äquivalent*, wenn es positive Konstanten C_1 und C_2 gibt, sodass

$$C_1 |a|' \leq |a| \leq C_2 |a|', \quad (6)$$

für alle $a \in \mathbf{V}$. Man überlegt sich leicht, dass das eine Äquivalenzrelation ist.

2.2. Beispiele. (i) Die in 2.1.1 definierten Normen sind tatsächlich Normen auf \mathbf{K}^n , wie man leicht nachrechnen kann. Sie sind auch äquivalent; denn es gilt

$$|a|_\infty \leq \|a\| \leq \sqrt{n} |a|_\infty \quad \text{und} \quad |a|_\infty \leq |a|_1 \leq n |a|_\infty.$$

(ii) Sei $\mathbf{V} = \mathbf{K}^{(\infty)}$ der Vektorraum aller Folgen (a^1, a^2, \dots) mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Elementen. Dieser Vektorraum ist unendlichdimensional, mit Basis e_1, e_2, \dots , wobei e_i die Folge ist, die an der i -ten Stelle eine Eins hat und sonst aus Nullen besteht. Weil die Elemente von \mathbf{V} abbrechende Folgen sind, kann man analog zu 2.1.1 Normen auf \mathbf{V} durch

$$\|a\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |a^i|^2}, \quad |a|_\infty := \max\{|a^1|, |a^2|, \dots\}, \quad |a|_1 := \sum_{i=1}^{\infty} |a^i|,$$

definieren. Diese Normen sind jetzt aber nicht mehr äquivalent: Es gibt zum Beispiel keine Konstante $C_2 > 0$ mit $\|a\| \leq C_2 |a|_\infty$ für alle a , denn für die Vektoren $a_n = e_1 + \dots + e_n$ gilt $|a_n|_\infty = 1$ aber $\|a_n\| = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

2.3. Satz. *Je zwei Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum \mathbf{V} sind äquivalent.*

Beweis. Nach Wahl einer Basis können wir $\mathbf{V} = \mathbf{K}^n$ annehmen. Es genügt offenbar, eine beliebige Norm $|\cdot|$ mit einer festen, etwa der Maximumnorm, zu vergleichen. Daher kann man in 2.1.6 $|\cdot|' = |\cdot|_\infty$ annehmen. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbf{K}^n . Wegen der Eigenschaften 2.1.3 und 2.1.4 einer Norm gilt

$$|a| = \left| \sum_{i=1}^n e_i a^i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a^i| |e_i| \leq |a|_\infty \sum_{i=1}^n |e_i|,$$

also besteht die zweite Ungleichung mit $C_2 := \sum_{i=1}^n |e_i|$. Hieraus folgt zunächst die Stetigkeit der Funktion $f(x) = |x|$ auf ganz \mathbf{K}^n . Denn sei eine Folge (a_k) gegen a

konvergent. Aus der Definition folgt leicht, dass das zu $|a_k - a|_\infty \rightarrow 0$ äquivalent ist. Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung 2.1.5 gilt nun

$$|f(a_k) - f(a)| = \left| |a_k| - |a| \right| \leq |a_k - a| \leq C_2 |a_k - a|_\infty,$$

also $\lim f(a_k) = f(a)$.

Nun sei

$$E := \{u \in \mathbf{K}^n : |u|_\infty = 1\}.$$

Klarerweise ist E beschränkt, und abgeschlossen ist es nach Satz 1.3, weil nach dem eben gezeigten die Funktion $x \mapsto |x|_\infty$ stetig ist. Also ist E nach 1.6 kompakt, und nach Satz 1.8 existiert das Minimum C_1 der stetigen Funktion f auf E und es wird angenommen. Daraus folgt aber $C_1 > 0$; denn sonst gäbe es ein $u \in E$ mit $0 = C_1 = f(u) = |u|$ und folglich $u = 0$ nach 2.1.2, im Widerspruch zu $|u|_\infty = 1$. Ein beliebiges $a \in \mathbf{K}^n$ kann man stets in der Form $a = |a|_\infty \cdot u$ mit $|u|_\infty = 1$ schreiben. Nach 2.1.3 folgt dann

$$|a| = \left| |a|_\infty \cdot u \right| = |a|_\infty \cdot |u| \geq C_1 |a|_\infty$$

und der Satz ist bewiesen.

Im Beweis haben wir erhalten:

2.4. Korollar. *Jede Norm auf \mathbf{K}^n ist eine stetige Funktion.*

2.5. Charakterisierung von Limites mit Hilfe von Normen. Sei $|\cdot|$ eine Norm auf dem \mathbf{K}^n . Wie im obigen Beweis bereits bemerkt, ist $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$ äquivalent zu $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - a|_\infty = 0$, und wegen Satz 2.3 damit auch zu $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k - a| = 0$. Nach Definition der Konvergenz der Zahlenfolge $(|a_k - a|)_{k \in \mathbf{N}}$ ergibt sich:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \iff \begin{array}{l} \text{zu jedem } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } k_0, \\ \text{sodass } |a_k - a| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq k_0. \end{array} \quad (1)$$

Unter Verwendung einer Norm überträgt sich also die übliche Definition der Konvergenz von Zahlenfolgen auf Vektorfolgen, man braucht nur die Betragsstriche als Norm zu interpretieren.

Analog lässt sich die Konvergenz von Funktionen (und damit als Spezialfall die Stetigkeit) charakterisieren:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \begin{array}{l} \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ sodass für alle} \\ x \in D \text{ mit } |x - a| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - b| < \varepsilon, \end{array} \quad (2)$$

wobei D der Definitionsbereich von f ist. Der Beweis verläuft wie im \mathbf{R}^1 oder \mathbf{C}^1 .

2.6. Kugeln und konvexe Mengen. Zur Charakterisierung weiterer Begriffe definieren wir erst: Die *offene Kugel* mit Mittelpunkt a und Radius $r > 0$ ist

$$B_r(a) = \{x : |x - a| < r\}. \quad (1)$$

Je nach verwendeter Norm braucht das keine „runde“ Kugel zu sein. Sie ist jedoch wegen Satz 1.3 wirklich offen; denn die Funktion $x \mapsto |x - a|$ ist nach dem Korollar zu Satz 2.3 stetig. Ähnlich ist die abgeschlossene Kugel

$$\overline{B_r(a)} = \{x : |x - a| \leq r\}$$

abgeschlossen. Ferner sind diese Kugeln konvex im Sinne folgender Definition: Eine Menge $X \subset \mathbf{R}^n$ heisst *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in X$ auch die ganze Verbindungsstrecke

$$[x, y] := \{x + t(y - x) : 0 \leq t \leq 1\}$$

in X liegt. Dass offene oder abgeschlossene Kugeln konvex sind, folgt sofort aus der Dreiecksungleichung: Ist $|x - a| < r$ und $|y - a| < r$, dann gilt auch

$$\begin{aligned} |x + t(y - x) - a| &= |(1 - t)(x - a) + t(y - a)| \\ &\leq (1 - t)|x - a| + t|y - a| < (1 - t)r + tr = r, \end{aligned}$$

und für abgeschlossene Kugeln ist der Beweis analog.

Die Beschränktheit einer Menge lässt sich sehr einfach wie im \mathbf{K}^1 mit Hilfe einer Norm beschreiben. Auf Grund der Definition in 1.5.1 und der Äquivalenz zur Maximumnorm ist klar, dass gilt:

$$B \text{ ist beschränkt} \iff \text{es gibt ein } r > 0 \text{ mit } B \subset B_r(0). \quad (2)$$

Es macht nichts aus, wenn man die offene durch die abgeschlossene Kugel ersetzt, denn $\overline{B_r(a)} \subset B_{r+1}(a)$. Insbesondere sind also abgeschlossene Kugeln im \mathbf{R}^n beschränkt und abgeschlossen und folglich nach 1.6 kompakt.

Schliesslich definieren wir noch die *Sphäre* mit Mittelpunkt a und Radius r als

$$S_r(a) = \{x : |x - a| = r\}.$$

Auch sie ist wieder kompakt, aber nicht mehr konvex.

2.7. Konvergenzkriterien im \mathbf{K}^n . Sei $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbf{K}^n . Für Folgen im \mathbf{K}^n gilt wie im \mathbf{K}^1 das *Cauchy-Kriterium*:

$$(a_k) \text{ ist konvergent} \iff \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es ein } k_0, \text{ sodass} \quad (1)$$

$$|a_k - a_l| < \varepsilon \text{ für alle } k \geq l \geq k_0.$$

Der Beweis von „ \implies “ verläuft wie im \mathbf{K}^1 . Für „ \impliedby “ verwendet man die Äquivalenz der Norm $|\cdot|$ und der Maximumnorm. Man hat also eine Abschätzung

$$|a_k^i - a_l^i| \leq |a_k - a_l|_\infty \leq C|a_k - a_l|$$

mit $C > 0$. Daher konvergieren alle Komponentenfolgen nach dem Cauchy-Kriterium in \mathbf{R} bzw. \mathbf{C} , und folglich ist (a_k) konvergent.

Schliesslich betrachten wir noch eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ von Vektoren im \mathbf{K}^n und zeigen, analog zur gewöhnlichen absoluten Konvergenz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent.} \quad (2)$$

Das ist eine formale Konsequenz aus dem Cauchy-Kriterium (1), denn für die Partialsummen $s_k = \sum_{j=0}^k a_j$ gilt nach der Dreiecksungleichung

$$|s_k - s_l| = \left| \sum_{j=l+1}^k a_j \right| \leq \sum_{j=l+1}^k |a_j|,$$

und das wird kleiner als ε für alle $k \geq l \geq k_0$ wegen der Konvergenz der Zahlenreihe $\sum |a_k|$.

2.8. Topologische Begriffe in normierten Vektorräumen. Es ist nun naheliegend, Konvergenz von Folgen, Limes und Stetigkeit von Funktionen und beschränkte Mengen in einem beliebigen normierten Vektorraum $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ dadurch zu erklären, dass man (1) und (2) von 2.5 als Definition dieser Begriffe nimmt. Abgeschlossene und offene Mengen werden wie in 1.2 mit Hilfe der Konvergenz von Folgen definiert, und kompakte Mengen wie in (K) von 1.6. Dann bleiben die Sätze 1.3, 1.4 und 1.8 mit denselben Beweisen gültig, wenn man dort überall \mathbf{R}^n durch \mathbf{V} ersetzt. Ferner ist, wie in 2.4, die Norm eine stetige Funktion, denn aus $\lim a_k = a$ folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung $||a_k| - |a|| \leq |a_k - a| \rightarrow 0$. Daher sind auch wieder die wie in 2.6.1 definierten offenen Kugeln wirklich offen.

Man muss sich jedoch darüber im Klaren sein, dass diese Begriffe wesentlich von der verwendeten Norm abhängen, falls \mathbf{V} unendlichdimensional ist. Als Beispiel betrachten wir wieder den Vektorraum $\mathbf{K}^{(\infty)}$ mit der Euklidischen und der Maximumnorm wie in 2.2(ii), und darin die Folge $a_k = e_1 + \dots + e_k$. Dann gilt $|a_k|_\infty = 1$ für alle k , während $\|a_k\| = \sqrt{k}$. Diese Folge ist also in der Maximumnorm beschränkt und in der Euklidischen unbeschränkt.

Ferner ist der Satz von Bolzano-Weierstrass in 1.5 und die Charakterisierung kompakter Mengen wie in 1.6 bei unendlicher Dimension nicht mehr richtig. Zum Beispiel hat die bezüglich der Maximumnorm beschränkte Folge (a_k) in $\mathbf{K}^{(\infty)}$ keine bezüglich der Maximumnorm konvergente Teilfolge. Ferner ist die abgeschlossene Einheitsphäre

$$S_1(0) = \{x \in \mathbf{K}^{(\infty)} : |x|_\infty = 1\}$$

wegen der Stetigkeit der Norm und Satz 1.3 wirklich abgeschlossen und trivialerweise beschränkt, aber nicht mehr kompakt, weil ja die Folge $a_k \in S_1(0)$ keine konvergente Teilfolge hat.

Schliesslich ist auch das Cauchysche Konvergenzkriterium und das daraus folgende Kriterium 2.7.2 in einem unendlichdimensionalen Vektorraum im Allgemeinen falsch. Als Beispiel betrachte man die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{k^2} = e_1 + \frac{e_2}{4} + \frac{e_3}{9} + \dots$$

Hier ist die Reihe der Normen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{e_k}{k^2} \right\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergent, aber die Reihe selbst konvergiert nicht in $\mathbf{K}^{(\infty)}$, weil ein Element von $\mathbf{K}^{(\infty)}$ nur endlich viele von Null verschiedene Komponenten haben kann.

Abschliessend sei gesagt, dass trotz dieser auf den ersten Blick abschreckenden Beispiele die Theorie unendlichdimensionaler normierter Vektorräume, die sogenannte Funktionalanalysis, sehr wichtig und weit entwickelt ist.

Innere Punkte und offene Mengen lassen sich mit Hilfe von Normen sehr bequem charakterisieren:

2.9. Satz. Sei \mathbf{V} ein normierter Vektorraum.

(a) Ein Punkt a ist genau dann ein innerer Punkt einer Menge $X \subset \mathbf{V}$, wenn es ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r(a) \subset X$.

(b) Eine Teilmenge U von \mathbf{V} ist genau dann offen, wenn es zu jedem $a \in U$ ein $r > 0$ gibt, sodass $B_r(a) \subset U$.

Beweis. (a) Sei a ein innerer Punkt von X . Gäbe es kein solches r , dann könnte man (indem man $r = \frac{1}{k}$ setzt), eine Folge $a_k \in B_{\frac{1}{k}}(a) \setminus X$ finden. Das wäre dann eine gegen a konvergente Folge im Komplement von X , und somit wäre a kein innerer Punkt von X . Umgekehrt sei $B_r(a) \subset X$ und sei (a_k) eine Folge im Komplement von X . Dann ist $|a_k - a| \geq r$ für alle k und folglich kann die Folge wegen 2.5.1 nicht gegen a konvergieren.


(b) Das folgt sofort aus (a) und der Definition einer offenen Menge.

Schliesslich zeigen wir die folgende Eigenschaft stetiger Abbildungen auf offenen Mengen:

2.10. Satz. *Seien \mathbf{V}_1 und \mathbf{V}_2 normierte Vektorräume und sei $U_1 \subset \mathbf{V}_1$ offen. Eine Abbildung $f: U_1 \rightarrow \mathbf{V}_2$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(U_2)$ jeder offenen Menge $U_2 \subset \mathbf{V}_2$ eine offene Menge in \mathbf{V}_1 ist.*

Beweis. Sei zunächst f stetig und $U_2 \subset \mathbf{V}_2$ offen. Ferner sei $a \in f^{-1}(U_2) = \{x \in U_1 : f(x) \in U_2\}$ und $b = f(a)$. Dann ist $b \in U_2$, und wegen der Offenheit von U_2 gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(b) \subset U_2$. Weil U_1 offen und f in a stetig ist, gibt es nach 2.9 und der ε - δ -Definition der Stetigkeit in 2.5.2 ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset U_1$ und $|f(x) - b| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - a| < \delta$. Das heisst aber gerade $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(b) \subset U_2$ und folglich $B_\delta(a) \subset f^{-1}(U_2)$.

Umgekehrt sei das Urbild jeder offenen Menge unter f offen und sei $a \in U_1$. Wir zeigen die Stetigkeit von f in a wieder mittels 2.5.2. Sei also $\varepsilon > 0$ gegeben und sei $b = f(a)$. Dann ist $B_\varepsilon(b)$ offen, also ist es auch $f^{-1}(B_\varepsilon(b))$, und es enthält a . Daher gibt es nach 2.9 ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(b))$, also $|f(x) - b| < \varepsilon$ für alle x mit $|x - a| < \delta$, was zu zeigen war.

Im Allgemeinen ist das *Bild* $f(U)$ einer offenen Menge unter einer stetigen Abbildung nicht offen, Beispiel: Für $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, ist $f(\mathbf{R}) = [0, \infty[$ nicht offen. 

2.11. Die Norm einer linearen Abbildung. Es bezeichne $|\cdot|$ jeweils eine Norm auf \mathbf{K}^n und auf \mathbf{K}^m , und sei $T: \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^m$ eine lineare Abbildung. Nach 2.6 ist die Einheitskugel $S_1(0)$ kompakt, und daher existiert wegen 1.8

$$|T| := \sup\{|T(u)| : |u| = 1\},$$

genannt die *Norm* von T . Wir beschränken uns hier absichtlich auf endlichdimensionale Vektorräume, weil im Fall unendlicher Dimension die Einheitskugel nicht mehr kompakt ist (siehe 2.8) und daher das Supremum nicht zu existieren braucht.

Der folgende Satz rechtfertigt die Bezeichnung Norm für $|T|$:

2.12. Satz. (a) *Die Abbildung $T \mapsto |T|$ ist eine Norm auf dem Vektorraum $\text{Hom}(\mathbf{K}^n, \mathbf{K}^m) \cong \text{Mat}_{m,n}(\mathbf{K}) \cong \mathbf{K}^{mn}$ aller linearen Abbildungen von \mathbf{K}^n nach \mathbf{K}^m , und es gilt*

$$|T(x)| \leq |T| \cdot |x| \tag{1}$$

für alle $x \in \mathbf{K}^n$.

(b) *Ist $S: \mathbf{K}^m \rightarrow \mathbf{K}^p$ eine weitere lineare Abbildung und ist auch der \mathbf{K}^p mit einer Norm versehen, dann gilt für die Zusammensetzung*

$$|S \circ T| \leq |S| \cdot |T|. \tag{2}$$

Beweis. (a) $|T| \geq 0$ ist klar. Für $x = 0$ gilt (1) trivialerweise. Ein $x \neq 0$ schreibe man als $x = |x|u$ mit $u = x/|x| \in S_1(0)$. Dann ist

$$|T(x)| = |T(|x|u)| = |x| \cdot |T(u)| \leq |T| \cdot |x|,$$

wegen der Linearität von T und 2.1.3. Nun zeigt (1) sofort, dass $|T| = 0$ nur für $T = 0$ möglich ist. Die Homogenität $|\lambda T| = |\lambda||T|$ ist leicht zu sehen. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien T_1 und T_2 lineare Abbildungen. Dann gilt für alle $u \in S_1(0)$:

$$|(T_1 + T_2)(u)| = |T_1(u) + T_2(u)| \leq |T_1(u)| + |T_2(u)| \leq |T_1| + |T_2|,$$

und durch Übergang zum Supremum folgt $|T_1 + T_2| \leq |T_1| + |T_2|$.

(b) Für alle $u \in S_1(0)$ ist $|(S \circ T)(u)| = |S(T(u))| \leq |S| \cdot |T(u)| \leq |S| \cdot |T|$. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung. Auch für bilineare Abbildungen $\beta : \mathbf{K}^m \times \mathbf{K}^n \rightarrow \mathbf{K}^p$ lässt sich eine Norm $|\beta|$ durch

$$|\beta| = \sup\{|\beta(u, v)| : |u| = 1, |v| = 1\}$$

definieren, und analog zu (1) gilt dann

$$|\beta(x, y)| \leq |\beta| \cdot |x| \cdot |y|.$$

Die Beweise seien dem Leser überlassen.

§3. Kurven im \mathbf{R}^n

3.1. Definition. Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve* ist eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^n$. Sie heisst *differenzierbar* bzw. *integrierbar*, wenn jede Komponentenfunktion $\gamma^j : I \rightarrow \mathbf{R}$ die entsprechende Eigenschaft hat. Meist verwendet man für den Kurvenparameter den Buchstaben t (oft als die Zeit interpretiert), und bezeichnet die Ableitung nach t mit einem Punkt. Dann ist die komponentenweise gebildete Ableitung

$$\frac{d\gamma}{dt} := \dot{\gamma} := (\dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n)$$

wieder eine Kurve und man nennt $\dot{\gamma}(t)$ den *Tangentialvektor* von γ an der Stelle t . Im Fall einer integrierbaren Kurve auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definieren wir das Integral ebenfalls komponentenweise:

$$\int_a^b \gamma(t) dt := \left(\int_a^b \gamma^1(t) dt, \dots, \int_a^b \gamma^n(t) dt \right).$$

Das ist dann offenbar ein Vektor im \mathbf{R}^n .

Einfache Beispiele von Kurven sind die *Gerade durch den Punkt a in Richtung v* , gegeben durch

$$\gamma(t) = a + tv,$$

oder der *Kreis mit Radius r und Mittelpunkt (a, b) im \mathbf{R}^2* , der durch

$$\gamma(t) = (a + r \cos t, b + r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

beschrieben wird.

Schliesslich lassen sich diese Begriffe für Kurven im \mathbf{C}^n ganz analog definieren. Als *Parameterbereich I einer reellen oder komplexen Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbf{K}^n$* verwenden wir jedoch immer ein reelles Intervall $I \subset \mathbf{R}$.

3.2. Satz (Integraldreiecksungleichung für Kurven). Sei $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall, sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{K}^n$ eine integrierbare Kurve und sei $|\cdot|$ eine beliebige Norm auf \mathbf{K}^n . Dann ist die Funktion $|\gamma| : t \mapsto |\gamma(t)|$ integrierbar, und es gilt die Integraldreiecksungleichung

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt. \quad (1)$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Integrierbarkeit von γ^j gibt es nach Lemma B.5 des Anhangs positive Funktionen ϱ_j auf $[a, b]$, sodass für je zwei Zerlegungen $Z_1, Z_2 \prec \varrho_j$ mit denselben Teilpunkten t_i und Stützstellen ξ_i bzw. η_i gilt:

$$\sum_i |\gamma^j(\xi_i) - \gamma^j(\eta_i)| \Delta t_i < \varepsilon.$$

Nach Satz 2.3 gibt es eine Konstante $C > 0$ mit $|x| \leq C |x|_1$ für alle $x \in \mathbf{K}^n$, wobei $|x|_1$ die 1-Norm wie in 2.1.1 sei. Wir setzen $\varrho = \min(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$. Dann gilt für alle Zerlegungen $Z_1, Z_2 \prec \varrho$:

$$\begin{aligned} |S_{Z_1}(|\gamma|) - S_{Z_2}(|\gamma|)| &= \left| \sum_i (|\gamma(\xi_i)| - |\gamma(\eta_i)|) \Delta t_i \right| \\ &\leq \sum_i \left| |\gamma(\xi_i)| - |\gamma(\eta_i)| \right| \Delta t_i \\ &\leq \sum_i |\gamma(\xi_i) - \gamma(\eta_i)| \Delta t_i \\ &\leq C \cdot \sum_i |\gamma(\xi_i) - \gamma(\eta_i)|_1 \Delta t_i \\ &= C \cdot \sum_{i,j} |\gamma^j(\xi_i) - \gamma^j(\eta_i)| \Delta t_i \\ &< Cn\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $|\gamma|$ nach dem Cauchy-Kriterium B.1 integrierbar. Die Dreiecksungleichung für die Norm $|\cdot|$ impliziert $|S_Z(\gamma)| \leq S_Z(|\gamma|)$. Nun folgt (1) durch Grenzübergang (siehe auch den Beweis von B.6 im Anhang).

Bemerkung. Für den Fall der 1-Norm ist dieser Satz eine triviale Folgerung aus B.6 des Anhangs, denn $|\gamma|_1 = \sum |\gamma^j|$ ist nach diesem Satz integrierbar, und

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \gamma(t) dt \right|_1 &= \sum_{j=1}^n \left| \int_a^b \gamma^j(t) dt \right| \leq \sum_{j=1}^n \int_a^b |\gamma^j(t)| dt \\ &= \int_a^b \sum_{j=1}^n |\gamma^j(t)| dt = \int_a^b |\gamma(t)|_1 dt. \end{aligned}$$

3.3. Parameterwechsel, Zusammensetzung, Bogenlänge. Sei $[a, b] \subset \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ heisst *stückweise glatt*, wenn sie stetig und stückweise stetig differenzierbar ist. Anschaulich bedeutet das, dass γ endlich viele Knickpunkte haben, aber keine Sprünge machen darf.

Sei $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar, bijektiv, und sei $\varphi'(s) \neq 0$ für alle $s \in [c, d]$. Dann ist auch $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine stückweise glatte Kurve, und man sagt, $\tilde{\gamma}$ gehe aus γ durch den *Parameterwechsel* oder die *Umparametrisierung* φ hervor. Falls $\varphi'(s) > 0$ für alle $s \in [c, d]$, so gilt $\varphi(c) = a$ und $\varphi(d) = b$, während im Fall $\varphi'(s) < 0$ für alle $s \in [c, d]$ die Funktion φ streng monoton fallend ist und folglich $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$ ist. Im ersten Fall heisst φ *orientierungserhaltend*, andernfalls *orientierungsumkehrend*. Zum Beispiel ist $\varphi : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $\varphi(s) = a + b - s$ ein orientierungsumkehrender Parameterwechsel, und $s \mapsto \gamma(a + b - s)$ heisst auch die *umgekehrt durchlaufene Kurve*.

Wir definieren die *Zusammensetzung* von zwei Kurven folgendermassen: Seien $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ und $\beta : [b, c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ stückweise \mathcal{C}^1 mit $\alpha(b) = \beta(b)$. Dann sei $\alpha \bullet \beta : [a, c] \rightarrow \mathbf{R}^n$ durch

$$(\alpha \bullet \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } a \leq t \leq b, \\ \beta(t) & \text{für } b \leq t \leq c \end{cases}$$

definiert. Klarerweise ist $\alpha \bullet \beta$ wieder stückweise glatt, wenn α und β es waren.

Die *Bogenlänge* einer stückweise glatten Kurve γ ist definiert als

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt. \quad (1)$$

Wegen der Stetigkeit der Norm und der stückweisen Stetigkeit von $\dot{\gamma}$ ist die Funktion $|\dot{\gamma}|$ stückweise stetig und somit integrierbar.

3.4. Satz. *Die Bogenlänge ändert sich bei Parameterwechsel nicht und verhält sich bei Zusammensetzung additiv:*

$$L(\alpha \bullet \beta) = L(\alpha) + L(\beta). \quad (1)$$

Beweis. Sei zunächst φ eine orientierungserhaltende Umparametrisierung. Dann ist nach der Kettenregel und der Substitutionsregel

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_c^d \left| \frac{d}{ds} \gamma(\varphi(s)) \right| ds = \int_c^d |\dot{\gamma}(\varphi(s))| \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma).$$

Ist hingegen φ orientierungsumkehrend, so hat man

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_c^d |\dot{\gamma}(\varphi(s))| (-\varphi'(s)) ds = \int_d^c |\dot{\gamma}(\varphi(s))| \varphi'(s) ds \\ &= \int_{\varphi(d)}^{\varphi(c)} |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = L(\gamma). \end{aligned}$$

Schliesslich ist unter Verwendung der Standardeigenschaften des Integrals von Funktionen einer Variablen leicht zu sehen, dass die Formel (1) gilt.

3.5. Die Bogenlänge für allgemeinere Kurven. Wir geben nun eine Definition der Bogenlänge, die auch für Kurven sinnvoll ist, die nicht stückweise glatt sind, und die gleichzeitig eine geometrische Motivation für die Definition 3.3.1 liefert. Dazu sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine zunächst beliebige Kurve und $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbf{R}^n . Wir betrachten Streckenzüge, die γ einbeschrieben sind, also etwa den durch die Punkte $\gamma(t_0) = \gamma(a)$, $\gamma(t_1)$, \dots , $\gamma(t_k) = \gamma(b)$ definierten Streckenzug, wobei $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$. Die Länge eines solchen Streckenzuges ist definiert als $\sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$. Falls das Supremum $L(\gamma)$ der Längen aller γ einbeschriebenen Streckenzüge existiert, heisst γ *rektifizierbar* und $L(\gamma)$ die *Länge* von γ . Andernfalls setzen wir $L(\gamma) = +\infty$. Selbst für stetiges γ kann $L(\gamma)$ unendlich sein, aber für stückweise glatte Kurven stimmt die jetzt definierte Länge mit der früher betrachteten überein:

3.6. Satz. Für eine stückweise glatte Kurve γ sind die in 3.3 und 3.5 gegebenen Definitionen der Bogenlänge konsistent.

Beweis. Durch Einschränkung auf geeignete Teilstücke kann man γ als stetig differenzierbar annehmen. Weil $\dot{\gamma}$ und die Norm stetig sind, ist es auch $f(t) := |\dot{\gamma}(t)|$, und $A := \int_a^b f(t) dt$ existiert. Weiter ist $L(\gamma) \leq A$; denn nach Satz 3.2 ist

$$|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\gamma}(t) dt \right| \leq \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

und durch Aufsummieren folgt die Behauptung.

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Integrierbarkeit von f (siehe A.3 des Anhangs) gibt es eine positive Funktion ϱ_1 auf $[a, b]$, sodass $|S_Z(f) - A| < \varepsilon$ für jede Zerlegung $Z \prec \varrho_1$ von $[a, b]$. Weil γ in jedem Punkt $\tau \in [a, b]$ strikt differenzierbar ist, gibt es ein $\delta = \varrho_2(\tau) > 0$, sodass

$$|\gamma(s) - \gamma(t) - \dot{\gamma}(\tau)(s - t)| \leq \varepsilon |s - t| \quad (1)$$

für alle s, t mit $|s - \tau| < \varrho_2(\tau)$ und $|t - \tau| < \varrho_2(\tau)$. Sei $\varrho := \min(\varrho_1, \varrho_2)$ und $Z \prec \varrho$, etwa $Z = (t_0, \dots, t_k; \tau_1, \dots, \tau_k)$. Dann ist nach der umgekehrten Dreiecksungleichung und wegen (1)

$$|\dot{\gamma}(\tau_i)\Delta t_i| - |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \leq |\dot{\gamma}(\tau_i)\Delta t_i - (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))| \leq \varepsilon \Delta t_i,$$

wobei $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ gesetzt sei. Damit folgt weiter

$$\begin{aligned} S_Z(f) &= \sum_{i=1}^k |\dot{\gamma}(\tau_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=1}^k \varepsilon \Delta t_i + \sum_{i=1}^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \\ &\leq \varepsilon(b - a) + L(\gamma), \end{aligned}$$

und folglich $A \leq \varepsilon + S_Z(f) \leq \varepsilon(1 + b - a) + L(\gamma)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt nun auch $A \leq L(\gamma)$.

§4. Differentiation

4.1. Partielle Ableitungen. Sei f eine auf einer offenen Teilmenge U des \mathbf{R}^n definierte Funktion mit Werten in \mathbf{R} . Wir nennen f im Punkt $a \in U$ nach der i -ten Variablen partiell differenzierbar, wenn bei festen a^j ($j \neq i$) die Funktion einer Variablen $g(\xi) := f(a^1, \dots, a^{i-1}, \xi, a^{i+1}, \dots, a^n)$ an der Stelle $\xi = a^i$ im gewöhnlichen Sinne differenzierbar ist. Man setzt dann

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) := g'(a^i),$$

genannt die partielle Ableitung von f an der Stelle a . Andere Bezeichnungen hierfür sind

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = f_{,i}(a) = f_{x^i}(a).$$

Nach Definition ist klar, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}. \quad (1)$$

Geometrisch ist $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ die Steigung der Schnittkurve des Graphen von f im \mathbf{R}^{n+1} mit der durch a gehenden und von den Vektoren e_i und e_{n+1} aufgespannten Ebene.

Die bekannten Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen übertragen sich sinngemäss auf partielle Ableitungen von Funktionen mehrerer Variablen; so etwa die Produktregel

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x^i}(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\right)g(a) + f(a)\left(\frac{\partial g}{\partial x^i}(a)\right),$$

und ähnlich die Quotientenregel.

Die Funktion f heisst in ganz U partiell differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von U und nach jeder Variablen partiell differenzierbar ist. In diesem Fall sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ wieder Funktionen auf U . Falls diese Funktionen noch zusätzlich stetig sind, nennen wir f *stetig partiell differenzierbar* oder *von der Klasse \mathcal{C}^1* oder eine \mathcal{C}^1 -Funktion auf U . (Bis jetzt ist noch nicht klar, dass eine \mathcal{C}^1 -Funktion überhaupt stetig ist, das wird aber in Satz 4.9 bewiesen). Für vektorwertige Funktionen werden diese Begriffe komponentenweise definiert. Wir bezeichnen mit $\mathcal{C}^1(U)$ die Menge der \mathcal{C}^1 -Funktionen auf U , und mit $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^m)$ die Menge der \mathcal{C}^1 -Abbildungen von U in den \mathbf{R}^m . Aus den üblichen Differentiationsregeln und Sätzen über stetige Funktionen folgt sofort, dass dies reelle Vektorräume sind.

Beispiele. (i) Sei $f = T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ linear. Dann folgt aus (1) unmittelbar, dass T überall partiell differenzierbar ist mit der konstanten partiellen Ableitung

$$\frac{\partial T}{\partial x^i} = T e_i.$$

Insbesondere erhält man für $m = 1$ und $T = x^j$ (j -te Koordinatenfunktion), dass

$$\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j. \quad (2)$$

(ii) Seien x, y, z die Koordinatenfunktionen des \mathbf{R}^3 . Dann ist etwa die Funktion $f = x^2yz + e^{xy}$ partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xyz + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2z + xe^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2y.$$

(iii) Schliesslich betrachten wir noch die Funktion $g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, die durch $g(0) = 0$ und $g = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ sonst definiert ist. Dann ist g überall partiell differenzierbar, aber im Nullpunkt nicht einmal stetig (Aufgabe!).

4.2. Differenzierbarkeit, die Ableitung. Das letzte Beispiel zeigt, dass im Gegensatz zum Fall einer Variablen, partiell differenzierbare Funktionen noch ziemlich pathologisch sein können. Auch die Auszeichnung der Koordinatenachsen, also der Standardbasis des \mathbf{R}^n , ist willkürlich, wenn man daran denkt, den \mathbf{R}^n durch einen beliebigen n -dimensionalen Vektorraum zu ersetzen. Wir führen daher die folgenden Begriffe ein. Sei wieder $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine Abbildung. Ferner

sei $|\cdot|$ eine Norm. Dann heisst f im Punkt $a \in U$ *differenzierbar* (oder auch *total differenzierbar*), wenn es eine lineare Abbildung $T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ gibt, sodass

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a) - T(x - a)}{|x - a|} = 0. \quad (1)$$

f heisst in U differenzierbar, wenn es in jedem Punkt differenzierbar ist. Aus der Äquivalenz der Normen (Satz 2.3) folgt, dass die Eigenschaft, differenzierbar zu sein, von der verwendeten Norm nicht abhängt. Weiter ist klar, dass für vektorwertige Funktionen Differenzierbarkeit von f gleichbedeutend mit Differenzierbarkeit jeder Komponente ist.

Auf diese Definition wird man ganz automatisch geführt, wenn man versucht, die Definition der Differenzierbarkeit im \mathbf{R}^1 auf n Dimensionen zu übertragen. Für $n = 1$ besagt die übliche Definition der Differenzierbarkeit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - T \right) = 0, \quad (2)$$

wobei $T = f'(a)$. Da man durch Vektoren nicht dividieren kann, hat das im \mathbf{R}^n keinen Sinn. Erweitert man jedoch mit $(x - a)/|x - a|$, was immer den Betrag 1 hat, so bekommt man die äquivalente Formulierung (1), die auch im \mathbf{R}^n sinnvoll ist. Das zeigt insbesondere, dass die Definition von differenzierbar im \mathbf{R}^n für $n = 1$ mit der üblichen übereinstimmt, wobei die lineare Abbildung T (von \mathbf{R}^1 nach \mathbf{R}^1) dann gerade die Multiplikation mit der gewöhnlichen Ableitung $f'(a)$ ist. Demgemäss definieren wir auch im Fall beliebiger Dimension: Wenn f in a differenzierbar ist, dann heisst

$$T = f'(a): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$$

die *Ableitung* von f an der Stelle a . Damit das sinnvoll ist, muss man sich vergewissern, dass T durch (1) eindeutig bestimmt ist. Das folgt aber aus 4.4 unten. Ist speziell $f = T$ selber schon eine lineare Abbildung, dann zeigt die Definition (1) sofort, dass T differenzierbar ist mit Ableitung

$$T'(a) = T \quad (3)$$

für alle $a \in \mathbf{R}^n$.

Eine einfache aber nützliche Umformulierung von (1) ist: f ist in a genau dann differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung T und eine Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ gibt, sodass

$$f(x) = f(a) + T(x - a) + |x - a|\varphi(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = 0. \quad (4)$$

In Worten: f lässt sich in der Nähe von a durch eine affine (= inhomogen-lineare) Abbildung besser als von erster Ordnung approximieren.

4.3. Der Tangentialvektor einer Kurve. Sei speziell $n = 1$, $U = I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $f = \gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine Kurve im \mathbf{R}^m , die im Punkt $a \in I$ differenzierbar sei, mit Ableitung T . Die lineare Abbildung $T: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ können und werden wir dann mit dem Bild $T1 \in \mathbf{R}^m$ des Standardbasisvektors $1 \in \mathbf{R}$ identifizieren, und das ist wegen der Konsistenz der Differenzierbarkeitsdefinitionen gerade der in 3.1 definierte Tangentialvektor $\dot{\gamma}(a)$.

4.4. Die Richtungsableitung. Sei f eine Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^n$ und $(a, v) \in U \times \mathbf{R}^n$. Die *Richtungsableitung* von f an der Stelle a in Richtung v ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv),$$

falls dieser Limes existiert. Nun sei f in a differenzierbar. Setzt man in 4.2.4 $x = a + tv$ mit $0 \neq t \in \mathbf{R}$ und dividiert durch t , so folgt

$$\frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = Tv \pm |v|\varphi(a + tv),$$

und für $t \rightarrow 0$ ergibt sich

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(a + tv) = Tv = f'(a)v. \quad (1)$$

Die Richtungsableitung existiert also und ist gleich $f'(a)v$. Dies zeigt auch, dass T durch f eindeutig bestimmt und daher die Bezeichnung $T = f'(a)$ gerechtfertigt ist. Die Umkehrung ist nicht richtig; aus der Existenz aller Richtungsableitungen in a folgt noch nicht die Differenzierbarkeit von f in a .

4.5. Satz. Sei f im Punkt a differenzierbar und T eine lineare Abbildung wie in 4.2.1. Dann ist f in diesem Punkt stetig und nach jeder Variablen partiell differenzierbar, mit der partiellen Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = T e_i = f'(a) e_i. \quad (1)$$

Die Abbildungsmatrix von $f'(a)$ bezüglich der Standardbasen ist die $m \times n$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(a) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

genannt die Funktionalmatrix oder Jacobimatrix von f in a .

Beweis. Aus 4.2.4 sieht man sofort, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, also ist f in a stetig. Formel (1) ist der Spezialfall $v = e_i$ von 4.4.1, und besagt insbesondere, dass die i -te Spalte der Abbildungsmatrix von $f'(a)$ bezüglich der Standardbasen gleich

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^i}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^i}(a) \end{pmatrix}$$

ist. Damit ist auch (2) gezeigt.

4.6. Der Gradient. Sei $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ im Punkt $a \in \mathbf{R}^n$ differenzierbar und sei β eine nichtausgeartete symmetrische Bilinearform auf \mathbf{R}^n . Der *Gradient von f im Punkt a bezüglich β* ist der eindeutig bestimmte Vektor $w = \text{grad}_a f \in \mathbf{R}^n$, der

$$\beta(w, v) = f'(a)v \quad \text{für alle } v \in \mathbf{R}^n \quad (1)$$

erfüllt. Bekanntlich lässt sich die Bilinearform β schreiben als $\beta(u, v) = u^T Bv$, wobei B eine invertierbare symmetrische Matrix ist. Bezüglich der Standardbasis identifizieren wir die Linearform $f'(a) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ mit ihrer Abbildungsmatrix, also mit dem Zeilenvektor $(\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a))$, vgl. 4.5. Dann besagt (1), dass $w^T Bv = f'(a)v$ für alle v , also $w^T B = f'(a)$, oder nach Übergang zum Transponierten und Linksmultiplikation mit B^{-1} ,

$$w = \text{grad}_a f = B^{-1} f'(a)^T. \quad (2)$$

Der Gradient besitzt die folgende Interpretation: Sei speziell β positiv definit, also ein Euklidisches Skalarprodukt auf \mathbf{R}^n , und sei $\|v\| = \beta(v, v)^{\frac{1}{2}}$ die zugehörige Euklidische Norm. Dann ist die Einheitskugel $S_1(0) = \{v : \|v\| = 1\}$ kompakt. Die Richtungsableitung von f in a in Richtung $u \in S_1(0)$ ist nach 4.4.1 und (1) gleich $f'(a)u = \beta(\text{grad}_a f, u)$, insbesondere ist sie stetig als Funktion von u . Also nimmt sie ihr Maximum auf $S_1(0)$ an. Nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$f'(a)u = \beta(\text{grad}_a f, u) \leq \|\text{grad}_a f\| \cdot \|u\| = \|\text{grad}_a f\|,$$

und Gleichheit steht genau dann, wenn u ein positives Vielfaches von $\text{grad}_a f$ ist. Wir sehen:

Das Maximum der Richtungsableitungen $f'(a)u$, wenn u die Einheitskugel bezüglich β durchläuft, wird genau für

$$u_{\max} = \frac{\text{grad}_a f}{\|\text{grad}_a f\|}$$

angenommen.

Abschliessend ist zu sagen, dass der Gradient eine weniger wichtige Begriffsbildung ist als die Ableitung $f'(a)$ oder das im nächsten Paragraphen behandelte Differential df . Das liegt einmal an der Abhängigkeit von der Wahl eines Skalarprodukts. Schwerwiegender ist sein unkanonisches Transformationsverhalten bei Abbildungen, wo sich die Vorzüge des Differentials besonders deutlich zeigen, siehe 5.6.

4.7. Strikte Differenzierbarkeit. Noch wichtiger als die in 4.2 besprochene Differenzierbarkeit ist der Begriff „strikt differenzierbar“, und zwar aus praktischen wie aus theoretischen Gründen. Einmal erweist er sich als äquivalent zu „von der Klasse \mathcal{C}^1 “ (Satz 4.9); man hat also ein handliches Kriterium dafür, was bei der Differenzierbarkeit nicht der Fall ist. Andererseits ist die strikte Differenzierbarkeit auch in einem einzelnen Punkt sinnvoll und stellt die natürliche Voraussetzung für den Umkehrsatz (siehe 7.5) dar.

Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ heisst im Punkt $a \in U$ *strikt differenzierbar*, wenn es eine lineare Abbildung $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ gibt, sodass

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,a) \\ x \neq y}} \frac{f(x) - f(y) - T(x - y)}{|x - y|} = 0, \quad (1)$$

und in ganz U strikt differenzierbar, wenn sie es in jedem Punkt ist. Hier ist der Limes $(x, y) \rightarrow (a, a)$ natürlich im $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{2n}$ zu verstehen. Wie in 4.2 ist das unabhängig von der Norm und gleichbedeutend mit strikter Differenzierbarkeit jeder Komponente bei vektorwertigen Funktionen.

Ein Vergleich mit 4.2.1 zeigt:

$$f \text{ in } a \text{ strikt differenzierbar} \implies f \text{ in } a \text{ differenzierbar}, \quad (2)$$

die Umkehrung ist falsch. Insbesondere ist also das in (1) auftretende $T = f'(a)$, wie in 4.2. Ähnlich wie in 4.2 hat man folgende Umformulierung der strikten Differenzierbarkeit: f ist in a strikt differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ und eine Abbildung $\psi : U \times U \rightarrow \mathbf{R}^m$ gibt, sodass

$$f(x) - f(y) = T(x - y) + |x - y| \psi(x, y), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \psi(x, y) = 0. \quad (3)$$

Wir benützen dies nun um zu zeigen, dass f in einer Umgebung von a dehnungsbeschränkt ist im Sinne folgender allgemeiner

Definition. Eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbf{R}^m$ heisst auf D *dehnungsbeschränkt*, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, für alle $x, y \in D$. Statt dehnungsbeschränkt sagt man auch, f genügt auf D einer *Lipschitz-Bedingung*, die Konstante L heisst die Lipschitz-Konstante. Klarerweise ist eine dehnungsbeschränkte Abbildung stetig, aber die Umkehrung gilt nicht.

4.8. Satz. Sei f in a strikt differenzierbar mit Ableitung $T = f'(a)$. Dann gibt es eine Umgebung von a , in der f dehnungsbeschränkt und somit insbesondere stetig ist. Genauer gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in B_\delta(a)$ gilt: $|f(x) - f(y)| \leq (|T| + \varepsilon)|x - y|$.

Hierbei ist $|T|$ die Norm der linearen Abbildung T wie in 2.11. Die Lipschitz-Konstante kann also beliebig nahe an $|T|$ gewählt werden, indem man die Umgebung von a geeignet verkleinert.

Beweis. Nach der Dreiecksungleichung und 4.7.3 gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq |T(x - y)| + |x - y| |\psi(x, y)|. \quad (1)$$

Wegen $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \psi(x, y) = 0$ gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|\psi(x, y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in B_\delta(a)$. Also folgt nun aus (1) und 2.12.1

$$|f(x) - f(y)| \leq |T(x - y)| + \varepsilon|x - y| \leq (|T| + \varepsilon)|x - y|,$$

wie behauptet.

4.9. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist in U von der Klasse \mathcal{C}^1 ;
- (ii) f ist in U strikt differenzierbar;
- (iii) f ist in U differenzierbar, und $f' : U \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ ist stetig.

Beweis. (i) \implies (ii): Wir können o.B.d.A. f als skalarwertig annehmen. Sei $\|\cdot\|_\infty$ die Maximumnorm auf dem \mathbf{R}^n und sei $a \in U$ beliebig. Definiere die Linearform

$T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ durch ihren Effekt auf der Standardbasis als $Te_i = \partial_i f(a)$, und betrachte die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - f(a) - (Tx - Ta).$$

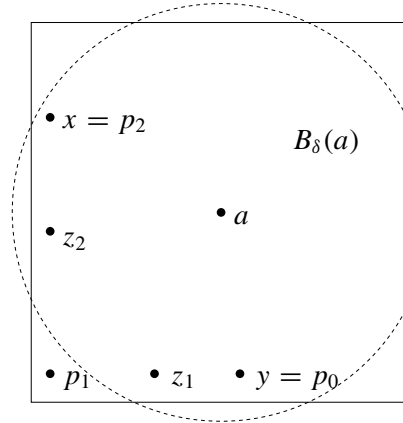
Nach 4.1 ist $h \in \mathcal{C}^1(U)$ und es gilt $h(a) = 0$ und

$$\partial_i h(a) = \partial_i f(a) - \partial_i T(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Ferner ist

$$f(x) - f(y) - T(x - y) = h(x) - h(y).$$

Um 4.7.1 zu verifizieren, sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen (1), der Stetigkeit der $\partial_i h$ und der Offenheit von U gibt es dann ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(a) \subset U$ und $|\partial_i h(z)| < \varepsilon/n$ für alle $z \in B_\delta(a)$. Nun seien $x = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ und $y = (\eta^1, \dots, \eta^n)$ in $B_\delta(a)$. (Wir schreiben hier absichtlich nicht x^i für die Komponenten von x ; denn die Symbole x^i sind für die Koordinatenfunktionen reserviert). Weil wir die Maximumnorm verwenden, ist $B_\delta(a)$ der offene Würfel mit Mittelpunkt a und Kantenlänge 2δ , und daher liegen die Punkte $p_i := (\xi^1, \dots, \xi^i, \eta^{i+1}, \dots, \eta^n)$ wieder in $B_\delta(a)$:



Dies wäre bei Verwendung einer anderen Norm, etwa der Euklidischen, nicht der Fall, wie man aus der Figur sehen kann. Speziell gilt $p_0 = y$ und $p_n = x$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt nun

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= \sum_{i=1}^n h(p_i) - h(p_{i-1}) && \text{(Teleskopsumme)} \\ &= \sum_{i=1}^n h(\dots, \xi^{i-1}, \xi^i, \eta^{i+1}, \dots) - h(\dots, \xi^{i-1}, \eta^i, \eta^{i+1}, \dots) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i h(\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, \zeta^i, \eta^{i+1}, \dots, \eta^n) (\xi^i - \eta^i) \\ &= \sum_{i=1}^n \partial_i h(z_i) (\xi^i - \eta^i), \end{aligned}$$

wobei ζ^i zwischen ξ^i und η^i liegt und $z_i = (\xi^1, \dots, \xi^{i-1}, \zeta^i, \eta^{i+1}, \dots, \eta^n)$ gesetzt ist. Wegen der verwendeten Maximumnorm sind auch die Zwischenpunkte z_i wieder in $B_\delta(a)$, siehe obige Figur. Nun folgt weiter

$$|h(x) - h(y)| \leq \sum_{i=1}^n |\partial_i h(z_i)| |\xi^i - \eta^i| \leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{n} |x - y| = \varepsilon |x - y|,$$

und nach Division durch $|x - y|$ die Behauptung.

(ii) \implies (iii): Nach 4.7.2 ist f in U differenzierbar, also bleibt nur noch die Stetigkeit von f' , oder was nach 4.5 auf dasselbe hinauskommt, die Stetigkeit der partiellen Ableitungen zu zeigen. Sei $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbf{R}^n , sodass die Standardbasisvektoren e_i die Länge 1 haben. Sei $a \in U$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $\delta > 0$ so, dass $|\psi(x, y)| < \varepsilon/2$ für alle $x, y \in B_\delta(a)$, was nach 4.7.3 möglich ist. Sei $x \in B_\delta(a)$. Nun wähle $t > 0$ so klein, dass

$$y := x + te_i \in B_\delta(a), \quad (2)$$

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{t} - \partial_i f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Dabei ist (2) deswegen möglich, weil $|y - a| = |x + te_i - a| \leq |x - a| + t|e_i| = |x - a| + t < \delta$ für $0 < t < \delta - |x - a|$, und (3) wegen der partiellen Differenzierbarkeit von f in x und 4.1.1. Sei $T = f'(a)$. Dann ist $|y - x| = |te_i| = t$ und $T(y - x) = T(te_i) = t\partial_i f(a)$ nach 4.5.1, und folglich wegen der strikten Differenzierbarkeit von f in a :

$$\begin{aligned} \left| \partial_i f(x) - \partial_i f(a) \right| &\leq \left| \partial_i f(x) - \frac{f(y) - f(x)}{t} \right| + \left| \frac{f(y) - f(x)}{t} - \partial_i f(a) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{t} \left| f(y) - f(x) - T(y - x) \right| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + |\psi(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von $\partial_i f$ an der Stelle a bewiesen.

(iii) \implies (i): Klar nach 4.5.

Hiermit folgt nun die Stetigkeit von C^1 -Abbildungen und sogar noch etwas mehr, nämlich die lokale Dehnungsbeschränktheit, im Sinn der folgenden Definition:

4.10. Lokale und globale Eigenschaften. Eine Eigenschaft E einer auf einer offenen Menge U definierten Funktion f heisst eine *lokale Eigenschaft*, wenn folgende Bedingungen äquivalent sind:

- (i) E gilt auf ganz U ;
- (ii) zu jedem Punkt $a \in U$ gibt es eine (im Allgemeinen von a abhängige) Umgebung $U_a \subset U$, sodass E auf U_a gilt.

Zum Beispiel ist Stetigkeit eine lokale Eigenschaft, ebenso Differenzierbarkeit oder strikte Differenzierbarkeit. Das folgt sofort aus der Definition. Dagegen ist Beschränktheit keine lokale Eigenschaft, wie man schon am Beispiel der Funktion $f(x) = x$ auf $U = \mathbf{R}$ sieht: Hier ist (ii) erfüllt, aber (i) nicht. Nichtlokale Eigenschaften nennt man auch *global*. Weil die soeben beschriebene Situation oft vorkommt, führt man folgende Sprechweise ein: f hat *lokal die Eigenschaft E* oder *ist lokal E* , falls (ii) gilt.

Zum Beispiel sei $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $a \in U$ ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < 1$, und daher $|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq 1 + |f(a)|$, für alle $x \in B_\delta(a)$. Daher ist f auf $U_a = B_\delta(a)$ beschränkt, und wir sehen: *Eine stetige Funktion ist lokal beschränkt*, aber eben im Allgemeinen nicht global beschränkt.

Die Begriffsbildung „lokal E “ wendet man auch auf andere mathematische Objekte als Funktionen an, z.B. Funktionenfolgen. So ist etwa die Eigenschaft „gleichmässig konvergent“ nicht lokal und hat demgemäss die lokale Variante „lokal gleichmässig konvergent“, siehe dazu 12.1.

Wir formulieren nun folgendes Korollar zu Satz 4.9:

4.11. Korollar. (a) Eine \mathcal{C}^1 -Abbildung $f : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ ist lokal dehnungsbeschränkt und somit insbesondere stetig.

(b) Sind $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^m)$ und $g, h \in \mathcal{C}^1(U)$ und ist $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$, dann sind auch fg und f/h in $\mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^m)$.

Beweis. (a) Das folgt unmittelbar aus Satz 4.8 und Satz 4.9.

(b) Das folgt aus (a) und den Differentiationsregeln für partielle Ableitungen.

§5. Differentiale und Differentiationsregeln

5.1. Definition. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Das Differential von f ist die Funktion $df : U \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, die durch

$$df(x; v) = f'(x)v \quad (1)$$

definiert ist. Das Differential von f ist also eine Funktion von zwei (vektoriellen) Variablen $(x; v)$, die in der zweiten Variablen v linear ist. Wir schreiben ein Semikolon vor v , um dies anzudeuten.

* Mit den in der linearen Algebra eingeführten Bezeichnungen gilt $f' = (df)_l$, die aus df durch Linkseinsetzen entstehende Abbildung. *

Ist $g : U \rightarrow \mathbf{R}$ eine skalarwertige Funktion, so sei $gdf : U \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ durch

$$(gdf)(x; v) = g(x)df(x; v) \quad (2)$$

definiert. Man bildet also das Produkt gdf , indem man g als von der zweiten Variablen v unabhängig auffasst. Das ist nichts Ungewöhnliches; man betrachtet ja auch oft eine Funktion einer Variablen x als Funktion auf dem \mathbf{R}^2 , die eben von der zweiten Variablen y nicht abhängt. Hiermit gilt nun der einfache, aber wichtige

5.2. Satz (Universelle Formel für das Differential). Sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und seien x^1, \dots, x^n die Koordinatenfunktionen. Dann gilt

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad (1)$$

und diese Darstellung ist eindeutig; d.h.: Falls auch

$$df = \sum_{i=1}^n f_i dx^i \quad (2)$$

gilt mit gewissen Funktionen f_i , so folgt $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Beweis. Sei $a \in U$ und $v = \sum e_i v^i \in \mathbf{R}^n$. Dann ist wegen der Definition 5.1.1, der Linearität von $f'(a)$ und 4.5.1:

$$df(a; v) = f'(a)v = \sum_{i=1}^n (f'(a)e_i)v^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a)v^i.$$

Speziell für $f = x^j$ liefert dies mit 4.1.2

$$dx^j(a; v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(a)v^i = \sum_{i=1}^n \delta_i^j v^i = v^j. \quad (3)$$

Andrerseits ist nach 5.1.2 und (3)

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right)(a; v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) dx^i(a; v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) v^i,$$

und durch Vergleich folgt (1).

Zum Beweis der Eindeutigkeit setzen wir $g_i = f_i - \frac{\partial f}{\partial x^i}$ und haben dann zu zeigen: Aus $\sum g_i dx^i = 0$ folgt $g_i = 0$. Nun ist für alle $a \in U$ und $v = e_j \in \mathbf{R}^n$, wieder wegen (3),

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n g_i dx^i\right)(a; e_j) = \sum_{i=1}^n g_i(a) dx^i(a; e_j) = \sum_{i=1}^n g_i(a) \delta_j^i = g_j(a),$$

und weil $a \in U$ beliebig war, folgt $g_j = 0$.

5.3. Das Rechnen mit Differentialen. Dieser Satz lässt sich auf zweierlei Weisen verwenden: Einmal kann man df mittels 5.2.1 berechnen. Wenn man andererseits schon irgendwie eine Darstellung von df der Art 5.2.2 gefunden hat, so kann daraus die partiellen Ableitungen als die Koeffizienten von dx^i ablesen. Zunächst bekommt man aus den gewöhnlichen Differentiationsregeln für partielle Ableitungen (die ihrerseits ja aus den bekannten Regeln für das Differenzieren von Funktionen einer Variablen folgen) und 5.2.1 die Regeln

$$d(f + g) = df + dg, \quad (\text{Summenregel})$$

$$d(fg) = f dg + g df, \quad (\text{Produktregel})$$

$$d\left(\frac{f}{h}\right) = \frac{h df - f dh}{h^2}, \quad (\text{Quotientenregel})$$

falls $f, g, h \in \mathcal{C}^1(U)$ und $h(x) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zur Illustration der zweiten Anwendung von 5.2.1 betrachten wir die Funktion $f = \frac{xyz}{1+z^2}$ auf dem \mathbf{R}^3 , und berechnen df mit den Regeln für Differentiale:

$$\begin{aligned} df &= \frac{(1+z^2)d(xyz) - xyz d(1+z^2)}{(1+z^2)^2} \\ &= \frac{(1+z^2)(xy dz + yz dx + zx dy) - xyz \cdot 2z dz}{(1+z^2)^2}. \end{aligned}$$

Nun folgt durch Vergleich der Koeffizienten bei dx , dy und dz :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz}{1+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{zx}{1+z^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy}{1+z^2} - \frac{2xyz^2}{(1+z^2)^2} = \frac{xy(1-z^2)}{(1+z^2)^2}.$$

5.4. Differentiale vektorwertiger Funktionen, verallgemeinerte Produktregel.

Für vektorwertige Funktionen $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ wird das Differential $df: U \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ genauso wie für skalarwertige Funktionen erklärt. Satz 5.2 und die obigen Differentiationsregeln bleiben bestehen, vorausgesetzt, dass bei der Produktregel einer der beiden Faktoren und bei der Quotientenregel der Nenner h eine skalarwertige Funktion ist.

Sind beide Faktoren vektorwertig, so gilt die folgende Verallgemeinerung der Produktregel.

Sei $\star : \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine bilineare Abbildung. Zum Beispiel könnte \star das Matrizenprodukt zwischen Vektorräumen von Matrizen geeigneter Grösse oder das Kreuzprodukt im \mathbf{R}^3 sein. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, seien $f : U \rightarrow \mathbf{R}^p$ und $g : U \rightarrow \mathbf{R}^q$ \mathcal{C}^1 -Abbildungen, und sei $f \star g : U \rightarrow \mathbf{R}^m$ durch $(f \star g)(x) = f(x) \star g(x)$ definiert. Dann ist auch $f \star g$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung, und es gilt die Produktregel

$$d(f \star g) = df \star g + f \star dg, \quad (1)$$

(Achtung auf die Reihenfolge!), genauer:

$$d(f \star g)(x; v) = df(x; v) \star g(x) + f(x) \star dg(x; v) \quad (2)$$

für alle $(x, v) \in U \times \mathbf{R}^n$. Zum Beweis seien die Konstanten c_{ij}^k durch

$$e_i \star e_j = \sum e_k c_{ij}^k$$

definiert. Dann folgt wegen der Bilinearität von \star

$$f \star g = \left(\sum e_i f^i \right) \star \left(\sum e_j g^j \right) = \sum e_k c_{ij}^k f^i g^j.$$

Also ist $f \star g$ wieder stetig differenzierbar, und es folgt mit der Summenregel und der gewöhnlichen Produktregel von 5.3

$$\begin{aligned} d(f \star g) &= \sum e_k c_{ij}^k ((df^i)g^j + f^i dg^j) \\ &= \sum e_k c_{ij}^k (df^i)g^j + \sum e_k c_{ij}^k f^i dg^j = df \star g + f \star dg. \end{aligned}$$

Nun folgt (2) durch Auswerten in (x, v) . Als Spezialfall dieser Regel halten wir fest: Sei $U = I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbf{R}^p$ und $g : I \rightarrow \mathbf{R}^q$ stetig differenzierbare Kurven. Dann ist auch $f \star g$ stetig differenzierbar, und für die Ableitung gilt

$$\frac{d}{dt}(f \star g) = \dot{f} \star g + f \star \dot{g}. \quad (3)$$

Zum Beweis setzt man in (2) $v = 1$ und benützt $\dot{f}(t) = f'(t)1 = df(t; 1)$, siehe 4.3.

Damit bleibt von den grundlegenden Differentiationsregeln nur noch die Kettenregel zu behandeln:

5.5. Satz (Kettenregel). Seien $U \subset \mathbf{R}^n$ und $V \subset \mathbf{R}^m$ offene Mengen und $g : U \rightarrow V$, $f : V \rightarrow \mathbf{R}^k$ Abbildungen.

(a) Sei $a \in U$, $b = g(a) \in V$, und seien g in a und f in b strikt differenzierbar. Dann ist auch $f \circ g$ in a strikt differenzierbar, und es gilt die Kettenregel

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \circ g'(a). \quad (1)$$

(Hier steht rechts die Zusammensetzung der linearen Abbildungen). Sind x^1, \dots, x^n die Koordinaten im \mathbf{R}^n und y^1, \dots, y^m die Koordinaten im \mathbf{R}^m , dann gilt für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x^i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(a)) \cdot \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a). \quad (2)$$

(b) Sind f und g von der Klasse \mathcal{C}^1 dann auch die Zusammensetzung $f \circ g$.

Beweis. Sei $S = f'(b) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ und $T = g'(a) : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Nach 4.7.3 gilt dann für alle $u, v \in V$

$$f(u) - f(v) = S(u - v) + |u - v|\eta(u, v), \quad \lim_{(u,v) \rightarrow (b,b)} \eta(u, v) = 0, \quad (3)$$

und für alle $x, y \in U$:

$$g(x) - g(y) = T(x - y) + |x - y|\vartheta(x, y), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \vartheta(x, y) = 0. \quad (4)$$

Setzt man $u = g(x)$ und $v = g(y)$ in (3) und benützt (4) und die Linearität von S , so bekommt man

$$\begin{aligned} f(g(x)) - f(g(y)) &= S(g(x) - g(y)) + |g(x) - g(y)|\eta(g(x), g(y)) \\ &= ST(x - y) + |x - y|S\vartheta(x, y) + |g(x) - g(y)|\eta(g(x), g(y)) \\ &= ST(x - y) + |x - y|\psi(x, y), \end{aligned}$$

wobei

$$\psi(x, y) := \begin{cases} S\vartheta(x, y) + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|} \cdot \eta(g(x), g(y)) & \text{für } x \neq y, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (5)$$

und es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \psi(x, y) = 0$. Nun gilt für den ersten Term in (5) nach 2.12.1

$$|S\vartheta(x, y)| \leq |S| \cdot |\vartheta(x, y)| \rightarrow 0 \quad \text{für } (x, y) \rightarrow (a, a)$$

wegen (4). Weiter genügt g nach Satz 4.8 in einer geeigneten Umgebung von a einer Lipschitz-Bedingung; etwa $|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in B_\delta(a)$. Damit ist der zweite Term in (5) $\leq L \cdot |\eta(g(x), g(y))|$, für alle $x, y \in B_\delta(a)$. Da g stetig in a ist gilt $(g(x), g(y)) \rightarrow (b, b)$ für $(x, y) \rightarrow (a, a)$, und somit $|\eta(g(x), g(y))| \rightarrow 0$ für $(x, y) \rightarrow (a, a)$ nach (3), wie behauptet.

Die Formel für die partiellen Ableitungen folgt nun aus (1) und 4.5.1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x^i}(a) &= (f \circ g)'(a)e_i = f'(b)g'(a)e_i = f'(b) \frac{\partial g}{\partial x^i}(a) \\ &= f'(b) \left(\sum_{j=1}^m e_j \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a) \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y^j}(b) \cdot \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(a). \end{aligned}$$

Damit ist (a) bewiesen. Schliesslich folgt (b) unmittelbar aus (a) und Satz 4.9.

* Dieser Satz gilt auch, wenn man überall „strikt differenzierbar“ durch „differenzierbar“ ersetzt (Aufgabe). Dagegen gilt er nicht mehr für „partiell differenzierbar“ statt „differenzierbar“. *

5.6. Die Kettenregel in Differentialschreibweise. Unter Verwendung des Differentials wird die Kettenregel noch einprägsamer: Nach Satz 5.2 und Satz 5.5 ist

$$d(f \circ g) = \sum_i \frac{\partial(f \circ g)}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(x)) \frac{\partial g^j}{\partial x^i} dx^i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y^j}(g(x)) dg^j,$$

und andererseits

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j.$$

Durch Vergleich folgt die

Differentialkettenregel. Man erhält $d(f \circ g)$ aus df , indem man df in den Koordinaten y^j berechnet, und dann die y^j durch g^j und die dy^j durch dg^j ersetzt.

Dies kann man auch symbolisch durch die Formel

$$d(f \circ g) = df(g; dg)$$

oder die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbf{R}^n & \xrightarrow{(g; dg)} & V \times \mathbf{R}^m \\ & \searrow d(f \circ g) & \swarrow df \\ & & \mathbf{R}^k \end{array}$$

ausdrücken; in Worten: es kommt auf dasselbe hinaus, ob man erst g in f einsetzt und dann differenziert, oder erst f und g differenziert und dann ineinander einsetzt.

5.7. Beispiele. (i) *Ableitung einer Funktion längs einer Kurve.* Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall, $\gamma: I \rightarrow U \subset \mathbf{R}^n$ eine \mathcal{C}^1 -Kurve und $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ eine \mathcal{C}^1 -Funktion. Für alle $\tau \in I$ ist dann

$$(f \circ \gamma)'(\tau) = f'(\gamma(\tau))\dot{\gamma}(\tau) = df(\gamma(\tau); \dot{\gamma}(\tau)). \quad (1)$$

und folglich, wenn wir mit t die (identische) Koordinatenfunktion auf \mathbf{R} bezeichnen,

$$d(f \circ \gamma) = df(\gamma; d\gamma) = df(\gamma; \dot{\gamma}) dt. \quad (2)$$

Aus (1) folgt auch, dass die Richtungsableitung von f an der Stelle a in Richtung v , also $f'(a)v$, gleich $(f \circ \gamma)'(0)$ ist für irgendeine Kurve γ mit $\gamma(0) = a$ und $\dot{\gamma}(0) = v$, und nicht nur für die Gerade $a + tv$ wie in 4.4.

(ii) Sei $f = x^2y$, $g = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Dann ist $df = 2xy dx + x^2 dy$.

Zur Berechnung von $d(f \circ g)$ ersetzt man also hier x durch $g^1 = r \cos \varphi$, y durch $g^2 = r \sin \varphi$, dx durch $dg^1 = d(r \cos \varphi) = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi$ und dy durch $d(r \sin \varphi) = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi$ und bekommt

$$\begin{aligned} d(f \circ g) &= 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi (\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi) + r^2 \cos^2 \varphi (\sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi) \\ &= 3r^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi dr + r^3 \cos \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Dasselbe Ergebnis erhält man natürlich auch durch direktes Differenzieren von $f \circ g = r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi$.

5.8. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) $df = 0$;
- (ii) f ist lokal konstant.

Beweis. Die Implikation (ii) \implies (i) ist klar. Umgekehrt können wir o.B.d.A. f als skalarwertig voraussetzen. Sei $a \in U$ und $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(a) \subset U$. Sei $x \in B_\delta(a)$. Betrachte die Gerade $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\gamma(t) = a + t(x - a)$. Dann ist $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = x$, $\gamma([0, 1]) \subset B_\delta(a) \subset U$, und die Funktion $h = f \circ \gamma$ ist auf $[0, 1]$ stetig und auf $]0, 1[$ differenzierbar. Also gibt es nach dem gewöhnlichen Mittelwertsatz der Differentialrechnung ein $\tau \in]0, 1[$, sodass $h(1) - h(0) = h'(\tau)(1 - 0)$. Nach 5.7.1 folgt nun $f(x) - f(a) = h(1) - h(0) = df(\gamma(\tau); \dot{\gamma}(\tau)) = 0$. Also ist f auf $B_\delta(a)$ konstant.

5.9. Zusammenhängende Mengen. Es ist im Allgemeinen nicht wahr, dass eine Funktion f mit $df = 0$ konstant ist. Zum Beispiel kann U aus zwei offenen disjunkten Kreisscheiben bestehen und f auf der einen den Wert 1 und auf der anderen den Wert 0 haben. Um also auf die Konstanz von f schliessen zu können, braucht man eine Zusatzbedingung an U , die so etwas ausschliesst. Dies führt zu folgender

Definition. Eine offene Menge $U \subset \mathbf{R}^n$ heisst *zusammenhängend*, wenn sich U nicht darstellen lässt als die Vereinigung von zwei disjunkten offenen nichtleeren Teilmengen U_1 und U_2 .

Damit gilt dann:

5.10. Satz. Ist U zusammenhängend und $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ lokal konstant, dann ist f konstant.

Beweis. Angenommen, f ist nicht konstant. Wähle einen Punkt $a \in U$, setze $b = f(a)$ und definiere $U_1 := \{x \in U : f(x) = b\}$ und $U_2 := \{x \in U : f(x) \neq b\}$. Dann sind U_1 und U_2 nichtleer, disjunkt, und ihre Vereinigung ist ganz U . Weiter sind sie auch offen: Ist $x \in U_1$, dann gibt es, weil f lokal konstant ist, eine Umgebung $U_x \subset U$ von x , auf der f den Wert b hat. Also ist $U_x \subset U_1$ und somit x ein innerer Punkt von U_1 . Ähnlich sei $y \in U_2$. Dann gibt es eine Umgebung $U_y \subset U$ von y , auf der f konstant ist und daher den Wert $f(y) \neq b$ hat. Das zeigt $U_y \subset U_2$, also ist auch y ein innerer Punkt von U_2 . Insgesamt ist U also nicht zusammenhängend, Widerspruch!

5.11. Korollar. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und zusammenhängend und $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung mit $df = 0$. Dann ist f konstant.

Wir geben schliesslich folgendes Kriterium dafür an, dass eine Menge zusammenhängend ist. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $a, b \in U$. Ein *Streckenzug* von a nach b in U ist eine endliche Familie $a = a_0, a_1, \dots, a_k = b$ von Punkten in U , sodass die Strecken $[a_{i-1}, a_i]$ ganz in U enthalten sind. Zwei Punkte $a, b \in U$ heissen *verbindbar*, wenn es einen Streckenzug von a nach b in U gibt. Dann gilt:

5.12. Satz. Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ ist genau dann zusammenhängend, wenn je zwei Punkte in U verbindbar sind.

Beweis. Sei U zusammenhängend und $a \in U$. Dann sind die Mengen $V_a = \{x \in U : x \text{ und } a \text{ verbindbar}\}$ und $N_a = \{x \in U : a \text{ und } x \text{ nicht verbindbar}\}$ offen: Sei $x \in V_a$ und δ so klein, dass $B_\delta(x) \subset U$. Dann ist auch $B_\delta(x) \subset V_a$; denn wenn etwa $a = a_0, \dots, a_k = x$ ein Streckenzug von a nach x ist und $y \in B_\delta(x)$, dann ist $[x, y] \subset B_\delta(x)$, weil Kugeln konvex sind (2.6), und folglich ist a_0, \dots, a_k, y ein Streckenzug von a nach y und somit $y \in V_a$. Ähnlich ist, für $z \in N_a$ und $B_\varepsilon(z) \subset U$ auch $B_\varepsilon(z) \subset N_a$; denn gäbe es einen Streckenzug von a nach $w \in B_\varepsilon(z)$, dann auch von a nach z , weil die ganze Strecke von w nach z in $B_\varepsilon(z)$ liegt. Weil nun U zusammenhängend ist und $V_a \neq \emptyset$, folgt $N_a = \emptyset$. Also ist a mit jedem anderen Punkt in U verbindbar.

Umgekehrt seien je zwei Punkte verbindbar, aber $U = U_1 \cup U_2$ nicht zusammenhängend. Betrachte die Funktion $f: U \rightarrow \mathbf{R}$, die durch $f|_{U_1} = 0$, $f|_{U_2} = 1$ definiert ist. Dann ist f lokal konstant und somit stetig. Sei $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ eine stetige Parametrisierung eines Streckenzuges von $a \in U_1$ nach $b \in U_2$, und sei $g := f \circ \gamma$. Dann ist $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ stetig mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$, und $g(t) \in \{0, 1\}$ für alle $t \in [0, 1]$. Das ist aber nach dem Zwischenwertsatz nicht möglich.

§6. Höhere Ableitungen, Taylorformel, Extrema

6.1. Definition. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion. Wenn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x^i}: U \rightarrow \mathbf{R}$ wieder partiell differenzierbar sind, dann heisst f *zweimal partiell differenzierbar*. Die zweiten partiellen Ableitungen schreibt man dann als

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (1)$$

Achtung auf die Reihenfolge! Wichtiger ist der folgende, induktiv definierte Begriff: f heisst *von der Klasse \mathcal{C}^k* , geschrieben $f \in \mathcal{C}^k(U)$, wenn $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und alle partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x^i$ von der Klasse \mathcal{C}^{k-1} sind. Dabei soll $f \in \mathcal{C}^0(U)$ einfach bedeuten, dass f stetig ist. Nach den Sätzen des vorigen Paragraphen ist klar:

Summe, Produkt, Quotient, und Zusammensetzung von \mathcal{C}^k -Funktionen bzw. -Abbildungen sind wieder von der Klasse \mathcal{C}^k .

Schliesslich heisst f von der Klasse \mathcal{C}^∞ , wenn $f \in \mathcal{C}^k(U)$ für alle k , mit anderen Worten: alle partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung existieren und sind stetig.

Die naheliegende Frage, ob es in (1) wirklich auf die Reihenfolge ankommt, beantwortet der folgende

6.2. Satz. *Ist $f \in \mathcal{C}^2(U)$ dann sind die zweiten partiellen Ableitungen symmetrisch:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Beweis. Sei $a \in U$. Wir versehen den \mathbf{R}^n mit der Maximumnorm und wählen $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(a) \subset U$. Dann ist $a + se_i + te_j \in B_\delta(a)$ für alle $s, t \in]0, \delta[$. Folglich ist die Hilfsfunktion

$$h(t) = f(a + se_i + te_j) - f(a + te_j),$$

für solche s, t wohldefiniert und von der Klasse \mathcal{C}^2 , und es gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung und der Definition der partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} h(t) - h(0) &= h'(\tau)(t - 0) \\ &= t \left(\frac{\partial f}{\partial x^j}(a + \tau e_j + se_i) - \frac{\partial f}{\partial x^j}(a + \tau e_j) \right) \\ &= st \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + \sigma e_i + \tau e_j), \end{aligned} \quad (1)$$

mit $\tau \in]0, t[$ und $\sigma \in]0, s[$. Weiter betrachte die Hilfsfunktion

$$k(s) = f(a + se_i + te_j) - f(a + se_i).$$

Dann bekommt man ähnlich

$$k(s) - k(0) = st \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a + \tilde{\sigma} e_i + \tilde{\tau} e_j), \quad (2)$$

wieder mit $\tilde{\sigma} \in]0, s[$ und $\tilde{\tau} \in]0, t[$. Andererseits gilt (durch Hinschreiben zu bestätigen) $h(t) - h(0) = k(s) - k(0)$. Setzt man $x = a + \sigma e_i + \tau e_j$ und $y = a + \tilde{\sigma} e_i + \tilde{\tau} e_j$, so gilt $|x - a| < \max(s, t)$ und $|y - a| < \max(s, t)$, und durch Vergleich von (1) und (2) nach Kürzen von st sieht man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(y).$$

Nun folgt aus der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen für $(s, t) \rightarrow (0, 0)$ die Behauptung.

Durch mehrmaliges Anwenden folgt das

6.3. Korollar. *Ist f von der Klasse \mathcal{C}^k , dann ist $\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}$ symmetrisch in i_1, \dots, i_k .*

6.4. Die zweite Ableitung. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $a \in U$ und $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbf{R}^m)$. Dann ist $F := f' : U \rightarrow M := \text{Hom}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \cong \text{Mat}_{m,n}(\mathbf{R})$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Also existiert die zweite Ableitung $F'(a) = f''(a) \in \text{Hom}(\mathbf{R}^n, M)$. Seien $u = \sum e_i u^i$ und $v = \sum e_j v^j$ Vektoren im \mathbf{R}^n . Dann ist $F'(a)v \in M$, und daher wieder auf u anwendbar, das Ergebnis ist ein Vektor im \mathbf{R}^m . Wir behaupten

$$(F'(a)v)u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a) v^j u^i. \quad (1)$$

Zum Beweis betrachten wir die Hilfsfunktion $h(x) = F(x)u = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} u^i$ und berechnen $h'(a)v$ auf zwei Weisen. Einmal ist

$$h'(a)v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial h}{\partial x^j}(a)v^j = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a) u^i v^j.$$

Andererseits ist $h = R_u \circ F$, wobei $R_u : M \rightarrow \mathbf{R}^m$ die Rechtsmultiplikation mit u ist. Offenbar ist R_u linear, also auch differenzierbar und nach 4.2.3 überall gleich seiner Ableitung. Folglich ist nach der Kettenregel

$$h'(a)v = R_u(F'(a)v) = (F'(a)v)u,$$

wie behauptet.

Nach Satz 6.2 ist die linke Seite von (1) symmetrisch und offenbar bilinear in u und v und definiert daher eine bilineare symmetrische Abbildung $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Man identifiziert daher $f''(a)$ auch mit dieser Abbildung und benützt die Schreibweisen

$$f''(a)(u, v) = (f''(a)v)u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(a) v^j u^i. \quad (2)$$

Die symmetrische Matrix $(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a))$ heisst die *Hessesche Matrix* von f in a . (Falls f vektorwertig ist, ist das eine 3-dimensionale Matrix!)

6.5. Satz (Taylorentwicklung bis zur 2. Ordnung) Sei $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbf{R}^m)$, $a \in U$ und $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(a) \subset U$. Dann gilt für alle $x = a + v \in B_\delta(a)$:

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)v + \frac{1}{2}f''(a)(v, v) + |v|^2\varphi(v),$$

mit $\lim_{v \rightarrow 0} \varphi(v) = 0$.

Beweis. Betrachte die Hilfsfunktion $g(t) = f(a + tv)$. Weil die gesamte Strecke von a bis $a + v$ in $B_\delta(a)$ und damit in U liegt, ist g auf $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbar, und nach der gewöhnlichen Taylorformel mit Lagrangeschem Restglied ist

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \frac{1}{2}g''(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

Offenbar ist $g(1) = f(a + v)$ und $g(0) = f(a)$. Nach der Kettenregel und 6.4.2 gilt $g'(t) = f'(a + tv)v$ und $g''(t) = f''(a + tv)(v, v)$. Es folgt

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)v + \frac{1}{2}f''(a)(v, v) + r(v),$$

wobei $2r(v) := (f''(a + \vartheta v) - f''(a))(v, v)$, und es bleibt zu zeigen, dass $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r(v)}{|v|^2} = 0$. Wegen der Äquivalenz der Norm $|\cdot|$ mit der Maximumnorm gibt es ein $C > 0$, sodass $|v^i| \leq C|v|$ für alle v und alle $i = 1, \dots, n$. Nach 6.4.2 ist

$$\frac{|r(v)|}{|v|^2} \leq \frac{1}{2}C^2 \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a + \vartheta v) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) \right|$$

und daraus folgt wegen der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen die Behauptung.

6.6. Definition. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ eine Funktion und $a \in U$. Man sagt, f habe in a ein *lokales Minimum* bzw. ein *striktes lokales Minimum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass $B_\delta(a) \subset U$ und $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in B_\delta(a)$ bzw. $f(x) > f(a)$ für alle $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$. (Strikte) lokale Maxima werden ganz analog definiert. Der gemeinsame Oberbegriff von Maximum und Minimum ist Extremum.

Der Punkt a heisst ein *kritischer Punkt* von f , falls in a strikt differenzierbar ist und $f'(a) = 0$. Ein kritischer Punkt heisst ein *Sattelpunkt*, wenn es in jeder Umgebung von a Punkte x und y gibt, sodass $f(x) < f(a) < f(y)$.

6.7. Satz. (a) Sei $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Falls f in a ein lokales Extremum hat, dann ist a ein kritischer Punkt.

(b) Sei $f \in \mathcal{C}^2(U)$ und sei a ein kritischer Punkt. Dann gilt:

- (i) Ist die symmetrische Bilinearform $f''(a)$ positiv (negativ) definit, dann hat f in a ein striktes lokales Minimum (Maximum).
- (ii) Ist $f''(a)$ indefinit, dann ist a ein Sattelpunkt.
- (iii) Ist $f''(a)$ semidefinit und ausgeartet, dann lässt sich keine allgemein gültige Aussage treffen.

Beweis. (a) Sei $v \in \mathbf{R}^n$ beliebig. Betrachte die Hilfsfunktion $g(t) = f(a + tv)$, die in einer Umgebung des Nullpunktes in \mathbf{R} definiert und differenzierbar ist. Falls f ein lokales Extremum bei a hat, dann hat g eines bei 0. Also folgt $0 = g'(0) = f'(a)v$ (Kettenregel), und weil v beliebig war, ist $f'(a) = 0$.

(b) Fall (i): Sei $B = f''(a)$ positiv definit. Dann nimmt die stetige Funktion $Q(u) = \frac{1}{2}B(u, u)$ auf der kompakten Menge $K = \{u : |u| = 1\}$ ihr Minimum, etwa μ , an, und dieses ist positiv, denn B ist positiv definit. Weil Q homogen vom Grad 2 ist, folgt $Q(v) \geq \mu|v|^2$ für alle $v \in \mathbf{R}^n$. Aus 6.5 bekommt man nun

$$f(a+v) - f(a) = Q(v) + |v|^2\varphi(v) \geq |v|^2(\mu + \varphi(v)). \quad (1)$$

Wegen $\lim_{v \rightarrow 0} \varphi(v) = 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|\varphi(v)| < \mu$ und somit $\mu + \varphi(v) > 0$ für alle v mit $|v| < \delta$. Nun zeigt (1), dass $f(x) > f(a)$ für alle $x = a+v \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$. Also ist a ein striktes lokales Minimum für f . Falls B negativ definit ist, schliesst man analog (ersetze f durch $-f$).

Fall (ii): Wenn B indefinit ist, gibt es Vektoren u und v , sodass $B(u, u) < 0 < B(v, v)$. Dann hat die Funktion $g_1(t) := f(a + tu)$ an der Stelle $s = 0$ ein striktes lokales Maximum, und die Funktion $g_2(t) := f(a + tv)$ an der Stelle $t = 0$ ein striktes lokales Minimum; denn nach der Kettenregel ist $g_1'(t) = f'(a+tu)u$ und daher $g_1''(0) = B(u, u) < 0$, und ähnlich für g_2 . Folglich ist $f(a + tu) < f(a) < f(a + tv)$ für alle genügend kleinen $t > 0$ und somit ist a ein Sattelpunkt.

Fall (iii): Das sieht man schon an bekannten Beispielen in der Dimension 1.

6.8. Praktisches Vorgehen. Bei der Anwendung von Satz 6.7 hat man in einem ersten Schritt die kritischen Punkte von f zu bestimmen, also das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^n} = 0$$

zu lösen. Das ist im Allgemeinen schwierig; denn es handelt sich um n nichtlineare Gleichungen für n Unbekannte. Hat man einen kritischen Punkt a gefunden, so berechnet man als Nächstes die symmetrische Matrix

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(a) \right)$$

und prüft, ob sie positiv oder negativ definit ist. Hierfür gibt es Methoden der linearen Algebra. Für $n = 2$ oder $n = 3$ ist es oft praktisch, das *Hauptminorenkriterium* zu verwenden, das besagt: $A = (a_{ij})$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv sind;

$$a_{11} > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \det A > 0.$$

6.9. Satz (Allgemeine Taylorformel). Sei $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbf{R}^m)$, $a \in U$ und $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(a) \subset U$. Dann gilt für alle $x = a + v \in B_\delta(a)$:

$$f(a+v) = f(a) + \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{i_1, \dots, i_j=1}^n \frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_j}}(a) v^{i_1} \dots v^{i_j} \right) + |v|^k \varphi(v),$$

mit $\lim_{v \rightarrow 0} \varphi(v) = 0$.

Beweis. Wie in Satz 6.5 durch Anwenden der gewöhnlichen Taylorformel auf die Hilfsfunktion $g(t) = f(a + tv)$. Details als Aufgabe.

§7. Der Umkehrsatz

7.1. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, sei $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ im Punkt $a \in U$ strikt differenzierbar und sei $f'(a): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ injektiv (insbesondere ist also $n \leq m$). Dann gibt es ein $\delta > 0$ und ein $C > 0$, sodass $B_\delta(a) \subset U$ und für alle $x, y \in B_\delta(a)$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \geq C|x - y|. \quad (1)$$

Insbesondere ist f auf $B_\delta(a)$ injektiv.

Beweis. Sei $T = f'(a)$. Die stetige Funktion $h(u) := |Tu|$ nimmt auf der kompakten Menge $K = \{u : |u| = 1\}$ ihr Minimum, etwa μ , an, und dieses ist positiv, weil T nach Voraussetzung injektiv ist. Hieraus schliesst man dann wie üblich $|Tv| \geq \mu|v|$ für alle $v \in \mathbf{R}^n$. Aus der strikten Differenzierbarkeit (4.7.3) folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|T(x - y)| - |f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(y) - T(x - y)| = |x - y| |\psi(x, y)|,$$

und somit

$$|f(x) - f(y)| \geq |T(x - y)| - |x - y| |\psi(x, y)| \geq |x - y| (\mu - |\psi(x, y)|), \quad (2)$$

für alle $x, y \in U$. Wegen der Offenheit von U und $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \psi(x, y) = 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(a) \subset U$ und $|\psi(x, y)| < \mu/2$ für alle $x, y \in B_\delta(a)$. Nun folgt (1) aus (2) mit $C := \mu/2$.

Bemerkungen. (a) Wie eine leichte Modifikation des Beweises zeigt, kann man für C eine beliebige positive Zahl kleiner als μ wählen, wenn man nur δ geeignet verändert.

(b) Falls f nur differenzierbar, aber nicht strikt differenzierbar in a ist, so folgt aus der Injektivität von $f'(a)$ noch nicht, dass f in einer Umgebung von a injektiv ist. Beispiel: Die Funktion $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist in $a = 0$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 1$, aber in keiner noch so kleinen Umgebung von 0 injektiv.

7.2. Der Fixpunktsatz. Sei $A \subset \mathbf{R}^n$ abgeschlossen und $F: A \rightarrow A$ eine dehnungsbeschränkte Abbildung mit einer Lipschitz-Konstanten $L < 1$. Dann konvergiert die induktiv definierte Folge

$$x_0 = a \in A \text{ beliebig, } x_{k+1} = F(x_k)$$

gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt p von F in A , und es gilt die Fehlerabschätzung

$$|p - x_k| \leq \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$



Beweis. Angenommen, p und q sind Fixpunkte von F in A . Dann gilt $|p - q| = |F(p) - F(q)| \leq L|p - q|$, und wegen $L < 1$ folgt $p = q$. Also hat F höchstens einen Fixpunkt in A . Zum Beweis der Existenz schätzen wir ab:

$$|x_{k+1} - x_k| = |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq L|x_k - x_{k-1}| \leq \dots \leq L^k|x_1 - x_0|.$$

Daraus folgt durch Vergleich mit der geometrischen Reihe nach 2.7.2 die Existenz von

$$p := x_0 + \sum_0^\infty (x_{k+1} - x_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Es gilt $p \in A$, weil alle $x_k \in A$ sind und A abgeschlossen ist, und $F(p) = \lim F(x_k) = \lim x_{k+1} = p$, weil F stetig ist. Schliesslich folgt die Fehlerabschätzung aus

$$|p - x_k| = \left| \sum_{j=k}^\infty (x_{j+1} - x_j) \right| \leq \sum_{j=k}^\infty L^j |x_1 - x_0| = L^k \sum_{j=0}^\infty L^j |x_1 - x_0| = \frac{L^k}{1 - L} |x_1 - x_0|.$$

7.3. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$ im Punkt $a \in U$ strikt differenzierbar und mit $f'(a): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ surjektiv (insbesondere ist also $n \geq m \geq 1$), und sei $b = f(a)$. Dann ist b ein innerer Punkt von $f(U)$, d.h., es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $f(U) \supset B_\varepsilon(b)$.

Beweis. Sei $T = f'(a): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$. Aus der linearen Algebra weiss man: Es gibt eine lineare Abbildung $S: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, sodass $T \circ S = \text{Id}_{\mathbf{R}^m}$; insbesondere ist $S \neq 0$. (Zum Beispiel wähle man Vektoren $u_1, \dots, u_m \in \mathbf{R}^n$ mit $Tu_j = e_j \in \mathbf{R}^m$ und definiere S durch $Se_j = u_j$ und lineare Fortsetzung auf ganz \mathbf{R}^m .) Betrachte die Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - f(a) - T(x - a)$. Offenbar ist h wieder strikt differenzierbar in a , und es gilt $h(a) = 0$ und $h'(a) = 0$. Also ist auch die Abbildung $g: U \rightarrow \mathbf{R}^n$,

$$g(x) := a - Sh(x),$$

in a strikt differenzierbar, erfüllt $g(a) = a$, und nach der Kettenregel ist $g'(a) = -Sh'(a) = 0$. Nach Satz 4.8 (angewandt auf g und $\varepsilon = 1/2$) gibt es ein $\delta > 0$, sodass $B_\delta(a) \subset U$ und

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2| \tag{1}$$

für alle $x_1, x_2 \in B_\delta(a)$. Nun sei

$$\varepsilon := \frac{\delta}{2|S|}.$$

Wir wollen zeigen, dass $f(B_\delta(a)) \supset B_\varepsilon(b)$. Dazu sei $y \in B_\varepsilon(b)$, sei

$$r := 2|S||y - b| < \delta, \tag{2}$$

und sei $A := \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| \leq r\} \subset B_\delta(a)$ die abgeschlossene Kugel mit Radius r . Weiter sei

$$F(x) := g(x) + S(y - b).$$

Dann gilt $F(A) \subset A$; denn aus $|x - a| \leq r$ folgt

$$\begin{aligned} |F(x) - a| &= |g(x) + S(y - b) - a| \leq |g(x) - a| + |S(y - b)| \\ &\leq |g(x) - g(a)| + |S| |y - b| && \text{(wegen } g(a) = a \text{ und 2.12.1)} \\ &\leq \frac{1}{2}|x - a| + \frac{r}{2} && \text{(nach (1) und (2))} \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$|F(x_1) - F(x_2)| = |g(x_1) - g(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$$

nach (1). Also erfüllen A und F die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes, und es gibt daher genau ein $p \in A$ mit $F(p) = p$. Durch Anwenden von T folgt wegen $T \circ S = \text{Id}$:

$$\begin{aligned} 0 &= T(p - F(p)) = Tp - Tg(p) - (y - b) = Tp - Ta + h(p) - (y - b) \\ &= Tp - Ta + f(p) - f(a) - T(p - a) - (y - b) = f(p) - y, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

7.4. Korollar. Falls f von der Klasse \mathcal{C}^1 und $f'(a)$ für alle $a \in U$ surjektiv ist, dann ist $f(U)$ eine offene Menge.

7.5. Der Umkehrsatz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ im Punkt a strikt differenzierbar und $f'(a)$ bijektiv. Dann gibt es offene Umgebungen $U_a \subset U$ von a und V_b von $b = f(a)$, sodass $f : U_a \rightarrow V_b$ bijektiv ist. Die Umkehrabbildung $g = (f|_{U_a})^{-1} : V_b \rightarrow U_a$ ist in b strikt differenzierbar mit Ableitung $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

Beweis. Nach Satz 4.8 können wir, eventuell nach Verkleinern von U , annehmen, dass f auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt, also insbesondere stetig ist. Nach Satz 7.1 können wir gegebenenfalls U noch weiter verkleinern und annehmen, dass 7.1.1 gilt, also auch

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{C}|f(x_1) - f(x_2)|, \quad (1)$$

für alle $x_1, x_2 \in U$. Nach Satz 7.3 gibt es eine offene Umgebung V_b von b mit $V_b \subset f(U)$. Wegen der Stetigkeit von f ist $U_a := f^{-1}(V_b) \subset U$ eine offene Umgebung von a , und $f : U_a \rightarrow V_b$ ist bijektiv. Sei $g : V_b \rightarrow U_a$ die Umkehrabbildung. Dann folgt aus (1) für alle $y_1, y_2 \in V_b$:

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq \frac{1}{C}|f(g(y_1)) - f(g(y_2))| = \frac{1}{C}|y_1 - y_2|. \quad (2)$$

Also ist g dehnungsbeschränkt, und somit insbesondere stetig.

Sei $T = f'(a)$. Wir zeigen, dass g in b strikt differenzierbar ist mit Ableitung T^{-1} . Dazu seien $y_1, y_2 \in V_b$, und $x_i = g(y_i) \in U_a$ die Bildpunkte unter g . Dann ist

$$\begin{aligned} |g(y_1) - g(y_2) - T^{-1}(y_1 - y_2)| &= |T^{-1}[Tg(y_1) - Tg(y_2) - (y_1 - y_2)]| \\ &\leq |T^{-1}| |Tg(y_1) - Tg(y_2) - (y_1 - y_2)| \\ &= |T^{-1}| |x_1 - x_2| |\psi(x_1, x_2)| && \text{(nach 4.7.3)} \\ &= |T^{-1}| |g(y_1) - g(y_2)| |\psi(x_1, x_2)| \\ &\leq \frac{|T^{-1}|}{C} |y_1 - y_2| |\psi(g(y_1), g(y_2))|. && \text{(nach (2))} \end{aligned}$$

Also bleibt nur zu zeigen, dass

$$\lim_{(y_1, y_2) \rightarrow (b, b)} \psi(g(y_1), g(y_2)) = 0. \quad (3)$$

Wegen der Stetigkeit von g in b ist $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = a$. Damit folgt (3) aus 4.7.3, und der Satz ist bewiesen.

7.6. Definition. Seien U und V offene Mengen im \mathbf{R}^n . Eine bijektive Abbildung $f : U \rightarrow V$ heisst ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus, wenn sie und ihre Umkehrabbildung $g = f^{-1} : V \rightarrow U$ von der Klasse \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) sind. In diesem Fall folgt mit der Kettenregel durch Differenzieren der Gleichungen $f \circ g = \text{Id}_V$, dass

$$g'(y) = f'(g(y))^{-1}, \quad (1)$$

für alle $y \in V$.

7.7. Umkehrsatz für \mathcal{C}^k -Abbildungen. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine \mathcal{C}^k -Abbildung ($k \geq 1$) und $f'(a)$ invertierbar für ein $a \in U$. Dann gibt es offene Umgebungen $U_a \subset U$ von a und V_b von $b = f(a)$, sodass $f|_{U_a} : U_a \rightarrow V_b$ ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus ist.

Beweis. Sei zunächst $k = 1$. Dann ist $f' : U \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ stetig und $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ ist offen in $\text{Mat}_n(\mathbf{R})$. Also ist das Urbild $U' \subset U$ von $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ unter f' eine offene Umgebung von a . Wähle $U_a \subset U'$ und V_b wie im Umkehrsatz, und sei $g = (f|_{U_a})^{-1}$. Wir zeigen, dass g in jedem $y \in V_b$ strikt differenzierbar ist. Sei $x = g(y) \in U_a$. Weil $f'(x)$ invertierbar ist, gibt es nach dem Umkehrsatz 7.5 (angewandt auf U_a und x) eine offene Umgebung $U_x \subset U_a$ und eine offene Umgebung $V_y \subset V_b$, sodass $(f|_{U_x})^{-1} : V_y \rightarrow U_x$ in y strikt differenzierbar ist. Nun ist aber $(f|_{U_x})^{-1} = g|_{V_y}$, also ist nach dem Umkehrsatz g in y strikt differenzierbar, und weil $y \in V_b$ beliebig war, folgt $g \in \mathcal{C}^1(V_b, \mathbf{R}^n)$ nach Satz 4.9.

Jetzt zeigen wir durch Induktion nach k : Wenn f von der Klasse \mathcal{C}^k ist, dann auch g . Der Induktionsanfang ist bereits erledigt. Es sei $i : \text{GL}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{R})$ die Inversionsabbildung. Dann ist i eine rationale Abbildung, also insbesondere von der Klasse \mathcal{C}^∞ . Nach 7.6.1 gilt

$$g' = i \circ f' \circ g. \quad (1)$$

Für den Induktionsschritt sei $f \in \mathcal{C}^{k+1}(U, \mathbf{R}^m)$, also f' von der Klasse \mathcal{C}^k . Insbesondere ist f aber auch von der Klasse \mathcal{C}^k , also ist nach Induktionsvoraussetzung g von der Klasse \mathcal{C}^k , und (1) zeigt, dass g' als Zusammensetzung von \mathcal{C}^k -Abbildungen wieder \mathcal{C}^k ist. Also ist g von der Klasse \mathcal{C}^{k+1} .

7.8. Korollar. Für eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ zwischen offenen Mengen im \mathbf{R}^n sind äquivalent:

- (i) f ist ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus;
- (ii) f ist eine bijektive \mathcal{C}^k -Abbildung und $f'(x)$ ist invertierbar, für alle $x \in U$.

Beweis. Die Implikation (i) \implies (ii) ist klar nach 7.6, und in (ii) \implies (i) zeigt man mit derselben Schlussweise wie in 7.7, dass f^{-1} von der Klasse \mathcal{C}^k ist.

Bemerkung. Aus $f : U \rightarrow V$ bijektiv und \mathcal{C}^1 folgt noch nicht, dass die Umkehrabbildung differenzierbar ist. Beispiel: $U = V = \mathbf{R}$ und $f(x) = x^3$.



§8. Implizite Funktionen, Lagrangesche Multiplikatoren

8.1. Partielle Ableitungen nach Gruppen von Variablen. Sei $n = m + k$. Wir betrachten den \mathbf{R}^n als das Produkt $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k$ und bezeichnen die Koordinatenfunktionen entsprechend mit $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^k$. Für eine auf einer offenen Menge $W \subset \mathbf{R}^n$ differenzierbare Funktion $g: W \rightarrow \mathbf{R}^r$ schreiben wir die Ableitung als Blockmatrix in einer der Formen

$$g' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = (g_x \quad g_y),$$

sodass also

$$g_x = \left(\frac{\partial g^l}{\partial x^i} \right), \quad g_y = \left(\frac{\partial g^l}{\partial y^j} \right)$$

Matrizen der Grösse $r \times m$ bzw. $r \times k$ sind.

8.2. Satz über implizite Funktionen. Sei $W \subset \mathbf{R}^{m+k} = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k$ offen, $(a, b) \in W$, und $g: W \rightarrow \mathbf{R}^k$ eine \mathcal{C}^q -Abbildung ($q \geq 1$), sodass die $k \times k$ -Matrix $g_y(a, b)$ invertierbar ist. Sei $c = g(a, b)$. Dann gibt es offene Umgebungen U_a von a und V_b von b mit $U_a \times V_b \subset W$ und folgender Eigenschaft: Für jedes $x \in U_a$ hat die Gleichung $g(x, y) = c$ genau eine Lösung $y = f(x)$ in V_b und die so definierte Abbildung $f: U_a \rightarrow V_b$ ist von der Klasse \mathcal{C}^q mit Ableitung

$$f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)). \quad (1)$$

Beweis. Betrachte die Abbildung $G: W \rightarrow \mathbf{R}^{m+k}$, $G(x, y) = (x, g(x, y))$. Dann ist (in Blockmatrixschreibweise)

$$G' = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ g_x & g_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Aus der Invertierbarkeit von $g_y(a, b)$ und bekannten Sätzen der linearen Algebra folgt, dass $G'(a, b)$ invertierbar ist. Also gibt es nach dem Umkehrsatz 7.7 eine offene Umgebung $W_{(a,b)}$ von (a, b) und eine offene Umgebung $W_{(a,c)}$ von $G(a, b) = (a, c)$, sodass $G: W_{(a,b)} \rightarrow W_{(a,c)}$ ein \mathcal{C}^q -Diffeomorphismus ist. Nach Verkleinern können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $W_{(a,b)} = U_a \times V_b$, mit offenen Umgebungen U_a von a und V_b von b . Wegen der speziellen Form von G hat die Umkehrabbildung $G^{-1} = H: W_{(a,c)} \rightarrow U_a \times V_b$ die Form $H(x, z) = (x, h(x, z))$, wobei h eine \mathcal{C}^q -Abbildung ist. Also gilt nun für alle $(x, y) \in U_a \times V_b$:

$$\begin{aligned} g(x, y) = c &\iff G(x, y) = (x, c) \\ &\iff (x, y) = H(x, c) = (x, h(x, c)) \\ &\iff y = f(x) := h(x, c), \end{aligned}$$

und f ist von der Klasse \mathcal{C}^q , weil h es ist. Es bleibt noch (1) zu zeigen. Dazu differenzieren wir die Gleichung $g(x, f(x)) = (g \circ H)(x, c) = c$ nach x in Richtung eines

beliebigen Vektors $u \in \mathbf{R}^m$ und bekommen mit der Kettenregel

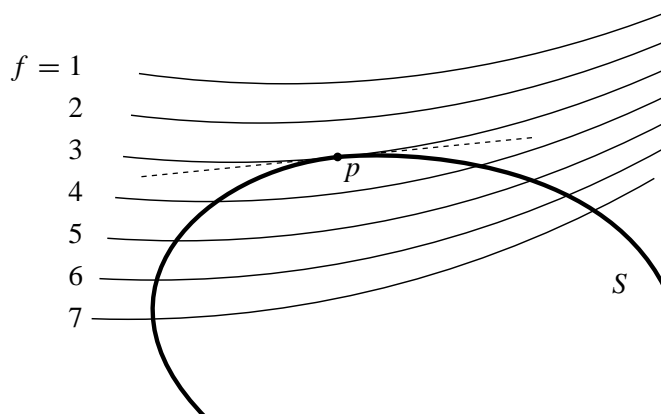
$$\begin{aligned} 0 &= g'(x, f(x)) H'(x, c) \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (g_x(x, f(x)) \quad g_y(x, f(x))) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_m & 0 \\ h_x(x, c) & h_z(x, c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (g_x(x, f(x)) \quad g_y(x, f(x))) \begin{pmatrix} u \\ f'(x)u \end{pmatrix} \\ &= g_x(x, f(x))u + g_y(x, f(x)) f'(x)u. \end{aligned}$$

Nun ist $G'(x, y)$ invertierbar für alle $(x, y) \in U_a \times V_b$, und wegen (2) gilt dasselbe für $g_y(x, y)$. Also folgt (1) durch Multiplikation von links mit $g_y(x, f(x))^{-1}$.

8.3. Extrema mit Nebenbedingungen. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{C}^1(U)$. Gesucht sind die Extrema von f , wobei aber x nicht frei in U variieren darf, sondern nur in einer Teilmenge $S \subset U$. Diese Teilmenge soll sich ihrerseits beschreiben lassen als

$$S = \{x \in U : g(x) = c\}, \quad (1)$$

wobei $g : U \rightarrow \mathbf{R}^k$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung ist. Im Fall $k = 1, n = 2$ könnte das folgendermassen aussehen:



Anschaulich hat also $f|_S$ sein Extremum dort, wo sich die Kurven $g = c$ und $f = \text{const}$ berühren, also ihre Tangentialgeraden (gestrichelt) gleich sind. Dieser Begriff muss allerdings erst definiert werden:

8.4. Definition. Sei $S \subset \mathbf{R}^n$ und $p \in S$. Der *Tangentialraum* von S im Punkt p , geschrieben $T_p(S)$, ist die Menge aller Vektoren $v \in \mathbf{R}^n$ mit folgender Eigenschaft: Es gibt ein offenes Intervall $I \subset \mathbf{R}$, das den Nullpunkt enthält und eine stetig differenzierbare, ganz in S verlaufende Kurve $\gamma : I \rightarrow S$, sodass $\gamma(0) = p$ und $v = \dot{\gamma}(0)$. Der *affine Tangentialraum* ist $p + T_p(S)$.

Im Allgemeinen ist $T_p(S)$ trotz des Namens kein Untervektorraum und $p + T_p(S)$ kein affiner Unterraum. Jedoch gilt der wichtige

8.5. Satz. Sei S wie in 8.3.1 beschrieben, und es sei $g'(p)$ surjektiv, d.h.,

$$\text{Rang} \left(\frac{\partial g^j}{\partial x^i}(p) \right) = k. \quad (1)$$

Dann ist $T_p(S) = \text{Ker } g'(p)$. Insbesondere ist also der Tangentialraum ein Untervektorraum der Dimension $n - k$ und der affine Tangentialraum ein affiner Unterraum derselben Dimension.

Beweis. Sei $v \in T_p(S)$, etwa $v = \dot{\gamma}(0)$ mit γ wie oben. Dann ist $g(\gamma(t)) = c$ für alle $t \in I$. Also folgt durch Differenzieren mit der Kettenregel

$$0 = \left. \frac{d}{dt} g(\gamma(t)) \right|_{t=0} = g'(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = g'(p)v,$$

und somit $T_p(S) \subset \text{Ker } g'(p)$. Umgekehrt sei $w \in \text{Ker } g'(p)$. Wegen (1) ist eine $k \times k$ -Unterdeterminante von $g'(p)$ ungleich Null, und eventuell nach Ummumerieren der Koordinaten kann man annehmen, dass

$$\det \left(\frac{\partial g^i}{\partial x^{m+j}}(p) \right)_{i,j=1,\dots,k} \neq 0,$$

wobei $m = n - k$. Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir $y^j = x^{m+j}$ und identifizieren $\mathbf{R}^n \cong \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k$ wie in 8.1, und schreiben entsprechend $p = (a, b)$. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 8.2 erfüllt. Mit den dort eingeführten Bezeichnungen, und wenn wir noch $w = (u, v) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^k$ in seine Komponenten zerlegen, gilt

$$w \in \text{Ker } g'(p) \iff g_x(p)u + g_y(p)v = 0. \quad (2)$$

Nun betrachte die Kurve $\gamma(t) = (a + tu, f(a + tu))$, wobei $f : U_a \rightarrow V_b$ wie in 8.2 definiert ist. Dann gilt $\gamma(0) = (a, f(a)) = (a, b) = p$ und γ verläuft in S , weil $g(\gamma(t)) = g(a + tu, f(a + tu)) = c$. Weiter ist wegen 8.2.1 und (2)

$$\dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} u \\ f'(a)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -g_y(p)^{-1}g_x(p)u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = w,$$

und folglich $w \in T_p(S)$, wie behauptet. Schliesslich folgt die Dimensionsaussage aus bekannten Sätzen der linearen Algebra.

8.6. Satz über die Lagrangeschen Multiplikatoren. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $S \subset U$ wie in 8.3.1 beschrieben, und es sei $g'(x)$ surjektiv für alle $x \in U$. Ferner sei $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ eine C^1 -Funktion, und $f|_S$ habe im Punkt $p \in S$ ein lokales Extremum. Dann gilt $T_p(S) \subset \text{Ker } f'(p)$, und folglich gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, die sogenannten Lagrangeschen Multiplikatoren, sodass

$$f'(p) = \sum_{j=1}^k \lambda_j g'_j(p). \quad (1)$$

(Um nicht mit dem Symbol für die Ableitung in Konflikt zu geraten, schreiben wir hier die Komponenten von g ausnahmsweise als untere Indizes.)

Beweis. Sei $v \in T_p(S)$, etwa $v = \dot{\gamma}(0)$ mit einer in S verlaufenden Kurve γ mit $\gamma(0) = p$. Dann hat die differenzierbare Funktion einer Variablen $h(t) = f(\gamma(t))$ an der Stelle $t = 0$ ein lokales Extremum. Folglich gilt $0 = h'(0) = f'(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = f'(p)v$, also ist $T_p(S) \subset \text{Ker } f'(p)$. Nach Satz 8.5 ist $T_p(S) = \text{Ker } g'(p)$. Also haben die linearen Gleichungssysteme

$$g'(p)x = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f'(p) \\ g'(p) \end{pmatrix} x = 0 \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

dieselben Lösungen. Es folgt

$$\text{Rang } g'(p) = \text{Rang} \begin{pmatrix} f'(p) \\ g'(p) \end{pmatrix},$$

die Zeilenräume der beiden Matrizen sind also gleich, und daher ist $f'(p)$ eine Linearkombination der Zeilenvektoren von $g'(p)$, wie behauptet.

Bemerkungen. (a) Der Satz liefert nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Extremums. Hinreichende Bedingungen lassen sich angeben, sind aber relativ kompliziert (siehe unten).

(b) Sei $N = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = f(p)\}$ die Niveaulfläche von f durch p . Falls $f'(p) \neq 0$, dann ist $\text{Ker } f'(p) = T_p(N)$ nach Satz 8.5, und somit $T_p(S) \subset T_p(N)$. Also sind die Tangentialräume an S und N in p parallel, und wenn zusätzlich $k = 1$ ist, also die in 8.3 betrachtete Situation vorliegt, sogar gleich, wie das dortige Bild nahelegt. Wenn $f'(p) = 0$ ist, kann man jedoch über den Tangentialraum von N in p wenig sagen.

(c) Ohne die Voraussetzung der Surjektivität von $g'(x)$ ist der Satz falsch, wie man an dem Beispiel $U = \mathbf{R}^2$, $S = \{(x, y) : y^2 = x^3\}$ (Neilsche Parabel), $f(x, y) = x$ sehen kann.

8.7. Anwendung: Eigenwerte symmetrischer Matrizen. Sei $U = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $S = \{x : \sum (x^i)^2 = 1\}$ die Euklidische Einheitssphäre und $A = (a_{ij})$ eine reelle symmetrische Matrix. Wir suchen die Extrema der Funktion $f(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i x^j$ auf S . Die Voraussetzungen von Satz 8.6 sind erfüllt; denn $g'(x) = 2x^T \neq 0$ für alle $x \in U$. Weil S kompakt ist, nimmt f auf S sein Maximum an, etwa in p . Also gibt es ein $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $f'(p) = \lambda g'(p)$. Für df bekommt man wegen der Symmetrie von A :

$$df = \sum_{i,j} a_{ij} (x^i dx^j + x^j dx^i) = 2 \sum_{i,j} a_{ij} x^j dx^i,$$

also $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 2 \sum_j a_{ij} x^j$ oder $f'(x) = 2(Ax)^T$. Daher ist nun $f'(p) = \lambda g'(p)$ äquivalent zu $Ap = \lambda p$; d.h., p ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , und wir haben gezeigt: *Jede reelle symmetrische Matrix hat einen reellen Eigenwert.*

Schliesslich geben wir noch ohne Beweis den folgenden Satz an, der eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums unter Nebenbedingungen liefert.

8.8. Satz. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $S \subset U$ wie in 8.3.1 beschrieben mit g von der Klasse \mathcal{C}^2 , und es sei $g'(x)$ surjektiv für alle $x \in U$. Ferner sei $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion und sei $p \in S$ ein Punkt mit 8.6.1. Die Bilinearform

$$f''(p) - \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j''(p)$$

eingeschränkt auf den Tangentialraum $T_p(S)$ sei positiv (negativ) definit. Dann hat f auf S in p ein striktes lokales Minimum (Maximum) in folgendem Sinne: Es gibt eine offene Umgebung $B_\delta(p)$ von p , sodass für alle $x \in S \cap B_\delta(p)$ mit $x \neq p$ gilt: $f(x) > f(p)$ ($f(x) < f(p)$).

§9. Pfaffsche Formen und Kurvenintegrale

9.1. Definition. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen. Eine *Pfaffsche Form* oder *Differentialform erster Stufe* oder kurz *1-Form* auf U ist eine Abbildung $\omega : U \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $(x, v) \mapsto \omega(x; v)$, sodass für jedes feste $x \in U$ die Abbildung $v \mapsto \omega(x; v)$ linear ist. Diese Abbildung, nennen wir sie etwa $F(x)$, ist also eine Linearform auf \mathbf{R}^n , d.h., ein Element von $(\mathbf{R}^n)^*$, und daher kann man eine Pfaffsche Form auch als eine Abbildung $F : U \rightarrow (\mathbf{R}^n)^*$ auffassen, was manchmal vorteilhaft ist. Der Zusammenhang zwischen beiden Auffassungen wird durch die Formeln

$$\omega(x; v) = \langle F(x), v \rangle \quad \text{bzw.} \quad F(x) = \omega(x; -) \quad (1)$$

hergestellt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kanonische Bilinearform auf $(\mathbf{R}^n)^* \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ ist.

* In der Bezeichnung der linearen Algebra ist $F = \omega_l$ die durch Linkseinsetzen entstehende Abbildung. *

Ein Vergleich mit 5.1 zeigt, dass zum Beispiel das Differential df einer Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U)$ eine Pfaffsche Form auf U ist, wobei hier $F = f'$ gilt. Nicht jede Pfaffsche Form ist jedoch von dieser Art, und das Problem, welche Pfaffschen Formen Differentiale sind, wird uns in diesem und dem nächsten Paragraphen beschäftigen.

Die Menge aller Pfaffschen Formen auf U bezeichnen wir mit $\Omega^1(U)$. Mit den üblichen Operationen ist das ein Vektorraum über \mathbf{R} . Weiter definieren wir für eine \mathbf{R} -wertige Funktion g auf U das Produkt $g\omega$ durch

$$(g\omega)(x; v) = g(x)\omega(x; v), \quad (2)$$

vergleiche auch 5.1.2. Damit gilt dann

9.2. Lemma. (a) *Mit der üblichen Addition von Funktionen und der durch 9.1.2 gegebenen Multiplikation mit Funktionen ist $\Omega^1(U)$ ein Modul über dem Ring aller Funktionen auf U . Jedes $\omega \in \Omega^1(U)$ lässt sich schreiben als*

$$\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx^i \quad (1)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen f_i auf U ; d.h., $\Omega^1(U)$ ist ein freier Modul vom Rang n und die dx^1, \dots, dx^n bilden eine Basis.

(b) *Identifiziert man $(\mathbf{R}^n)^*$ mit dem Raum der Zeilenvektoren, dann ist die durch ω nach 9.1.1 bestimmte Abbildung F durch $F = (f_1, \dots, f_n)$ gegeben.*

(c) *Ein $\omega \in \Omega^1(U)$ ist genau dann von der Klasse \mathcal{C}^k , wenn die Funktionen f_i in (1) von der Klasse \mathcal{C}^k sind.*

Beweis. Die Moduleigenschaft verifiziert man durch Nachrechnen. Zum Beweis der Existenz von (1) definiere $f_i(x) := \omega(x; e_i)$. Dann gilt wegen 5.2.3

$$\begin{aligned} \omega(x; v) &= \omega(x; \sum_{i=1}^n e_i v^i) = \sum_{i=1}^n \omega(x; e_i) v^i = \sum_{i=1}^n f_i(x) v^i \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(x) dx^i(x; v) = \left(\sum_{i=1}^n f_i dx^i \right)(x; v) \end{aligned} \quad (2)$$

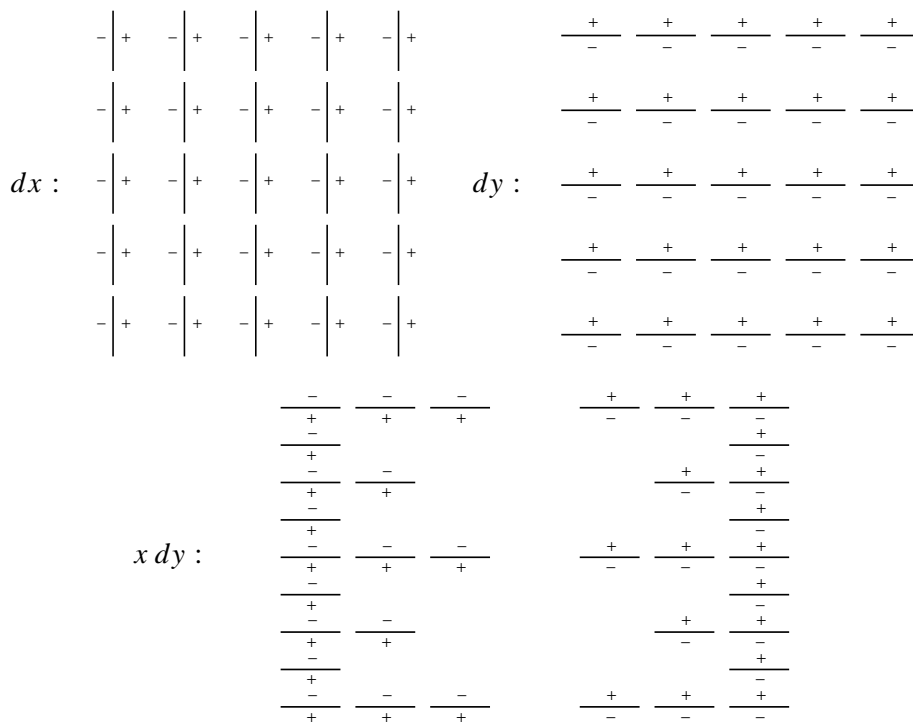
für alle $(x, v) \in U \times \mathbf{R}^n$. Also gilt (1). Die Eindeutigkeit zeigt man wie im Beweis von Satz 5.2. Nun folgen (b) und (c) sofort aus (2).

9.3. Veranschaulichung von Pfaffschen Formen, Beispiele. Betrachten wir zunächst eine Linearform $0 \neq T : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, also $T(v) = \sum \alpha_i v^i$ wobei $\alpha_i = T(e_i)$. Dann bestimmt T eine Zerlegung des $\mathbf{R}^n = H_- \cup H_0 \cup H_+$ in die Hyperebene $H_0 = \text{Ker } T$ und die offenen Halbräume

$$H_+ = \{x \in \mathbf{R}^n : T(x) > 0\}, \quad H_- = \{x \in \mathbf{R}^n : T(x) < 0\}.$$

Wie kann man sich T veranschaulichen? Antwort: Durch das Paar paralleler Hyperebenen H_0 und $H_1 = \{x \in \mathbf{R}^n : T(x) = 1\}$; denn aus H_0 und H_1 kann man T folgendermassen rekonstruieren: Wenn $v \in H_0$, dann ist $T(v) = 0$. Falls dagegen $v \notin H_0$, dann schneidet die Gerade $\mathbf{R}v$ die Hyperebene H_1 in genau einem Punkt λv mit $\lambda \neq 0$. Also ist $T(\lambda v) = 1$ oder $T(v) = \lambda^{-1}$. Das zeigt auch: T ist umso grösser, je näher H_0 und H_1 beieinanderliegen. Das erinnert an die Situation bei einem Plattenkondensator, wo die elektrische Feldstärke zwischen den Platten umgekehrt proportional zum Plattenabstand ist.

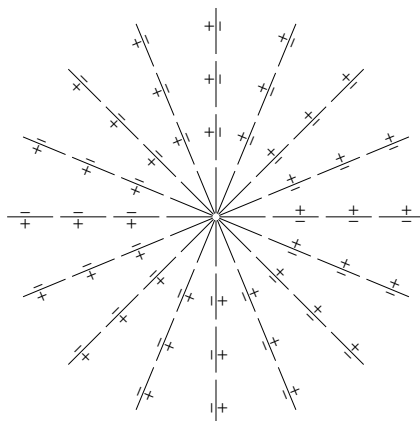
Nun sei ω eine beliebige 1-Form auf $U \subset \mathbf{R}^n$. Dann hat man nach 9.1.1 in jedem Punkt eine Linearform $F(x)$, also müsste man in jedem Punkt ein Paar paralleler Hyperebenen einzeichnen. (Physikalisch kann man sich ein elektrisches Feld als aus kleinen Plattenkondensatoren zusammengesetzt vorstellen). Leider lässt sich so etwas schlecht zeichnen. Es ist daher besser, ein Feld von Hyperebenenstücken zu zeichnen, die im betreffenden Punkt x den Kern von $F(x)$ darstellen) und durch die *Dichte* dieser Hyperebenenstücke die Grösse von F (physikalisch also die Feldstärke) anzudeuten. Dabei ist noch durch $+$ und $-$ anzugeben, welches der positive bzw. negative Halbraum ist, der durch die Linearform $F(x)$ bestimmt wird. Das entspricht auch genau dem elektrischen Bild, wenn man sich $+$ und $-$ als Ladungen vorstellt. Auf diese Weise bekommt man etwa folgende Bilder:



Eine besondere Rolle spielt die sogenannte *Winkelform* Θ auf $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, die durch

$$\Theta = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} \tag{1}$$

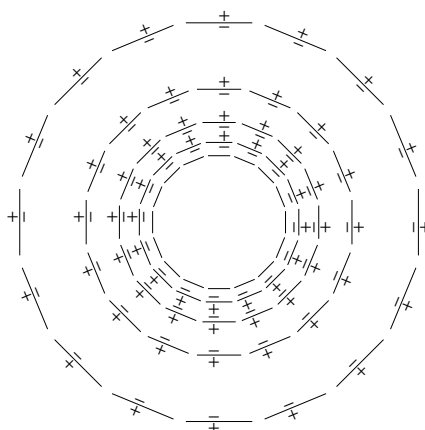
definiert ist und folgende Veranschaulichung hat:



Schliesslich zeigen wir noch die Veranschaulichung der 1-Form

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right), \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, die physikalisch das Gravitationsfeld einer Punktmasse bzw. das elektrische Feld einer Punktladung beschreibt.



9.4. Zurückholen unter Abbildungen. Eine wichtige Eigenschaft von Pfaffschen Formen, die zum Beispiel Vektorfelder nicht haben, ist ihr gutes Verhalten unter differenzierbaren Abbildungen. Seien $U \subset \mathbf{R}^n$ und $V \subset \mathbf{R}^m$ offen und sei $\Phi: V \rightarrow U$ eine \mathcal{C}^1 -Abbildung. Für eine Pfaffsche Form $\omega \in \Omega^1(U)$ sei $\Phi^*(\omega) \in \Omega^1(V)$ durch

$$\Phi^*(\omega)(x; v) = \omega(\Phi(x); \Phi'(x)v) \quad ((x, v) \in V \times \mathbf{R}^n) \quad (1)$$

definiert. Wegen der Linearität von $\Phi'(x)$ ist das wieder linear in $v \in \mathbf{R}^n$. Man sagt auch, $\Phi^*(\omega)$ entstehe aus ω durch *Zurückholen* unter der Abbildung Φ . Also ist

$$\Phi^*: \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^1(V)$$

eine Abbildung in der umgekehrten Richtung wie Φ .

Ein wichtiger Spezialfall ist $V \subset U$ und Φ die Inklusionsabbildung, also $\Phi(x) = x$ und $\Phi'(x) = \text{Id}$. Dann zeigt (1), dass $\Phi^*(\omega) = \omega|_{V \times \mathbf{R}^n}$ einfach die Einschränkung von ω auf $V \times \mathbf{R}^n$ ist. Wir nennen dies auch die *Einschränkung von ω auf V* und schreiben kurz $\omega|_V$.

9.5. Satz. (a) Für das Zurückholen von Differentialformen gelten die Regeln

$$\Phi^*(\omega_1 + \omega_2) = \Phi^*(\omega_1) + \Phi^*(\omega_2), \quad (1)$$

$$\Phi^*(g\omega) = (g \circ \Phi)\Phi^*(\omega), \quad (2)$$

$$\Phi^*(df) = d(f \circ \Phi), \quad (3)$$

$$(\Phi \circ \Psi)^*(\omega) = \Psi^*\Phi^*(\omega), \quad (4)$$

wobei $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(U)$, g eine Funktion auf U , $f \in \mathcal{C}^1(U)$, und $\Psi: W \rightarrow V$ und $\Phi: V \rightarrow U$ ($W \subset \mathbf{R}^k$ und $V \subset \mathbf{R}^m$ offen) \mathcal{C}^1 -Abbildungen sind.

(b) Seien x^1, \dots, x^n die Koordinaten auf \mathbf{R}^n und $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x^1, \dots, x^n) dx^i$ wie in 9.2.1 dargestellt. Ferner sei $\Phi = (g^1, \dots, g^n)$. Dann ist

$$\Phi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n f_i(g^1, \dots, g^n) dg^i, \quad (5)$$

in Worten: Man bekommt $\Phi^*(\omega)$, indem man im Koordinatenausdruck von ω die x^i durch die i -te Komponente g^i von Φ und die dx^i durch dg^i ersetzt.

Beweis. (a) Die Eigenschaften (1) und (2) folgen sofort aus der Definition, und (3) und (4) aus der Kettenregel. Für (5) beachte man, dass $x^i \circ \Phi = g^i$ ist. Dann folgt (5) aus (1)–(3).

9.6. Integration von Pfaffschen Formen. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und sei $\omega \in \Omega^1(U)$ eine stetige Pfaffsche Form. Ferner sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ eine stückweise glatte Kurve wie in 3.3. Dann ist $\gamma^*(\omega) = \omega(\gamma; \dot{\gamma}) dt = h dt$ eine Pfaffsche Form auf $[a, b]$, wobei die Funktion h auf $[a, b]$ stückweise stetig ist. Um das zu sehen, schreibe man $\omega = \sum f_i dx^i$ wie in 9.2. Dann ist $h(t) = \sum f_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t)$. Also ist es sinnvoll, das Integral (auch *Kurvenintegral* genannt) von ω über γ durch

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \gamma^*(\omega) = \int_a^b h(t) dt$$

zu definieren. Dieses Integral ist \mathbf{R} -linear in ω , also

$$\int_{\gamma} (\lambda\omega_1 + \omega_2) = \lambda \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2. \quad (\lambda \in \mathbf{R})$$

Bei Zusammensetzung von Kurven gilt

$$\int_{\alpha \bullet \beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega, \quad (1)$$

wie sofort aus den Definitionen folgt.

Als Nächstes betrachten wir eine Umparametrisierung $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ und zeigen:

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \begin{cases} \int_{\gamma} \omega & \text{falls } \varphi \text{ orientierungserhaltend ist,} \\ - \int_{\gamma} \omega & \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend ist.} \end{cases} \quad (2)$$

Dazu sei wieder $\gamma^*(\omega) = h(t) dt$. Dann ist wegen 9.5.4 $(\gamma \circ \varphi)^*(\omega) = \varphi^*\gamma^*(\omega) = \varphi^*(h(t) dt) = h(\varphi(s))\varphi'(s) ds$. Also ist nach der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \circ \varphi} \omega &= \int_c^d h(\varphi(s))\varphi'(s) ds = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} h(t) dt \\ &= \begin{cases} \int_a^b h(t) dt = \int_{\gamma} \omega \\ \int_b^a h(t) dt = -\int_a^b h(t) dt = -\int_{\gamma} \omega \end{cases} \end{aligned}$$

je nachdem, ob φ orientierungserhaltend oder -umkehrend ist.

Schliesslich zeigen wir ein *Analogon der Integraldreiecksungleichung*. Dazu sei $|\omega(\gamma(t); v)| \leq C|v|$ für alle $t \in [a, b]$ und alle $v \in \mathbf{R}^n$, in anderen Worten: Die Norm der Linearform $\omega(\gamma(t); -)$ sei durch C beschränkt. Dann gilt

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq C \cdot L(\gamma). \quad (3)$$

Zum Beweis benützt man die gewöhnliche Integraldreiecksungleichung und die Definition der Bogenlänge:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \omega \right| &= \left| \int_a^b \omega(\gamma(t); \dot{\gamma}(t)) dt \right| \leq \int_a^b |\omega(\gamma(t); \dot{\gamma}(t))| dt \\ &\leq \int_a^b C|\dot{\gamma}(t)| dt = C \cdot L(\gamma). \end{aligned}$$

9.7. Verallgemeinerter Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ stückweise glatt. Dann gilt

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a));$$

insbesondere hängt $\int_{\gamma} df$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab.

Beweis. Falls γ stetig differenzierbar ist, folgt das sofort aus 9.5.3 und dem gewöhnlichen Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, weil dann die Funktion $f \circ \gamma$ stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist:

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b \gamma^*(df) = \int_a^b d(f \circ \gamma) = f \circ \gamma \Big|_a^b = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Im Allgemeinen ist $\gamma = \gamma_1 \bullet \dots \bullet \gamma_r$ eine Zusammensetzung von stetig differenzierbaren Kurven, wobei $\gamma_i: [a_{i-1}, a_i] \rightarrow U$ und $\gamma_i(a_{i-1}) = \gamma_{i-1}(a_{i-1})$ wegen der Stetigkeit von γ . Also ist nun

$$\int_{\gamma} df = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma_i} df = \sum_{i=1}^r f(\gamma_i(a_i)) - f(\gamma_i(a_{i-1})) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

weil sich die Zwischenterme wegheben.

9.8. Exaktheit, Stammfunktionen. Eine stetige Pfaffsche Form ω auf U heisst *exakt*, falls es eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(U)$ gibt mit $\omega = df$. Wie im Fall einer Variablen nennt man eine solche Funktion dann eine *Stammfunktion* von ω . Falls auch g eine Stammfunktion von ω ist, so gilt $d(f-g) = df - dg = 0$ und daher ist $f-g$ nach Satz 5.8 lokal konstant, und falls U zusammenhängend ist, nach Satz 5.10 sogar konstant. Nach 9.5.3 gehen beim Zurückholen exakte Formen wieder in exakte Formen über:

$$\omega \text{ exakt} \implies \Phi^*(\omega) \text{ exakt.} \quad (1)$$

Im Gegensatz zum Fall einer Variablen hat eine stetige 1-Form im Allgemeinen keine Stammfunktion. Notwendige und hinreichende Bedingungen gibt der folgende Satz. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ heisst *geschlossen*, wenn $\gamma(b) = \gamma(a)$.

9.9. Satz (Integralkriterium für Exaktheit). Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und zusammenhängend und ω eine stetige Pfaffsche Form auf U . Dann sind äquivalent:

- (i) ω ist exakt;
- (ii) $\int_{\gamma} \omega = 0$ für alle geschlossenen stückweise glatten Kurven in U .

Beweis. (i) \implies (ii): Klar nach Satz 9.7.

(ii) \implies (i): Sei $p \in U$ ein fest gewählter Punkt. Da U zusammenhängend ist, gibt es nach Satz 5.12 zu jedem $x \in U$ einen Streckenzug von p nach x , also nach geeigneter Parametrisierung eine stückweise glatte Kurve γ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma(1) = x$. Wir behaupten, dass

$$f(x) := \int_{\gamma} \omega$$

eine wohldefinierte Funktion auf U ist, also nur von x und nicht von der Wahl von γ abhängt. Um das zu sehen, sei auch $\beta : [0, 1] \rightarrow U$ eine stückweise glatte Kurve mit $\beta(0) = p$ und $\beta(1) = x$. Sei $\tilde{\beta}(s) = \beta(2-s)$ ($s \in [1, 2]$). Dann gilt $\tilde{\beta}(1) = x$, und $\tilde{\beta}$ entsteht aus β durch den orientierungsumkehrenden Parameterwechsel $\varphi(s) = 2-s$. Ferner ist die zusammengesetzte Kurve $\gamma \bullet \tilde{\beta}$ geschlossen. Also gilt nach 9.6.1 und 9.6.2

$$0 = \int_{\gamma \bullet \tilde{\beta}} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\beta}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\beta} \omega.$$

Hieraus folgt insbesondere auch: Sind x und y zwei Punkte in U , sodass die ganze Strecke $[x, y]$ von x nach y in U liegt, dann ist

$$f(y) - f(x) = \int_{[x,y]} \omega := \int_0^1 \omega(x + t(y-x); y-x) dt$$

nur von x und y abhängig.

Nun zeigen wir $df = \omega$. Dazu sei $a \in U$ und r so klein, dass $B_r(a) \subset U$. Ferner sei F die zu ω gehörige Abbildung in den Dualraum wie in 9.1.1. Weil Kugeln konvex sind, gilt dann für alle $x, y \in B_r(a)$ auch $[x, y] \subset B_r(a)$. Setzen wir noch $v = y - x$, so folgt

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) - \omega(a; y-x) &= \int_0^1 \omega(x + tv; v) dt - \omega(a; v) \\ &= \int_0^1 (\omega(x + tv; v) - \omega(a; v)) dt \\ &= \int_0^1 \langle F(x + tv) - F(a), v \rangle dt. \end{aligned}$$

Weil F nach 9.2(b) stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass $|F(z) - F(a)| < \varepsilon$ für alle $z \in B_\delta(a)$. Daher folgt nun für alle $x, y \in B_\delta(a)$:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - \omega(a; y - x)| &\leq \int_0^1 |\langle F(x + tv) - F(a), v \rangle| dt \\ &\leq \int_0^1 |F(x + tv) - F(a)| \cdot |v| dt \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon |v| dt = \varepsilon |y - x|. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass f in a strikt differenzierbar ist, mit Ableitung $f'(a) = \omega(a; -)$. Weil $a \in U$ beliebig war, folgt $df = \omega$, wie behauptet.

9.10. Beispiele. (a) Die 1-Form $\omega = x dy$ auf \mathbf{R}^2 ist nicht exakt. Dazu betrachte man das Integral von ω über den gegen den Uhrzeiger durchlaufenen Rand ∂R des Rechtecks R mit den Ecken (a_1, a_2) , (b_1, a_2) , (b_1, b_2) und (a_1, b_2) . Eine leichte Rechnung ergibt

$$\int_{\partial R} x dy = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

Hieraus folgt noch mehr, nämlich: Es gibt auch keine offenen nichtleeren Teilmengen $V \subset \mathbf{R}^2$, sodass $\omega|_V$ exakt ist; denn ein solches V enthält immer ein genügend kleines Rechteck wie oben.

(b) Die Winkelform Θ auf $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ist ebenfalls nicht exakt; denn für die geschlossene Kreislinie γ_r vom Radius r , gegeben durch $\gamma_r(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), gilt

$$\int_{\gamma_r} \Theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \cos t d(\sin t) - r^2 \sin t d(\cos t)}{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \int_0^{2\pi} 1 \cdot dt = 2\pi. \quad (1)$$

Hier liegen die Verhältnisse jedoch anders als beim vorigen Beispiel, denn auf geeigneten offenen Teilmengen von U ist Θ sehr wohl exakt. Zum Beispiel gilt auf $V := \{(x, y) : x \neq 0\}$:

$$d \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{x dy - y dx}{x^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \Theta|_V,$$

und ähnlich auf $W = \{(x, y) : y \neq 0\}$:

$$\Theta|_W = d\left(-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right).$$

Weil $V \cup W = U$, sieht man: Θ ist *lokal exakt* in dem in 4.10 erklärten Sinne, d.h., jeder Punkt $a \in U$ hat eine offene Umgebung U_a , sodass $\Theta|_{U_a}$ exakt ist. *Exaktheit ist also keine lokale, sondern eine globale Eigenschaft.* Es ist sehr wichtig sich klarzumachen, dass bei der Frage nach der Exaktheit einer Pfaffschen Form die Menge U , auf der man sie betrachtet, eine wesentliche Rolle spielt.



§10. Differentialformen zweiter Stufe

10.1. Definition. Die in Satz 9.9 angegebene Bedingung ist als hinreichendes Kriterium für die Exaktheit einer Pfaffschen Form ω zwar theoretisch befriedigend, aber praktisch wertlos, denn niemand kann alle Kurvenintegrale $\int_\gamma \omega$ ausrechnen. Ein Ziel dieses Paragraphen ist es, brauchbare hinreichende Bedingungen für Exaktheit zu finden. Teil eines solchen Kriteriums ist das Verschwinden der äusseren Ableitung von ω . Dies ist eine sogenannte 2-Form; daher definieren wir erst diese Objekte.

Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen. Eine *alternierende Differentialform zweiter Stufe* oder kurz eine *2-Form* auf U ist eine Funktion $\alpha : U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, sodass für alle $x \in U$ die Abbildung $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $(v, w) \mapsto \alpha(x; v, w)$, bilinear und alternierend ist. Wir bezeichnen die Menge aller 2-Formen auf U mit $\Omega^2(U)$. Mit den üblichen Operationen ist das ein Vektorraum über \mathbf{R} , und mit

$$(g\alpha)(x; v, w) = g(x)\alpha(x; v, w)$$

ein Modul über dem Ring der \mathbf{R} -wertigen Funktionen auf U (vgl. auch die Definition von $g\omega$ in 9.1.2).

Beispielsweise sei $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ eine alternierende Bilinearform. Dann liefert die Definition $\alpha(x; v, w) = B(v, w)$ eine 2-Form auf ganz \mathbf{R}^n , genannt die durch B gegebene konstante 2-Form.

Allgemeinere Beispiele bekommt man folgendermassen. Seien $\omega, \eta \in \Omega^1(U)$. Das *äussere Produkt* von ω und η ist die durch

$$(\omega \wedge \eta)(x; v, w) = \omega(x; v)\eta(x; w) - \omega(x; w)\eta(x; v) \quad (1)$$

definierte 2-Form $\omega \wedge \eta \in \Omega^2(U)$. Für dieses Produkt gelten die leicht zu verifizierenden Rechenregeln

$$\omega \wedge \omega = 0, \quad (2)$$

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta, \quad (3)$$

$$(f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta). \quad (4)$$

Beispielsweise bekommt man, wenn etwa $\omega = \sum f_i dx^i$ und $\eta = \sum g_j dx^j$ wie in 9.2,

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \left(\sum_i f_i dx^i \right) \wedge \left(\sum_j g_j dx^j \right) = \sum_{i,j} f_i g_j dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i < j} (f_i g_j - f_j g_i) dx^i \wedge dx^j. \end{aligned}$$

Wie bei Pfaffschen Formen definieren wir das *Zurückholen* einer 2-Form $\alpha \in \Omega^2(U)$ unter einer differenzierbaren Abbildung $\Phi : V \rightarrow U$ ($V \subset \mathbf{R}^m$ offen) durch die Formel

$$(\Phi^*\alpha)(x; v, w) = \alpha(\Phi(x); \Phi'(x)v, \Phi'(x)w). \quad (5)$$

Ähnlich wie in Satz 9.2 hat man nun eine Basis von $\Omega^2(U)$ und Regeln für das Zurückholen:

10.2. Satz. (a) Seien x^1, \dots, x^n die Koordinatenfunktionen des \mathbf{R}^n . Dann lässt sich jedes $\alpha \in \Omega^2(U)$ schreiben als

$$\alpha = \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad (1)$$

mit eindeutig bestimmten Funktionen f_{ij} auf U ; d.h., $\Omega^2(U)$ ist ein freier Modul vom Rang $n(n-1)/2$ über dem Ring aller Funktionen auf U und die 2-Formen $dx^i \wedge dx^j$ ($i < j$) bilden eine Basis. Die 2-Form α ist genau dann von der Klasse \mathcal{C}^k , wenn dies für die f_{ij} der Fall ist.

(b) Für das Zurückholen von 2-Formen gelten die Regeln

$$\Phi^*(\alpha_1 + \alpha_2) = \Phi^*\alpha_1 + \Phi^*\alpha_2, \quad (2)$$

$$\Phi^*(g\alpha) = (g \circ \Phi) \Phi^*\alpha, \quad (3)$$

$$\Phi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \Phi^*\omega_1 \wedge \Phi^*\omega_2, \quad (4)$$

$$(\Phi \circ \Psi)^*(\alpha) = \Psi^*\Phi^*(\alpha), \quad (5)$$

Beweis. (a) Zum Beweis der Eindeutigkeit sei α wie in (1) dargestellt. Dann gilt für $k < l$:

$$\begin{aligned} \alpha(x; e_k, e_l) &= \sum_{i < j} f_{ij}(x) (dx^i \wedge dx^j)(x; e_k, e_l) \\ &= \sum_{i < j} f_{ij}(x) (dx^i(x; e_k) dx^j(x; e_l) - dx^i(x; e_l) dx^j(x; e_k)) \\ &= \sum_{i < j} f_{ij}(x) (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j) = f_{kl}(x); \end{aligned} \quad (6)$$

denn wegen $i < j$ und $k < l$ ist $\delta_k^i \delta_l^j = 0$. Umgekehrt definiere man f_{ij} durch (6). Dann gilt für alle $v = \sum e_i v^i$ und $w = \sum e_j w^j$, weil $\alpha(x; -, -)$ bilinear und alternierend ist:

$$\begin{aligned} \alpha(x; u, v) &= \sum_{i,j=1}^n \alpha(x; e_i, e_j) v^i w^j \\ &= \sum_{i < j} f_{ij}(x) (v^i w^j - w^i v^j) \\ &= \sum_{i < j} f_{ij}(x) (dx^i(x; v) dx^j(x; w) - dx^i(x; w) dx^j(x; v)) \\ &= \left(\sum_{i < j} f_{ij} dx^i \wedge dx^j \right) (x; v, w). \end{aligned} \quad (7)$$

Schliesslich sieht man aus (7), dass α genau dann von der Klasse \mathcal{C}^k ist, wenn das für die Funktionen f_{ij} der Fall ist.

(b) Regel (2) und (3) sind klar bzw. leichte Folgerungen aus der Definition. Regel (4) beweist man durch Auswerten beider Seiten auf $(x; v, w)$ und Einsetzen der Definition 10.1.1 für das äussere Produkt. Schliesslich folgt (5) wieder durch Auswerten beider Seiten und Benützung der Kettenregel. Die Details werden dem Leser überlassen.

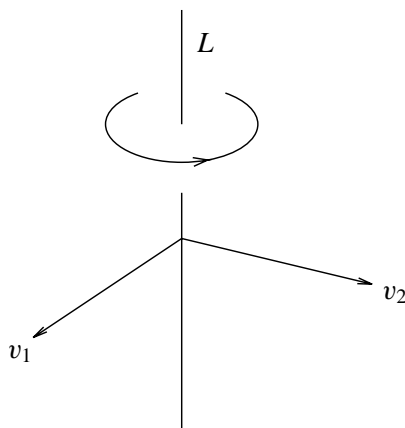
10.3. Veranschaulichung von 2-Formen. Wir versuchen nun, ähnlich wie in 9.3 eine Veranschaulichung von 2-Formen zu geben. Das ist in Dimension $n > 3$ kaum mehr möglich, daher betrachten wir nur den Fall $n = 3$. Zunächst sei $b: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ eine alternierende Bilinearform auf \mathbf{R}^3 , und sei $b \neq 0$. Dann gibt es also Vektoren $u_1, u_2 \in \mathbf{R}^3$, sodass $b(u_1, u_2) \neq 0$, und indem man u_1 durch ein geeignetes skalares Vielfaches ersetzt, kann man sogar $b(u_1, u_2) = 1$ erreichen. Hieraus folgt bereits, dass u_1 und u_2 linear unabhängig sind; denn wäre etwa $u_2 = \lambda u_1$, so würde folgen $b(u_1, u_2) = \lambda b(u_1, u_1) = 0$, weil b alternierend ist, Widerspruch. Als Nächstes zeigen wir: *Es gibt eine Basis v_1, v_2, v_3 , bezüglich der b folgende Matrix hat:*

$$(b(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Dazu ergänze man u_1, u_2 irgendwie zu einer Basis u_1, u_2, u_3 des \mathbf{R}^3 , setze $b_{ij} = b(u_i, u_j)$ und weiter $v_1 := u_1, v_2 := u_2, v_3 := u_3 + b_{23}u_1 + b_{31}u_2$. Dann rechnet man leicht nach, dass diese Basis die verlangten Eigenschaften hat. Hieraus folgt weiter: Der Nullraum von b , also der Untervektorraum

$$L := \{v \in \mathbf{R}^3 : b(x, v) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbf{R}^3\}$$

ist eindimensional, nämlich gleich der von v_3 aufgespannten Geraden. Durch b wird weiter ein *Drehsinn um die Gerade L* herum anschaulich dadurch festgelegt, dass man v_1 nach v_2 auf kürzestem Weg dreht.



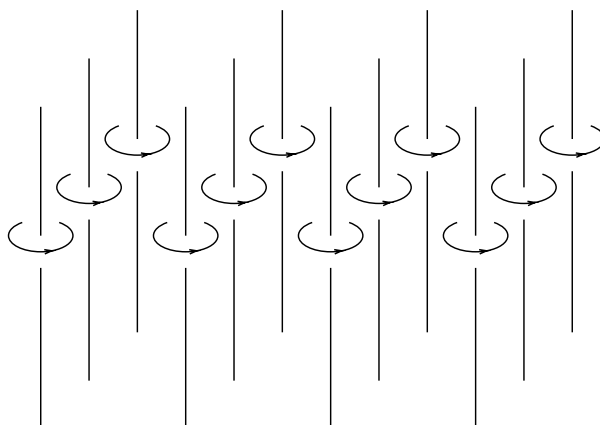
(Genauer muss man sagen: b bestimmt eine Orientierung im Quotientenraum \mathbf{R}^3/L .) Dass dieser Drehsinn nur von b und nicht von der zufälligen Wahl der Basis v_i abhängt, sieht man folgendermassen: Sei w_i eine weitere Basis, sodass $b(w_i, w_j)$ die Form (1) hat, und sei A die Übergangsmatrix zwischen diesen Basen, also $w_j = \sum_i v_i a_{ij}$. Wegen $L = \mathbf{R}w_3$ ist dann $w_3 = a_{33}v_3$, und weiter folgt aus $b(v_1, v_2) = 1 = b(w_1, w_2)$ durch Nachrechnen, dass

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 1.$$

Das besagt insbesondere, dass v_1, v_2 bzw. w_1, w_2 im Vektorraum \mathbf{R}^3/L dieselbe Orientierung definieren, also der Drehsinn um L herum derselbe ist. Man kann sich überlegen, dass b umgekehrt durch L und den Drehsinn bis auf einen positiven Faktor eindeutig bestimmt ist. Das Paar $(L, \text{Drehsinn})$ entspricht also bei einer Linearform

T der Angabe von $H_0 = \text{Ker } T$ und der Festlegung des positiven Halbraumes wie in 9.3. Anders als dort, wo man T aus dem Paar paralleler Hyperebenen H_0, H_1 rekonstruieren konnte, ist es hier nicht möglich, b selber durch ein hinreichend einfaches geometrisches Objekt zu veranschaulichen. Das liegt einfach daran, dass man sich die Menge der Paare von Vektoren u, v mit $b(u, v) = 1$ (das wäre das Analogon zu $H_1 = \{v : T(v) = 1\}$) nicht gut vorstellen kann.

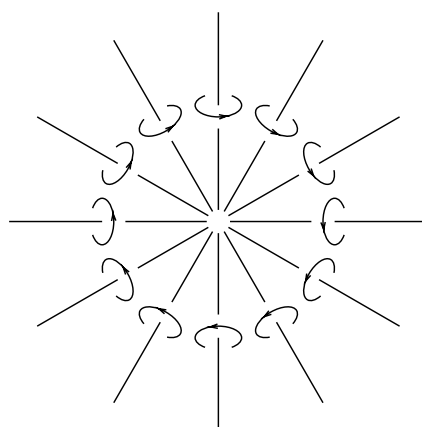
Nun sei $U \subset \mathbf{R}^3$ offen und $\alpha \in \Omega^2(U)$. Dann definiert α in jedem $x \in U$ eine alternierende Bilinearform b_x durch $b_x(v, w) = \alpha(x; v, w)$, die man sich wie oben durch ein Geradenstück durch x mit Drehsinn vorstellen kann. Weiter veranschaulicht man sich, ähnlich wie bei Pfaffschen Formen, die Grösse von α durch die Dichte dieser Geradenstücke, und lässt noch, zum leichteren Zeichnen, die Geradenstücke zu Kurven („Feldlinien“) zusammenfliessen. Im einfachsten Fall $\alpha = dx \wedge dy$ bekommt man etwa folgendes Bild:



Eine besondere Rolle spielt, ähnlich wie die Winkelform in zwei Dimensionen, die *Raumwinkelform*

$$\Omega = \frac{x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

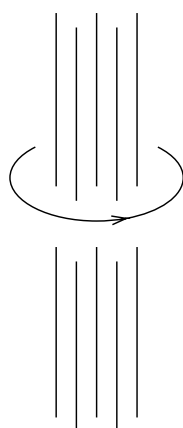
auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$, mit der Veranschaulichung



10.4. 1- und 2-Formen und elektromagnetische Felder. Wie die Ausführungen in 9.3 nahelegen, ist ein elektrisches Feld durch eine 1-Form zu beschreiben, genauer: Ist ein elektrisches Feld in kartesischen Koordinaten durch die Komponenten (E_1, E_2, E_3) gegeben, dann ordnet man ihm die 1-Form

$$E = E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz$$

zu. Magnetfelder sind dagegen mathematisch durch 2-Formen wiederzugeben. Das ist für den einfachsten Fall des Magnetfeldes einer stromdurchflossenen Schleife auf Grund der obigen Betrachtungen schon sehr plausibel. Die oben erklärten Feldlinien sind gerade die üblichen magnetischen Feldlinien, die man etwa durch Eisenfeilspäne sichtbar machen kann, und der Drehsinn um sie herum entspricht gerade dem in der Schleife fließenden Strom:



Im idealisierten Fall einer unendlich langen Spule mit Achse gleich der z -Achse ist die zugehörige 2-Form $B_3 dx \wedge dy$. Allgemeiner ordnet man dem in kartesischen Koordinaten durch (B_1, B_2, B_3) gegebenen Magnetfeld die 2-Form

$$B = B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy$$

zu. Mit dieser Darstellung hat man dann, sowohl für elektrische wie für Magnetfelder, (wegen der Operation des Zurückholens von Differentialformen) *automatisch das richtige Transformationsverhalten bei Umrechnung in andere, auch krummlinige Koordinaten*.

10.5. Die äussere Ableitung. Sei $\omega = \sum f_j dx^j$ eine stetig differenzierbare Pfaffsche Form auf $U \subset \mathbf{R}^n$ und F die zugehörige C^1 -Abbildung von U in den Dualraum wie in 9.1.1. Die *äussere Ableitung* von ω ist definiert als die 2-Form

$$(d\omega)(x; v, w) := \langle F'(x)v, w \rangle - \langle F'(x)w, v \rangle. \quad (1)$$

Für praktische Rechnungen benützt man meist die Formel

$$d\omega = \sum df_j \wedge dx^j, \quad (2)$$

was wegen der universellen Formel 5.2.1 für das Differential und $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$ zu

$$d\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \quad (3)$$

äquivalent ist. Zum Beweis von (2) sei $x \in U$ und $v, w \in \mathbf{R}^n$. Dann gilt nach Definition des äusseren Produkts

$$\begin{aligned} \left(\sum df_j \wedge dx^j \right)(x; v, w) &= \sum df_j(x; v) dx^j(x; w) - df_j(x; w) dx^j(x; v) \\ &= \sum \frac{\partial f_j}{\partial x^i} v^i w^j - \frac{\partial f_j}{\partial x^i} w^i v^j \\ &= \langle F'(x)v, w \rangle - \langle F'(x)w, v \rangle = (d\omega)(x; v, w). \end{aligned}$$

Nach Satz 10.2 und (3) ist klar, dass $d\omega$ von der Klasse \mathcal{C}^{k-1} ist, wenn ω von der Klasse \mathcal{C}^k war.

10.6. Satz. Für die äussere Ableitung gelten die folgenden Regeln:

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2, \quad (1)$$

$$d(g\omega) = dg \wedge \omega + g d\omega, \quad (g \in \mathcal{C}^1(U)) \quad (2)$$

$$d(df) = 0, \quad (f \in \mathcal{C}^2(U)) \quad (3)$$

$$\Phi^*(d\omega) = d(\Phi^*\omega). \quad (4)$$

Dabei sind $\omega, \omega_1, \omega_2$ Pfaffsche Formen auf $U \subset \mathbf{R}^n$, $V \subset \mathbf{R}^m$ offen, und $\Phi: V \rightarrow U$ von der Klasse \mathcal{C}^2 .

Beweis. Regel (1) ist klar. Zum Beweis von (2) benützt man die Produktregel für das Differential einer Funktion sowie die Rechenregeln für das äussere Produkt:

$$\begin{aligned} d(g\omega) &= d\left(\sum (gf_i) dx^i\right) = \sum d(gf_i) \wedge dx^i = \sum ((dg) f_i + g df_i) \wedge dx^i \\ &= dg \wedge \sum f_i dx^i + \sum g df_i \wedge dx^i = dg \wedge \omega + g d\omega. \end{aligned}$$

Regel (3) folgt aus der Symmetrie der zweiten partiellen Ableitungen und 10.5.3, weil jetzt $f_i = \partial f / \partial x^i$. Für (4) sei etwa $\omega = \sum f_i dx^i \in \Omega^1(U)$. Dann ist unter Benützung der vorigen Regeln sowie von Satz 10.2

$$\begin{aligned} \Phi^*(d\omega) &= \Phi^*\left(\sum df_i \wedge dx^i\right) = \sum \Phi^*(df_i) \wedge \Phi^*(dx^i) \quad (\text{nach 10.2.2 und 10.2.4}) \\ &= \sum d(f_i \circ \Phi) \wedge d(x^i \circ \Phi) \quad (\text{nach 9.5.3}) \\ &= d\left(\sum (f_i \circ \Phi) d(x^i \circ \Phi)\right) \quad (\text{nach (1)–(3)}) \\ &= d(\Phi^*\omega). \quad (\text{nach 9.5}) \end{aligned}$$

10.7. Geschlossene Pfaffsche Formen. Eine Pfaffsche Form $\omega \in \Omega^1(U)$ heisst *geschlossen*, falls sie von der Klasse \mathcal{C}^1 und $d\omega = 0$ ist. Schreibt man $\omega = \sum f_j dx^j$ dann bedeutet dies wegen 10.5.3

$$\frac{\partial f_j}{\partial x^i} = \frac{\partial f_i}{\partial x^j}. \quad (1)$$

Beispielsweise hat die Form $x dy$ auf \mathbf{R}^2 die äussere Ableitung $d(x dy) = dx \wedge dy \neq 0$, ist also nicht geschlossen. Dagegen ist die Winkelform Θ geschlossen:

$$\begin{aligned} d\Theta &= d\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \wedge (x dy - y dx) + \frac{1}{x^2 + y^2} d(x dy - y dx) \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left[(-2x dx - 2y dy) \wedge (x dy - y dx) \right] + \frac{2dx \wedge dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \left[-2x^2 dx \wedge dy + 2y^2 dy \wedge dx + 2(x^2 + y^2) dx \wedge dy \right] \\ &= 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Nach 10.6.4 ist klar, dass beim Zurückholen Geschlossenheit erhalten bleibt:

$$\omega \text{ geschlossen} \implies \Phi^*(\omega) \text{ geschlossen.} \quad (3)$$

Nach 10.6.3 gilt: jede exakte 1-Form ist geschlossen, die Bedingung $d\omega = 0$ ist also *notwendig* dafür, dass ω eine Stammfunktion besitzt, also exakt ist:

$$\omega \text{ exakt} \implies \omega \text{ geschlossen.}$$

Diese Bedingung ist rechnerisch leicht nachprüfbar. Es ist auch wichtig zu bemerken, dass — im Gegensatz zur Exaktheit — *die Geschlossenheit einer Pfaffschen Form eine lokale Eigenschaft ist*. Das folgt sofort aus (1); denn wenn (1) in einer Umgebung jedes Punktes $a \in U$ gilt, dann erst recht in a selber, und somit gilt dann (1) auf ganz U . Das zu Anfang des Paragraphen angekündigte Kriterium besagt nun, dass *mit einer Zusatzvoraussetzung an U* aus $d\omega = 0$ auch umgekehrt die Exaktheit folgt:

$$\omega \text{ geschlossen} + \text{Zusatzbedingung an } U \implies \omega \text{ exakt.}$$

Dass hier eine Zusatzbedingung an U erforderlich sein wird, ist einleuchtend, weil ja die Exaktheit nach 9.10(b) eine globale Eigenschaft ist.

Eine dieser Zusatzbedingungen ist die folgende. Wir sagen, U sei *sternförmig* bezüglich eines Punktes $p \in U$, falls für jedes $x \in U$ die gesamte Strecke $[p, x]$ in U enthalten ist. U heisst *sternförmig schlechthin*, wenn es bezüglich *mindestens eines* Punktes sternförmig ist. Konvexe Mengen sind also insbesondere sternförmig, aber nicht umgekehrt. Vielmehr ist eine Menge genau dann konvex, wenn sie bezüglich *jedes* Punktes sternförmig ist.

Nach Satz 5.12 ist ein sternförmiges U insbesondere zusammenhängend, aber die Umkehrung gilt nicht, Beispiel: $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$.

Zum Beweis des hinreichenden Kriteriums brauchen wir den folgenden

10.8. Satz über parameterabhängige Integrale. *Sei $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ ein kompaktes Intervall und $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und sei $g : I \times U \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Für jedes $t \in I$ sei $g_t : U \rightarrow \mathbf{R}$ durch $g_t(x) = g(t, x)$ definiert, und weiter sei $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ durch*

$$f(x) := \int_{\alpha}^{\beta} g(t, x) dt$$

definiert. Dann gilt:

- (a) Die Funktion f ist stetig.
- (b) Sei $g_t \in \mathcal{C}^1(U)$ für alle $t \in I$, und seien die partiellen Ableitungen $\partial g / \partial x^i$ stetig auf $I \times U$. Dann ist $f \in \mathcal{C}^1(U)$ und man bekommt die Ableitung von f durch Differenzieren unter dem Integralzeichen:

$$f'(a)v = \int_{\alpha}^{\beta} (g'_t(a)v) dt \quad (1)$$

für alle $a \in U$ und $v \in \mathbf{R}^n$. Insbesondere ist

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial g}{\partial x^i}(t, a) dt. \quad (2)$$

Beweis. (a) Sei $a \in U$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Zuerst zeigen wir: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass

$$|g(t, x) - g(t, a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in B_\delta(a) \text{ und alle } t \in I. \quad (3)$$

Wir führen den Beweis indirekt: Wäre das nicht der Fall, dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und zu jedem k ein $a_k \in B_{1/k}(a)$ und ein $t_k \in I$, sodass $|g(t_k, a_k) - g(t_k, a)| \geq \varepsilon_0$. Wegen der Kompaktheit von I kann man, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, annehmen, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0 \in I$ existiert. Dann folgt aber durch Grenzübergang und wegen der Stetigkeit von h , dass $\varepsilon_0 \leq |g(t_0, a) - g(t_0, a)| = 0$, Widerspruch.

Mit δ wie oben hat man nun für alle $x \in B_\delta(a)$:

$$|f(x) - f(a)| \leq \int_\alpha^\beta |g(t, x) - g(t, a)| dt \leq \int_\alpha^\beta \varepsilon dt = \varepsilon(\beta - \alpha),$$

und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist f stetig in a .

(b) Sei wieder $a \in U$, sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $\delta > 0$ so klein, dass $|g'_t(x) - g'_t(a)| < \varepsilon$ für alle $t \in I$ und alle $x \in B_\delta(a)$. Ein solches δ existiert nach (3) angewandt auf $\partial g / \partial x^i$ an Stelle von g . Weiter gilt für alle $x, y \in B_\delta(a)$, nach dem Mittelwertsatz angewandt auf die Funktion $s \mapsto g_t(y + s(x - y))$ und der Kettenregel, dass $g_t(x) - g_t(y) = g'_t(\xi)(x - y)$ mit $\xi \in [x, y] \subset B_\delta(a)$. Es folgt

$$\begin{aligned} |g_t(x) - g_t(y) - g'_t(a)(x - y)| &= |g'_t(\xi)(x - y) - g'_t(a)(x - y)| \\ &\leq |g'_t(\xi) - g'_t(a)| \cdot |x - y| \leq \varepsilon|x - y|, \end{aligned}$$

für alle $t \in I$. Hieraus bekommt man nun

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y) - \int_\alpha^\beta g'_t(a)(x - y) dt| &\leq \int_\alpha^\beta |g_t(x) - g_t(y) - g'_t(a)(x - y)| \cdot |x - y| dt \\ &\leq \int_\alpha^\beta \varepsilon|x - y| dt = \varepsilon|x - y|, \end{aligned}$$

für alle $x, y \in B_\delta(a)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, besagt das gerade die strikte Differenzierbarkeit von f an der Stelle a mit der in (1) angegebenen Ableitung. Für $v = e_i$ bekommt man die Formel (2).

10.9. Satz (hinreichendes Exaktheitskriterium). Sei $\omega \in \Omega^1(U)$ geschlossen und $U \subset \mathbf{R}^n$ sternförmig. Dann ist ω exakt.

Beweis. Sei U etwa bezüglich des Punktes p sternförmig. Sei F die zu ω gehörige Abbildung in den Dualraum wie in 9.1.1. Definiere $f: U \rightarrow \mathbf{R}$ durch

$$f(x) = \int_{[p,x]} \omega = \int_0^1 \langle F(p + t(x - p)), x - p \rangle dt.$$

Dann ist f eine wohldefinierte Funktion auf U . Wir zeigen $df = \omega$, indem wir den Satz 10.8 auf $g(t, x) = \langle F(p + t(x - p)), x - p \rangle$ anwenden. Durch Differenzieren nach x in Richtung v bekommt man

$$g'_t(x)v = \langle F'(p + t(x - p))tv, x - p \rangle + \langle F(p + t(x - p)), v \rangle.$$

Wegen $d\omega = 0$ kann man im ersten Term v und $x - p$ vertauschen und erhält mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'_t(x)v &= \langle F'(p + t(x - p))(x - p), tv \rangle + \langle F(p + t(x - p)), v \rangle \\ &= \left[\frac{d}{dt} \langle F(p + t(x - p)), v \rangle \right] t + \langle F(p + t(x - p)), v \rangle \\ &= \dot{\varphi}(t)t + \varphi(t) = \frac{d}{dt}(\varphi(t)t), \end{aligned}$$

wobei $\varphi(t) := \langle F(p + t(x - p)), v \rangle = \omega(p + t(x - p); v)$ gesetzt ist. Nun folgt

$$\begin{aligned} df(x; v) &= f'(x)v = \int_0^1 g'_t(x)v dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi(t)t) dt \\ &= \varphi(t)t \Big|_{t=0}^{t=1} = \varphi(1) = \omega(x; v), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Bemerkung. Die Voraussetzung „ U sternförmig“ in 10.9 ist nur hinreichend, aber keineswegs notwendig dafür, dass alle geschlossenen 1-Formen exakt sind. Zum Beispiel ist $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ bezüglich keines seiner Punkte sternförmig, aber man kann zeigen, dass alle geschlossenen 1-Formen auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ exakt sind.

10.10. Korollar. Sei ω eine geschlossene 1-Form auf U . Dann ist ω lokal exakt, d.h., jeder Punkt von U hat eine Umgebung U_a sodass ω auf U_a exakt ist.

Beweis. Zum Beispiel wähle man für U_a eine offene Kugel $B_\delta(a) \subset U$; diese ist sternförmig bezüglich a (sogar konvex), und daher ist $\omega|_{U_a}$ nach Satz 10.9 exakt.

Als Anwendung der bisher entwickelten Theorie beweisen wir nun den Fundamentalsatz der Algebra. Zuerst ein

10.11. Lemma. Sei $U \subset \mathbf{R}^n$ offen, und seien $g, h : U \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \cong \mathbf{C} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. Sei $f = gh : U \rightarrow \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (komplexe Multiplikation) und sei Θ die Winkelform wie in 9.3.1. Dann gilt die „logarithmische Formel“

$$f^*(\Theta) = g^*(\Theta) + h^*(\Theta).$$

Beweis. Sei $g = g_1 + ig_2$ und $h = h_1 + ih_2$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Nach der Definition der Multiplikation in \mathbf{C} ist

$$f = f_1 + if_2 = (g_1h_1 - g_2h_2) + i(g_1h_2 + g_2h_1).$$

Nach den Regeln für das Zurückholen von Differentialformen ist

$$f^*(\Theta) = \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2} = \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{|f|^2}$$

und analog für $g^*\Theta$ und $h^*\Theta$. Damit folgt nun

$$\begin{aligned} f^*(\Theta) &= \frac{(g_1h_1 - g_2h_2)d(g_1h_2 + g_2h_1) - (g_1h_2 + g_2h_1)d(g_1h_1 - g_2h_2)}{|gh|^2} \\ &= \frac{(h_1^2 + h_2^2)(g_1 dg_2 - g_2 dg_1) + (g_1^2 + g_2^2)(h_1 dh_2 - h_2 dh_1)}{|g|^2|h|^2} \\ &= g^*(\Theta) + h^*(\Theta). \end{aligned}$$

10.12. Fundamentalsatz der Algebra. Jedes komplexe Polynom $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ vom Grad $n \geq 1$ hat eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Sei $R := \max(1, |a_1| + \dots + |a_n|)$ und sei $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| > R\}$. Für $z \in U$ schreiben wir $f(z) = z^n h(z)$, wobei $h(z) := 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$. Dann gilt

$$|h(z) - 1| \leq \left| \frac{a_1}{z} \right| + \dots + \left| \frac{a_n}{z^n} \right| \leq \frac{1}{|z|} (|a_1| + \dots + |a_n|) \leq \frac{R}{|z|} < 1.$$

Also ist h eine Abbildung von U in die offene Kreisscheibe D mit Radius 1 und Mittelpunkt 1.

Nun nehmen wir an, dass f keine Nullstelle in \mathbf{C} hat. Dann ist f eine Abbildung von \mathbf{C} nach $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ und folglich ist nach 10.7.2 und 10.7.3 $f^*(\Theta)$ eine geschlossene 1-Form auf $\mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$. Nach Satz 10.9 ist $f^*(\Theta)$ auf \mathbf{R}^2 exakt; denn \mathbf{R}^2 ist sternförmig. Also ist $f^*(\Theta)$ auch auf U exakt.

Da D konvex ist, ist Θ auf D exakt, und folglich ist auch die 1-Form $h^*(\Theta)$ auf U exakt. Sei $g(z) = z^n$. Durch mehrmaliges Anwenden von Lemma 10.11 sieht man $g^*(\Theta) = n\Theta$, und weiter $f^*(\Theta) = g^*(\Theta) + h^*(\Theta) = n\Theta + h^*(\Theta)$ auf U . Daher folgt nun, dass $n\Theta$ auf U exakt ist. Andererseits ist für $r > R$ die Kreislinie γ_r eine geschlossene Kurve in U und nach 9.10.1

$$\int_{\gamma_r} n\Theta = 2\pi n \neq 0,$$

Widerspruch!

§11. Differentialgleichungen: Definitionen, Beispiele und elementare Lösungsmethoden

11.1. Definition. Unter einer *Differentialgleichung* versteht man eine oder mehrere Gleichungen für eine oder mehrere unbekannte Funktionen, in denen neben den gesuchten Funktionen auch ihre Ableitungen vorkommen. Eine Differentialgleichung heisst *gewöhnlich*, wenn die gesuchten Funktionen nur von einer Variablen abhängen, andernfalls *partiell*. Allgemeine Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen werden wir in §15 beweisen. Im Folgenden betrachten wir eine Reihe von praktisch wichtigen Spezialfällen, wo sich Lösungen durch spezielle Verfahren gewinnen lassen.

(a) Die einfachste Differentialgleichung ist

$$y' = f(x, y)$$

für eine unbekannte Funktion y von x . Dabei sei die Funktion f auf einer offenen Teilmenge D des \mathbf{R}^2 definiert und stetig. Unter einer *Lösung* verstehen wir eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbf{R}$ (wobei $I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall sei), sodass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$.

Die Differentialgleichung lässt sich folgendermassen geometrisch deuten: Zeichne in jedem Punkt $(x, y) \in D$ ein Geradenstück, dessen Steigung gleich $f(x, y)$ ist. Man erhält ein sogenanntes Richtungsfeld. Eine Lösung der Gleichung ist dann eine Funktion φ , deren Graph in jedem Punkt $(x, \varphi(x))$ gerade die durch f dort vorgeschriebene Steigung hat.

(b) Eine naheliegende Verallgemeinerung ist ein System von n Gleichungen für n unbekannte Funktionen y^1, \dots, y^n :

$$\frac{dy^i}{dx} = f^i(x, y^1, \dots, y^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Oft deutet man die unabhängige Variable als die Zeit und schreibt dafür t , und ferner x^i statt y^i , sodass das System dann lautet

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ein solches System heisst *autonom*, wenn die rechte Seite von t nicht abhängt, andernfalls *heteronom* oder zeitabhängig. Ein autonomes System kann man sich anschaulich als ein *Vektorfeld* f auf U vorstellen, also eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$, wobei $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$. Eine Lösung ist dann einfach eine Kurve γ in U , deren Tangentialvektor $\dot{\gamma}(t)$ für jedes t gleich dem durch f vorgeschriebenen Vektor $f(\gamma(t))$ ist. Daher nennt man die Lösungen auch *Integralkurven* von f .

(c) Eine Differentialgleichung n -ter Ordnung für eine unbekannte Funktion, die nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, hat die Form

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}).$$

Ein Beispiel ist der *harmonische Oszillator* $\ddot{x} + 2Q\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, oder die *Pendelgleichung* $\ddot{\vartheta} = -\frac{g}{l} \sin \vartheta$, wobei ϑ der Auslenkungswinkel aus der Ruhelage, l die Pendellänge und g die Erdbeschleunigung ist.

Eine solche Gleichung lässt sich durch Einführung von Hilfsvariablen auf ein System von n Gleichungen erster Ordnung reduzieren, sodass man zumindest für theoretische Zwecke nur Systeme von Gleichungen erster Ordnung zu betrachten braucht:

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \quad \dots, \quad \dot{x}^{n-1} = x^n, \quad \dot{x}^n = f(t, x^1, \dots, x^n).$$

Ist nämlich $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \vdots \\ \gamma^n(t) \end{pmatrix}$ eine Lösung des Systems, dann ist $\gamma^1(t)$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung, und umgekehrt liefert jede Lösung $\alpha(t)$ der ursprünglichen

Gleichung eine Lösung $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \dot{\alpha}(t) \\ \vdots \\ \alpha^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ des Systems.

(d) Auch Systeme von Gleichungen höherer Ordnung lassen auf diese Weise auf Systeme (mit entsprechend mehr Gleichungen) erster Ordnung reduzieren. Zum Beispiel sind die 3 Gleichungen 2. Ordnung der Bewegung eines Massenpunktes in einem Kraftfeld,

$$\ddot{x}^i = f^i(t, x, \dot{x}) \quad (i = 1, 2, 3)$$

äquivalent zu den 6 Gleichungen erster Ordnung

$$\dot{x}^i = y^i, \quad \dot{y}^i = f^i(t, x, y).$$

(e) *Implizite Differentialgleichungen* haben die Form $g(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$. Diese sind viel schwieriger zu behandeln als die bisherigen Beispiele expliziter Gleichungen. Man versucht, sie nach der höchsten auftretenden Ableitung aufzulösen.

(f) Beispiele von *partiellen Differentialgleichungen* sind etwa die partielle Differentialgleichung erster Ordnung $\sum f^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = h(x)$ für die unbekannte Funktion u , oder die Laplace-Gleichung $\sum \frac{\partial^2 u}{(\partial x^i)^2} = 0$. Solche Gleichungen erfordern eine eigene Theorie und werden hier nicht behandelt.

11.2. Die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Eine Gleichung des Typs $y' = f(x, y)$ heisst *linear*, falls f die Form $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ hat, wobei die Funktionen a und b in einem offenen Intervall $I \subset \mathbf{R}$ definiert und stetig seien. Der Bereich D ist jetzt also der Streifen $I \times \mathbf{R}$, und die Gleichung lässt sich bis auf Quadraturen (Berechnung unbestimmter Integrale) explizit lösen:

Satz. Seien I, a, b wie oben, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbf{R}$ beliebig. Dann gibt es genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$ der Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Sie ist gegeben durch

$$\varphi(x) = R(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x R(t)^{-1} b(t) dt \right), \quad (1)$$

wobei

$$R(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right) \quad (2)$$

die sogenannte *Resolvente* ist.

Beweis. Es gilt $R'(x) = a(x)R(x)$ und $R(x_0) = 1$. Damit rechnet man sofort nach, dass das angegebene φ eine Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\tilde{\varphi}$ eine Lösung mit denselben Eigenschaften wie φ . Dann genügt $\psi := \varphi - \tilde{\varphi}$ der Gleichung $\psi'(x) = a(x)\psi(x)$ und der Anfangsbedingung $\psi(x_0) = 0$. Daraus folgt

$$\frac{d}{dx} (R^{-1}\psi) = -\frac{1}{R^2} a R \psi + \frac{1}{R} \psi' = \frac{1}{R} (-a\psi + \psi') = 0.$$

Also ist die Funktion $x \mapsto R(x)^{-1}\psi(x)$ konstant, und wegen $\psi(x_0) = 0$ ist die Konstante gleich 0. Daher ist $\psi = \varphi - \tilde{\varphi} = 0$.

11.3. Gleichungen mit getrennten Variablen. Ein weiterer Fall, in dem sich die Gleichung $y' = f(x, y)$ explizit lösen lässt, liegt vor, wenn f die Form

$$f(x, y) = f(x)g(y)$$

mit stetigen Funktionen $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ und $g: J \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ hat. Dabei seien I und J offene Intervalle. Hier gilt der folgende

Satz. Sei $y' = f(x)g(y)$ eine Gleichung mit getrennten Variablen. Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in I \times J$ ein $\varepsilon > 0$ und eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi:]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\rightarrow J$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Man erhält φ durch Auflösen nach y der Gleichung $G(y) - F(x) = c$, wobei F bzw. G eine Stammfunktion von f bzw. $\frac{1}{g}$ sind und $c = G(y_0) - F(x_0)$ ist.

Beweis. Setze $h(x, y) = G(y) - F(x)$. Dann ist $\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = G'(y_0) = g(y_0)^{-1} \neq 0$. Also gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen 8.2 offene Umgebungen $U \subset I$ von x_0 und $V \subset J$ von y_0 und eine C^1 -Funktion $\varphi: U \rightarrow V$, sodass $y = \varphi(x)$

die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $h(x, y) = c$ in $U \times V$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $U =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ annehmen. Nach 8.2.1 ist

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial h}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \frac{\partial h}{\partial x}(x, \varphi(x)) = \frac{F'(x)}{G'(\varphi(x))} = f(x)g(\varphi(x)),$$

also ist φ eine Lösung der Differentialgleichung. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\psi: U \rightarrow J$ eine weitere Lösung mit $\psi(x_0) = y_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}h(x, \psi(x)) &= \frac{d}{dx}(G(\psi(x)) - F(x)) = \frac{\psi'(x)}{g(\psi(x))} - f(x) \\ &= \frac{f(x)g(\psi(x))}{g(\psi(x))} - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Also ist $h(x, \psi(x)) = h(x_0, \psi(x_0)) = h(x_0, y_0) = c$ für alle $x \in U$. Andererseits ist $G'(y) = g(y)^{-1} \neq 0$ für alle $y \in J$, also ist G streng monoton, insbesondere injektiv. Daher folgt nun aus $G(\varphi(x)) = F(x) + c = G(\psi(x))$, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in U$.

Es ist wichtig zu bemerken, dass im Allgemeinen eine Lösung zu vorgegebenen Anfangsbedingungen (x_0, y_0) nur in einer Umgebung des Punktes x_0 und nicht, wie in Satz 11.2, auf ganz I existiert. Das liegt in der Natur der Sache und nicht etwa an einer schlechten Beweismethode, wie man am Beispiel der Gleichung $y' = y^2$ (siehe 11.7) sehen kann. Vielmehr beruht die Existenz einer Lösung im ganzen Intervall I in Satz 11.2 darauf, dass die rechte Seite der Gleichung (inhomogen-)linear in y ist.

Zur *praktischen Rechnung* geht man folgendermassen vor: Schreibe die Differentialgleichung als $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ und „trenne die Variablen“ durch Multiplizieren mit dx und Dividieren durch $g(y)$. Man erhält $\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$ (jetzt sind die Variablen getrennt), und berechnet dann die Stammfunktionen

$$G(y) = \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx = F(x) + c.$$

Diese Gleichung muss man dann nach y auflösen und c so wählen, dass eine eventuell gegebene Anfangsbedingung erfüllt ist.

11.4. Nochmals die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, Variation der Konstanten. Zur Illustration behandeln wir nochmals die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x). \quad (1)$$

Zuerst lösen wir die sogenannte homogene Gleichung

$$y' = a(x)y \quad (2)$$

mittels Trennung der Variablen. Die Funktion $g(y) = y$ ist auf $J = \mathbf{R}$ nicht überall $\neq 0$, sodass 11.3 nicht ohne weiteres anwendbar ist. Der Bereich $D = I \times \mathbf{R}$ zerfällt

jedoch in die 3 Teilmengen $D_+ = \{(x, y) \in D : y > 0\}$, $D_- = \{(x, y) \in D : y < 0\}$ und $D_0 = I \times \{0\}$. In D_+ ist nach Trennung der Variablen

$$\int \frac{dy}{y} = \log y = \int a(x) dx = F(x) + c,$$

also $y = e^c e^{F(x)} = C e^{F(x)}$ mit einer positiven Konstanten C , wobei F eine Stammfunktion von $a(x)$ sei. In D_- bekommt man dieselbe Lösung, aber mit $C < 0$. Schliesslich ist $y = 0$ trivialerweise eine Lösung, sodass die allgemeine Lösung von (2) lautet

$$y = C e^{F(x)}, \quad (3)$$

mit $C \in \mathbf{R}$ beliebig.

In (1) sind die Variablen nicht getrennt. Hier verwendet man die sogenannte *Methode der Variation der Konstanten*; das heisst, man versucht eine Lösung in der Form (3) zu finden, wobei aber C nicht als konstant, sondern als (noch zu bestimmende) Funktion $C(x)$ betrachtet wird. Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die Gleichung ergibt sich

$$y' = C'(x)e^{F(x)} + C(x)a(x)e^{F(x)} = a(x)C(x)e^{F(x)} + b(x),$$

oder $C'(x) = b(x)e^{-F(x)}$. Also ist

$$C(x) = \int b(x)e^{-F(x)} dx$$

und folglich ist

$$y_p = \left(\int b(x)e^{-F(x)} dx \right) e^{F(x)}$$

eine spezielle („partikuläre“) Lösung der inhomogenen Gleichung (1). Die allgemeine Lösung von (1) ergibt sich nun aus der trivialen aber wichtigen Bemerkung, dass die Differenz von zwei Lösungen von (1) eine Lösung von (2) ist. Also hat die allgemeine Lösung von (1) die Form $y = y_p + y_h$, wobei y_h eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung ist.

11.5. Pfaffsche Gleichungen in zwei Variablen. Die Gleichung $y' = f(x, y)$ lässt sich durch formales Multiplizieren mit dx als $dy - f(x, y) dx = 0$ schreiben, und diese Umschreibung tauchte auch bei der Methode der Trennung der Variablen ganz natürlich auf. Deswegen betrachten wir jetzt allgemeiner sogenannte Pfaffsche Gleichungen.

Sei $U \subset \mathbf{R}^2$ offen und $\omega = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy \in \Omega^1(U)$ eine stetige Pfaffsche Form. Wie in 9.3 erläutert, bestimmt dann ω ein Feld von Geradenstücken, also ein Richtungsfeld auf U (wir sehen jetzt von der Angabe der Vorzeichen bei den Geradenstücken ab). Ordnet man einer Differentialgleichung in Standardform $y' = f(x, y)$ durch formales Multiplizieren mit dx die Pfaffsche Form $dy - f(x, y) dx$ zu, so ist deren Richtungsfeld genau das in 11.1(a) beschriebene; denn ein Vektor v hat die durch ω im Punkt $p = (x, y)$ gegebene Richtung genau dann, wenn $0 = \omega(p; v) = f(p)v^1 - v^2$, also die Steigung der Geraden durch p in Richtung v gleich $v_2/v_1 = f(p)$ ist. Es liegt daher nahe, allgemein folgende Definition zu treffen:

Eine stetig differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ ($I \subset \mathbf{R}$ ein Intervall) heisst eine *Lösung der Pfaffschen Gleichung* $\omega = 0$, wenn $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ und $\dot{\gamma}(t)$

die durch ω in $\gamma(t)$ vorgeschriebene Richtung hat. Wegen $\gamma^*\omega = \omega(\gamma(t); \dot{\gamma}(t)) dt$ bedeutet das also gerade, dass $\gamma^*\omega = 0$.

Wie hängen nun die Lösungen der Gleichung

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

und die Lösungen der zugehörigen Pfaffschen Gleichung

$$dy = f(x, y) dx \quad (2)$$

zusammen? Wenn $y = \varphi(x)$ eine Lösung von (1) ist, dann ist klarerweise $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$ eine von (2). Ist umgekehrt $\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ eine Lösung von (2), dann ist notwendig $\dot{\alpha}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$; denn aus $\dot{\alpha}(t) = 0$ würde wegen

$$\dot{\beta}(t) = f(\alpha(t), \beta(t))\dot{\alpha}(t) \quad (3)$$

folgen, dass $\dot{\gamma}(t) = 0$, im Widerspruch zur Definition einer Lösung. Also ist α streng monoton, und die Umkehrfunktion $\alpha^{-1} = \eta : J = \alpha(I) \rightarrow I$ existiert. Dann ist aber $\varphi = \beta \circ \eta : J \rightarrow \mathbf{R}$ eine Lösung von (1). Zum Beweis verwendet man die Kettenregel und die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion aus dem ersten Semester sowie (3):

$$\varphi'(x) = \dot{\beta}(\eta(x))\eta'(x) = f(\alpha(\eta(x)), \beta(\eta(x)))\dot{\alpha}(\eta(x))\frac{1}{\dot{\alpha}(\eta(x))} = f(x, \varphi(x)).$$

Also sind die Lösungen von (2) geometrisch dieselben wie die von (1), nur hat man bei ihrer Parametrisierung grössere Freiheiten. Das ist oft nützlich.

11.6. Exakte Gleichungen, Eulerscher Multiplikator. Sei $\omega = f_1 dx + f_2 dy \in \Omega^1(U)$ eine stetige Pfaffsche Form auf einer offenen Menge des \mathbf{R}^2 . Ein Punkt $p \in U$ heisst ein *regulärer Punkt* von ω , falls die Linearform $\omega(p; -)$ nicht Null ist, mit anderen Worten: falls $f_1(p)$ und $f_2(p)$ nicht beide Null sind. Andernfalls heisst p ein *singulärer Punkt* von ω . Die Pfaffsche Gleichung $\omega = 0$ heisst *exakt*, falls $\omega = dh$ exakt ist, wobei $h \in \mathcal{C}^1(U)$. Für exakte Gleichungen kann man die Existenz von Lösungen durch jeden regulären Punkt von ω leicht beweisen:

Satz. Sei $\omega = dh$ eine exakte Pfaffsche Form auf $U \subset \mathbf{R}^2$ und sei $p = (a, b) \in U$ ein regulärer Punkt von ω . Dann gibt es Lösungen der Pfaffschen Gleichung $\omega = 0$ durch den Punkt p , und man bekommt sie durch Auflösen der Gleichung $h(x, y) = c$ nach x oder nach y , wobei $c = h(a, b)$.

(Oft ist das Auflösen dieser Gleichung explizit schwierig durchzuführen, und man begnügt sich damit, die Lösungen in impliziter Form $h(x, y) = c$ stehen zu lassen.)

Beweis. Da p ein regulärer Punkt ist, gilt $\frac{\partial h}{\partial y}(p) \neq 0$ oder $\frac{\partial h}{\partial x}(p) \neq 0$. Im ersten Fall kann man nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung $h(x, y) = c$ in der Nähe von a nach y auflösen, etwa durch $y = \varphi(x)$ mit stetig differenzierbarem $\varphi :]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\rightarrow \mathbf{R}$. Definiere $\gamma :]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\rightarrow U$ durch $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$. Dann ist $h(t, \varphi(t)) = c$, also $h \circ \gamma = \text{const}$ und folglich $0 = d(h \circ \gamma) = \gamma^*(dh) = \gamma^*\omega$. Im zweiten Fall vertauscht man die Rollen von x und y .

Leider ist im Allgemeinen eine Pfaffsche Form nicht exakt und der obige Satz also nicht anwendbar. Hier hilft oft die folgende triviale Bemerkung weiter: Sei g

eine auf U nirgends verschwindende stetige Funktion. Dann haben die Pfaffschen Gleichungen $dh = 0$ und $g dh = 0$ dieselben Lösungen; denn sie bestimmen in jedem Punkt dieselben Richtungen. Wenn man also eine Funktion g so finden kann, dass $\omega = g dh$ ist, dann kann man die Pfaffsche Gleichung nach obigem Verfahren lösen. Man nennt eine solche Funktion g einen *Eulerschen Multiplikator* für ω .

Als Beispiel betrachten wir nochmals eine Gleichung mit getrennten Variablen wie in 11.3. Hier ist die zugehörige Pfaffsche Form $\omega = dy - f(x)g(y) dx$ nicht exakt (ausser wenn g von y nicht abhängt), aber $\omega = g(y)\left(\frac{dy}{g(y)} - f(x) dx\right) = g dh$.

Die Strategie zur Lösung einer Pfaffschen Gleichung ist also, ω in der Form $g dh$ zu schreiben. Oft ist das aber nicht auf der ganzen Menge U möglich, wo ω definiert ist, sondern man ist in folgender Situation: Es gibt eine Funktion $g \in C^1(U)$ und eine Funktion $h \in C^1(V)$, wobei $V = \{p \in U : g(p) \neq 0\}$, sodass

$$\omega|_V = g dh. \quad (1)$$

Dann bekommt man die Lösungen in V als die Kurven $h = \text{const}$, und darf nicht vergessen sich direkt zu überlegen, ob in der Nullstellenmenge N von g noch Lösungen vorhanden sind. (Selbst wenn N eine Kurve ist, folgt das nicht automatisch aus (1), weil diese Darstellung ja nur auf V und nicht auf ganz U gilt!)

11.7. Beispiel: Die einfachste Riccatische Differentialgleichung $y' = y^2$ führt auf die Pfaffsche Gleichung $\omega = y^2 dx - dy = 0$. Hier ist $U = \mathbf{R}^2$. Indem man y^2 heraushebt, kann man ω auf $V = \{(x, y) : y \neq 0\}$ schreiben als

$$\omega|_V = y^2\left(dx - \frac{dy}{y^2}\right) = y^2 d\left(x + \frac{1}{y}\right) = g dh.$$

Hier ist N die x -Achse, und offenbar ist $y = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung.

Die anderen Lösungen bekommt man dann durch Auflösen von $x + \frac{1}{y} = c$, also

$$y = \frac{1}{c - x}.$$

11.8. Lösung durch Transformation oder Substitution. Es sei eine Pfaffsche Gleichung $\omega = 0$ auf $U \subset \mathbf{R}^2$ gegeben. Weiter sei $V \subset \mathbf{R}^2$ offen und sei $\Phi : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus. Für geschickt gewähltes Φ kann man unter Umständen die transformierte Gleichung $\Phi^*\omega = 0$ lösen, und bekommt dann Lösungen der ursprünglichen Gleichung durch Rücktransformation. Eine Variante ist die Methode der Substitution, wobei man geeignete Ausdrücke in x und y als neue Variablen mit dem Ziel einführt, eine Vereinfachung der Gleichung zu erreichen. Es handelt sich also um eine Verallgemeinerung der Substitutionsmethode bei der Berechnung unbestimmter Integrale.

Beispiel: Homogene Differentialgleichungen. Darunter versteht man Gleichungen des Typs

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

auf $U \subset \{(x, y) : x \neq 0\}$ mit zugehöriger Pfaffscher Gleichung

$$\omega = dy - f\left(\frac{y}{x}\right) dx = 0.$$

(Nicht zu verwechseln mit der homogenen Gleichungen einer linearen Differentialgleichung wie in 11.4.2! Das Wort „homogen“ hat in der Mathematik viele verschiedene Bedeutungen.) Hier ist es naheliegend, $y/x = z$ zu setzen, genauer gesagt, man betrachtet die Abbildung $\Phi(x, z) = (x, xz)$. Das ergibt

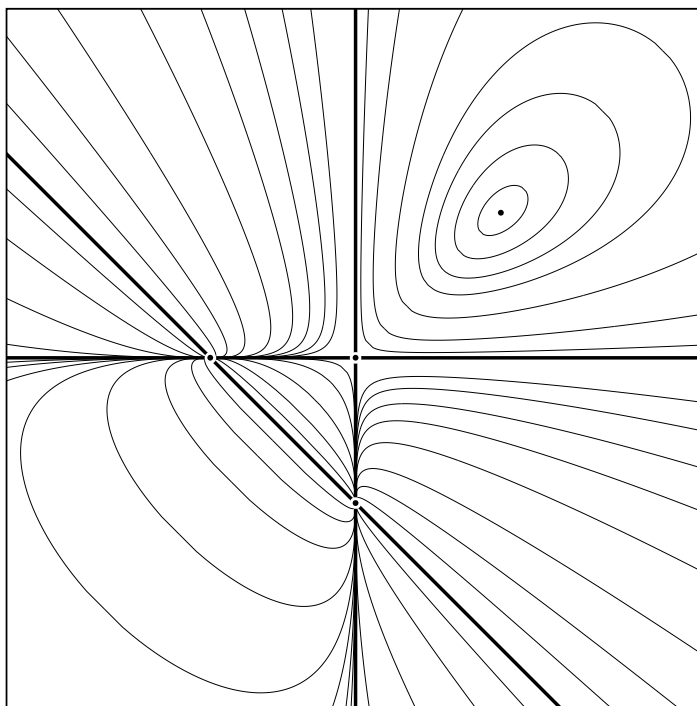
$$\Phi^* \omega = d(xz) - f(z) dx = x dz + (z - f(z)) dx = x(z - f(z)) \left[\frac{dz}{z - f(z)} + \frac{dx}{x} \right],$$

wobei die zweite Darstellung natürlich nur auf $V = \{x, z) : x(z - f(z)) \neq 0\}$ gilt. Hier ist der Ausdruck in eckigen Klammern exakt, also hat man $\Phi^* \omega$ auf V in der Form $g dh$ geschrieben und kann nun das Verfahren von 11.6 anwenden.

Ein komplizierteres Beispiel. Wir betrachten die Pfaffsche Gleichung

$$\omega = y(2x - y - 1) dx + x(2y - x - 1) dy = 0 \quad (1)$$

auf \mathbf{R}^2 .



Zunächst bestimmen wir die singulären Punkte von ω , also die Lösungen der Gleichungen

$$y(2x - y - 1) = 0, \quad x(2y - x - 1) = 0.$$

Man sieht leicht, dass es genau 4 solche Punkte gibt:

$$P_0 = (0, 0), \quad P_1 = (0, -1), \quad P_2 = (-1, 0), \quad P_3 = (1, 1).$$

Sei $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{P_0, \dots, P_3\}$ die Menge der regulären Punkte. Wir schreiben ω folgendermassen um:

$$\begin{aligned} \omega &= y(3x - (x + y + 1)) dx + x(3y - (x + y + 1)) dy \\ &= 3xy(dx + dy) - (x + y + 1)(y dx + x dy). \end{aligned} \quad (2)$$

Das legt es nahe, ω durch $u = xy$ und $v = x + y + 1$ auszudrücken. Auf $V = \{(x, y) : xy(x + y + 1) \neq 0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\omega|_V &= 3u \, dv - v \, du = uv \left(3 \frac{dv}{v} - \frac{du}{u} \right) = uv \, d \log \left| \frac{v^3}{u} \right| \\ &= xy((x + y + 1) \, d \log \left(\frac{|1 + x + y|^3}{|xy|} \right)) = g \, dh.\end{aligned}\quad (3)$$

Aus (1) bzw. (2) sieht man sofort, dass die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und $x + y + 1 = 0$ Lösungen sind. Die Lösungen in V ergeben sich aus (3) in impliziter Form als die Kurven $(1 + x + y)^3 = cxy$.

11.9. Reduktion eines autonomen Systems in zwei Variablen auf eine Pfaffsche Gleichung. Ein solches System hat die Form

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y), \quad (1)$$

wobei f, g stetig auf $U \subset \mathbf{R}^2$ sind. Wir bezeichnen mit $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbf{R}^2$ das zugehörige Vektorfeld wie in 11.1(b) setzen voraus, dass \mathbf{f} keine Nullstellen hat, also f und g keine gemeinsamen Nullstellen in U haben. Es ist naheliegend, formal dt aus (1) zu eliminieren und zunächst die Pfaffsche Gleichung

$$\omega = g \, dx - f \, dy = 0 \quad (2)$$

zu betrachten, die oft leichter zu behandeln ist. Nach unserer Voraussetzung an \mathbf{f} hat ω dann keine singulären Punkte. Wie hängen nun die Lösungen von (1) und (2) zusammen?

Satz. Jede Lösung von (1) ist auch eine von (2). Umgekehrt ist eine Lösung von (2) bis auf einen Parameterwechsel eine Lösung von (1), d.h., wenn $\beta(s)$ eine Lösung von (2) ist, dann gibt es eine Parametertransformation $s = \psi(t)$, sodass $\gamma(t) = \beta(\psi(t))$ eine Lösung von (1) ist.

Beweis. (a) $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ist eine Lösung von (1) genau dann, wenn $\dot{\gamma}_1 = f \circ \gamma$ und $\dot{\gamma}_2 = g \circ \gamma$. Hieraus folgt zunächst $\dot{\gamma}(t) \neq 0$, weil f und g keine gemeinsamen Nullstellen haben, und weiter $\gamma^* \omega = ((g \circ \gamma)\dot{\gamma}_1 - (f \circ \gamma)\dot{\gamma}_2) \, dt = 0$. Also ist γ eine Lösung von (2).

(b) Umgekehrt sei $\beta(s)$ eine Lösung von (2). Wir bezeichnen die Ableitung nach s mit $'$. Dann ist $0 = \beta^* \omega = ((g \circ \beta)\beta'_1 - (f \circ \beta)\beta'_2) \, ds$. Fasst man den bei ds stehenden Ausdruck als Determinante auf, so erkennt man: $\beta'(s)$ ist parallel zum Vektor $\mathbf{f}(\beta(s))$, und weil beide Vektoren ungleich 0 sind, gibt es einen eindeutig bestimmten Skalar $h(s) \neq 0$, sodass $\beta'(s) = h(s)\mathbf{f}(\beta(s))$. Die Funktion h ist stetig; denn sie ist durch

$$h(s) = \frac{\beta'_2(s)}{g(\beta(s))} \quad \text{oder} \quad h(s) = \frac{\beta'_1(s)}{f(\beta(s))}$$

gegeben, je nachdem, welcher der Nenner in diesen Ausdrücken nicht verschwindet. (Für mindestens einen der beiden muss das der Fall sein, weil f und g keine gemeinsamen Nullstellen haben.) Nun mache man den Ansatz $\gamma(t) = \beta(\psi(t))$ und versuche ψ so zu bestimmen, dass γ eine Lösung von (1) wird. Nach der Kettenregel ist

$$\dot{\gamma}(t) = \beta'(\psi(t))\dot{\psi}(t) = h(\psi(t))\dot{\psi}(t)\mathbf{f}(\beta(\psi(t))) = \mathbf{f}(\gamma(t))$$

genau dann der Fall, wenn $\dot{\psi}(t)h(\psi(t)) = 1$, d.h., $s = \psi(t)$ ist eine Lösung der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{h(s)}. \quad (3)$$

Durch Trennung der Variablen und Integration erhält man also $t = \int h(s) ds + \text{const}$ als Funktion von s , und muss dann noch diese Funktion umkehren.

11.10. Beispiel: Der eindimensionale Massenpunkt. Die Gleichung $\ddot{x} = f(x)$ beschreibt die Bewegung eines eindimensionalen Massenpunktes in einem zeit- und geschwindigkeitsunabhängigen Kraftfeld. Das zugehörige System von zwei Gleichungen erster Ordnung wie in 11.1(c) lautet

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = f(x), \quad (1)$$

und führt auf die exakte Pfaffsche Gleichung

$$\omega = y dy - f(x) dx = d\left(\frac{1}{2}y^2 - F(x)\right) = 0,$$

mit den impliziten Lösungen

$$\frac{1}{2}y^2 - F(x) = \text{const}, \quad (2)$$

wobei F eine Stammfunktion von f sei. In der Physik wird $-F(x) = V(x)$ als potentielle Energie gedeutet, und die Gleichung (2) als der Energieerhaltungssatz. Für x als Funktion von t bekommt man die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2(c + F(x))},$$

und daraus t als Funktion von x als

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2(c + F(x))}}. \quad (3)$$

Dieses Integral ist oft nicht elementar auswertbar. Zum Beispiel tritt das schon für die Differentialgleichung eines Pendels ein, wo bis auf Konstanten $f(x) = -\sin x$ und das Integral (3) ein sogenanntes elliptisches Integral ist. Selbst wenn sich (3) elementar integrieren lässt, stellt die Bestimmung der Umkehrfunktion $x = x(t)$ ein nicht triviales Problem dar. Jedoch lassen sich auch ohne explizite Auflösung oft noch Aussagen über die zeitliche Durchlaufung der gefundenen geometrischen Lösungskurve gewinnen, wie im folgenden Beispiel.

11.11. Beispiel: Der junge Hund und der Fluss. Ein Hund und sein Herr stehen auf entgegengesetzten Seiten eines Flusses der Breite b mit der Strömungsgeschwindigkeit c . Der Hund schwimmt (mit Eigengeschwindigkeit v) immer auf seinen Herrn zu. Stelle die Differentialgleichung des Hundes auf und löse sie soweit wie möglich. Diskutiere insbesondere das Verhalten der Lösung in den Fällen $v > c$, $v = c$, $v < c$.

Wir plazieren den Herrn in den Ursprung des Koordinatensystems, der Hund befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Punkt $(b, 0)$, der Fluss fliesse in Richtung der y -Achse.

Durch Skalierung der Koordinatenachsen und der Zeitachse können wir annehmen, dass $b = c = 1$. Die tatsächliche Geschwindigkeit des Hundes setzt sich zusammen aus der Strömungsgeschwindigkeit des Flusses und seiner immer auf den Ursprung gerichteten Eigengeschwindigkeit. Man hat also das autonome Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{v}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \quad (1)$$

auf der rechten Halbebene $x > 0$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = 1, y(0) = 0$ zu lösen. Die zugehörige Pfaffsche Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \omega &= \left(1 - \frac{vy}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) dx + \frac{vx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left\{ (\sqrt{x^2 + y^2} - vy) dx + vx dy \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \left\{ \left(\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} - v \cdot \frac{y}{x}\right) dx + v dy \right\} = 0. \end{aligned}$$

Es ist naheliegend, $z = y/x$ als neue Variable einzuführen. Dann ist $dy = x dz + z dx$, und folglich

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \left\{ (\sqrt{1 + z^2} - vz) dx + v(x dz + z dx) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} \left\{ \sqrt{1 + z^2} dx + vx dz \right\} \\ &= dx + \frac{vx dz}{\sqrt{1 + z^2}} = x \left\{ \frac{dx}{x} + \frac{v dz}{\sqrt{1 + z^2}} \right\} \\ &= x \left\{ d \log x + v d \log(z + \sqrt{1 + z^2}) \right\} \\ &= x d \log \left\{ x \cdot (z + \sqrt{1 + z^2})^v \right\}. \end{aligned}$$

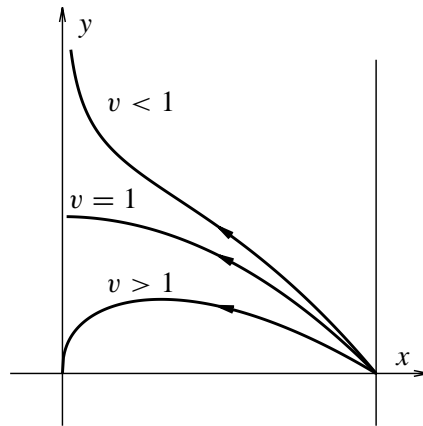
Also sind die geometrischen Lösungen (ohne Berücksichtigung der zeitlichen Durchlaufung) die Kurven $x \cdot (z + \sqrt{1 + z^2})^v = C$. Uns interessiert nur die durch $x = 1, y = 0$ gehende, also muss $C = 1$ sein. Durch Auflösen nach z bzw. $y = xz$ folgt

$$y = \frac{1}{2} \left(x^{1 - \frac{1}{v}} - x^{1 + \frac{1}{v}} \right). \quad (2)$$

Hieraus sieht man bereits

$$\lim_{x \downarrow 0} y(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } v > 1, \\ \frac{1}{2} & \text{falls } v = 1, \\ +\infty & \text{falls } v < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Geometrisch sehen die Lösungen etwa folgendermassen aus:



Für $v > 1$ erreicht der Hund seinen Herrn also, während er für $v \leq 1$ von der Strömung abgetrieben wird. Als Nächstes versuchen wir eine Lösung des ursprünglichen Systems (1) zu bestimmen oder wenigstens über die Art der zeitlichen Durchlaufung der Lösungskurven Aufschluss zu gewinnen. Die erste Gleichung von (1) ist, wenn man y als Funktion von x aus (2) einsetzt:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{vx}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{2v}{x^{\frac{1}{v}} + x^{\frac{-1}{v}}}.$$

Durch Trennung der Variablen bekommt man t als Funktion von x :

$$-2t = \frac{1}{v} \int (x^{\frac{1}{v}} + x^{-\frac{1}{v}}) dx = \begin{cases} \frac{x^{1+\frac{1}{v}}}{v+1} + \frac{x^{1-\frac{1}{v}}}{v-1} + \text{const} & \text{falls } v \neq 1, \\ \frac{x^2}{2} + \log x + \text{const} & \text{falls } v = 1. \end{cases}$$

Die Bestimmung der Konstanten aus der Anfangsbedingung $t = 0$ für $x = 1$ ergibt schliesslich

$$t = \begin{cases} \frac{v}{v^2 - 1} - \frac{1}{2} \left(\frac{x^{1+\frac{1}{v}}}{v+1} + \frac{x^{1-\frac{1}{v}}}{v-1} \right) & \text{falls } v \neq 1, \\ \frac{1-x^2}{4} - \frac{1}{2} \log x & \text{falls } v = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Es erscheint schwierig, aus diesen Gleichungen explizit x als Funktion von t zu gewinnen. Sie reichen jedoch aus, um die Zeit zu bestimmen, die der Hund braucht, um ans andere Ufer zu gelangen. Dies ist der Grenzwert t_0 der rechten Seite von (4) für $x \downarrow 0$. Man bekommt

$$t_0 = \begin{cases} \frac{v}{v^2 - 1} & \text{falls } v > 1, \\ +\infty & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Selbst wenn der Hund ebenso schnell ist wie der Fluss, erreicht er also das andere Ufer nicht in endlicher Zeit.

§12. Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

12.1. Lokal gleichmässig konvergente Folgen und Reihen. Wir brauchen die folgenden einfachen Verallgemeinerungen der bekannten Sätze über gleichmässig konvergente Folgen und Reihen von Funktionen aus der Analysis I. Sei $D \subset \mathbf{K}^n$ offen und sei $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ eine Folge von Abbildungen $f_k : D \rightarrow \mathbf{K}^m$. Die Folge heisst auf einer Teilmenge $S \subset D$ *punktweise konvergent*, wenn $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ für alle $x \in S$ existiert. Die Folge heisst *auf S gleichmässig konvergent*, falls sie punktweise konvergent ist, und es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbf{N}$ gibt, sodass für alle $k \geq N$ und für alle $x \in S$ gilt: $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Schliesslich heisst die Folge *auf D lokal gleichmässig konvergent*, wenn es zu jedem $a \in D$ eine Umgebung $U_a \subset D$ gibt, sodass die Folge auf U_a gleichmässig konvergiert.

Für Funktionenreihen werden diese Begriffe dadurch eingeführt, dass man sie auf die Folge der Partialsummen anwendet. Wir erinnern an das

12.2. Majorantenkriterium für Funktionenreihen. Sei $f_k : D \rightarrow \mathbf{K}^m$ eine Folge von Abbildungen. Weiter sei $\sum_0^\infty a_k$ eine konvergente Reihe von nicht negativen reellen Zahlen, und für alle $x \in S \subset D$ und all $k \geq k_0$ gelte die Abschätzung $|f_k(x)| \leq a_k$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_0^\infty f_k$ auf S absolut und gleichmässig.

Der Beweis verläuft wie der des entsprechenden Satzes in Analysis I, weil absolut konvergente Reihen von Vektoren nach 2.7.2 insbesondere konvergieren.

12.3. Satz. Die Grenzfunktion einer lokal gleichmässig konvergenten Folge oder Reihe stetiger Funktionen ist stetig.

Beweis. Sei $a \in D$ und U_a eine Umgebung von a , auf der die Konvergenz gleichmässig ist. Weil Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist (vgl. 4.10), genügt es zu zeigen, dass die Grenzfunktion f auf U_a stetig ist. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle N so gross, dass $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ für alle $k \geq N$ und alle $x \in U_a$. Wähle $\delta > 0$ so klein, dass $B_\delta(a) \subset U_a$ und $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon/3$ für alle $x \in B_\delta(a)$. Dann folgt für alle $x \in B_\delta(a)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

12.4. Wir studieren nun autonome Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung $\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$, wo die f^i (inhomogen-)lineare Funktionen der x^i sind, also $f^i = \sum a_j^i x^j + b^i$, oder in vektorieller Schreibweise

$$\dot{x} = Ax + b \tag{1}$$

mit einer reellen $n \times n$ -Matrix A und einem festen Vektor $b \in \mathbf{R}^n$. Es wird sich sogar zeigen, dass b variabel sein darf, solange nur A konstant ist. Ein solches System heisst *homogen*, falls $b = 0$. Für $n = 1$ ist die Lösung der homogenen Gleichung mit Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ gemäss 11.2 einfach $x(t) = e^{tA} \cdot x_0$. Es ist daher naheliegend, formal dasselbe auch im Fall $n > 1$ zu versuchen. Aus diesem Grunde betrachten wir zuerst die e -Funktion für Matrizen. Weil reelle Matrizen komplexe Eigenwerte haben können, ist es vorteilhaft, als Grundkörper $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder \mathbf{C} zuzulassen. Wir verstehen den \mathbf{K}^n mit einer beliebigen Norm $|\cdot|$ und verwenden auf $\text{Mat}_n(\mathbf{K}) \cong \text{End } \mathbf{K}^n$

die induzierte Norm wie in 2.11. Es ist leicht zu sehen, dass die in §5 abgeleiteten Differentiationsregeln auch noch gelten, wenn die Werte der betrachteten Abbildungen in komplexen statt reellen Vektorräumen liegen. Als Spezialfall von 5.4.3 gilt die folgende Produktregel: Seien $A(t)$ und $B(t)$ reelle oder komplexe Matrizen, die stetig differenzierbar von einem Parameter $t \in I \subset \mathbf{R}$ abhängen. Dann ist

$$\frac{d}{dt}(AB) = \dot{A}B + A\dot{B}, \quad (2)$$

falls die Grössen von A und B so zueinanderpassen, dass das Produkt einen Sinn hat. Davon werden wir beim Differenzieren von Matrizenprodukten wiederholt Gebrauch machen.

12.5. Satz (Exponentialfunktion von Matrizen). (a) Für jedes $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ konvergiert die Reihe

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (1)$$

absolut. Die Konvergenz ist auf jeder beschränkten Teilmenge von $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$ gleichmässig und folglich auf ganz $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$ lokal gleichmässig. Die Abbildung $\exp: \text{Mat}_n(\mathbf{K}) \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ ist stetig.

(b) Für vertauschbare Matrizen ($AB = BA$) gilt die Funktionalgleichung

$$e^{A+B} = e^A e^B. \quad (2)$$

Insbesondere ist $e^A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ mit Inversem

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

(c) Die Abbildung $R: t \mapsto e^{tA}$ von \mathbf{R} nach $\text{GL}_n(\mathbf{K})$ ist stetig differenzierbar und erfüllt die Matrixdifferentialgleichung

$$\dot{R}(t) = AR(t) = R(t)A \quad (3)$$

und die Funktionalgleichung $R(s+t) = R(s)R(t)$.

(d) Bei Konjugation mit einer beliebigen Matrix $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ gilt

$$Q^{-1}e^A Q = e^{Q^{-1}AQ}. \quad (4)$$

Für nicht vertauschbare A und B ist (2) nicht mehr richtig.

Beweis. (a) Sei S eine beschränkte Teilmenge von $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$, etwa $|A| < r$ für alle $A \in S$. Dann gilt nach 2.12.2

$$\left| \frac{A^k}{k!} \right| \leq \frac{|A|^k}{k!} \leq \frac{r^k}{k!}.$$

Folglich ist die reelle Reihe $\sum_0^\infty \frac{r^k}{k!}$ eine konvergente, von $A \in S$ unabhängige Majorante, sodass die Exponentialreihe nach 12.2 auf S gleichmässig konvergiert. Weil $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$ die Vereinigung der Kugeln $B_r(0)$ ($r > 0$) um den Nullpunkt ist, folgt die lokal gleichmässige Konvergenz der Exponentialreihe. Schliesslich sind die Partialsummen $\sum_{j=0}^k A^j/j!$ Polynomabbildungen in (den Koeffizienten von) A , insbesondere sind sie stetig. Also ist nach 12.3 \exp stetig.



(b) Der Beweis von (2) ist, weil A und B vertauschbar sind, und weil absolut konvergente Reihen von Matrizen konvergent sind, derselbe wie für die gewöhnliche e -Funktion. Insbesondere ist A mit $-A$ vertauschbar und offenbar $e^0 = \mathbf{1}$ (Einheitsmatrix). Hieraus folgt die Formel für das Inverse.

(c) Nach (2) gilt $R(s+t) = R(s)R(t) = R(t)R(s)$. Daher ist

$$\frac{R(s+t) - R(t)}{s} = R(t) \frac{R(s) - \mathbf{1}}{s} = \frac{R(s) - \mathbf{1}}{s} R(t)$$

und es genügt zu zeigen, das

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s) - \mathbf{1}}{s} = A.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{R(s) - \mathbf{1}}{s} - A \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k A^{k+1}}{(k+1)!} \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|s|^k |A|^{k+1}}{(k+1)!} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|s|^k |A|^{k+1}}{k!} = |A| (e^{|s||A|} - 1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $s \rightarrow 0$, wegen der Stetigkeit der gewöhnlichen e -Funktion im Nullpunkt. Also folgt die Behauptung.

(d) Die Abbildung $A \mapsto Q^{-1}AQ$ ist stetig und ein Automorphismus der Algebra $\text{Mat}_n(\mathbf{K})$. Hieraus folgt die Behauptung.

12.6. Satz. Sei $A \in \text{Mat}_n(\mathbf{K})$, sei $b : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ eine auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbf{R}$ definierte stetige Kurve, und seien $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbf{K}^n$ beliebig. Dann hat das lineare System $\dot{x} = Ax + b$ genau eine Lösung $\gamma : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ mit $\gamma(t_0) = x_0$. Sie ist gegeben durch

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)A} \left(x_0 + \int_{t_0}^t (e^{-(s-t_0)A} \cdot b(s)) ds \right). \quad (1)$$

Falls die Gleichung homogen ist ($b = 0$), so gilt

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0. \quad (2)$$

Beweis. Durch Differenzieren von (1) bekommt man wegen Satz 12.5 und der Produktregel 12.4.2

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= A e^{(t-t_0)A} \cdot \left(x_0 + \int_{t_0}^t (e^{-(s-t_0)A} \cdot b(s)) ds \right) + e^{(t-t_0)A} e^{-(t-t_0)A} b(t) \\ &= A\gamma(t) + b(t). \end{aligned}$$

Also ist (1) eine Lösung, und sie erfüllt wegen $e^0 = \mathbf{1}$ die gegebene Anfangsbedingung. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei $\beta(t)$ eine weitere Lösung. Subtraktion zeigt, dass $\alpha(t) := \beta(t) - \gamma(t)$ der homogenen Gleichung $\dot{\alpha} = A\alpha$ mit der Anfangsbedingung $\alpha(t_0) = 0$ genügt. Weiter ist

$$\frac{d}{dt} (e^{-tA} \alpha(t)) = -e^{-tA} A \alpha(t) + e^{-tA} \dot{\alpha}(t) = e^{-tA} (\dot{\alpha}(t) - A\alpha(t)) = 0$$

für alle $t \in I$. Also ist $e^{-tA} \alpha(t) = \text{const}$, und die Konstante ist Null, weil $\alpha(t_0) = 0$. Wegen der Invertierbarkeit von e^{-tA} folgt $\alpha(t) = 0$ für alle t . Also ist $\beta = \gamma$.

12.7. Korollar. Die i -te Spalte von e^{tA} ist die Lösung γ der Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert $\gamma(0) = e_i$.

Beweis. Das folgt sofort aus 12.6.2, weil allgemein die i -te Spalte einer Matrix M gleich Me_i ist.

12.8. Berechnung des Exponential einer Matrix. Mit dem vorigen Satz ist die Lösung von Systemen des Typs 12.4.1 anscheinend vollkommen erledigt. Aber wie berechnet man e^A explizit? Die direkte Auswertung der Reihe 12.5.1 funktioniert nur, wenn man für die Potenzen von A ein einfaches Bildungsgesetz finden kann, zum Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}, \quad A^3 = -A, \quad A^4 = \mathbf{1},$$

und folglich

$$\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Weitere Spezialfälle, wo sich e^{tA} leicht berechnen lässt, sind:

(a) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist eine Diagonalmatrix oder gleich etwas allgemeiner, $A = B = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$ ist eine Diagonalblockmatrix mit quadratischen Blöcken. Für die Potenzen gilt dann $B^k = \text{diag}(A_1^k, \dots, A_r^k)$ und folglich

$$e^{tB} = \text{diag}(e^{tA_1}, \dots, e^{tA_r}). \quad (1)$$

(b) A ist nilpotent; d.h., es gibt ein $m \in \mathbf{N}$ mit $A^m = 0$. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass dann $m \leq n$ gewählt werden kann. Die Exponentialreihe bricht in diesem Fall ab, also ist e^{tA} (genauer jeder Koeffizient) ein Polynom in t .

(c) $A - \lambda_1 \mathbf{1}$ ist nilpotent für ein geeignetes $\lambda_1 \in \mathbf{K}$. In diesem Fall setze $N = A - \lambda_1 \mathbf{1}$ und sei etwa $N^m = 0$. Dann ist $A = \lambda_1 \mathbf{1} + N$, die beiden Matrizen vertauschen, und folglich ist

$$e^{tA} = e^{t(\lambda_1 \mathbf{1} + N)} = e^{t\lambda_1 \mathbf{1}} \cdot e^{tN} = e^{\lambda_1 t} e^{tN} = e^{\lambda_1 t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k N^k}{k!}. \quad (2)$$

Die Berechnung von e^{tA} im allgemeinen Fall ist eine Verallgemeinerung von (c). Wir nehmen an, dass das charakteristische Polynom von A über \mathbf{K} in Linearfaktoren zerfällt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra ist das für $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ jedenfalls richtig. Wenn A reell ist, kann es nötig sein, A als komplexe Matrix zu betrachten, weil die Eigenwerte einer reellen Matrix nicht reell sein müssen; siehe aber 12.14 für eine genauere Diskussion in diesem Fall. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{K}$ die verschiedenen Wurzeln von $\det(\lambda \mathbf{1} - A)$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r , sodass also

$$\det(\lambda \mathbf{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad m_1 + \dots + m_r = n. \quad (3)$$

Weiter sei

$$V_i = \text{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i} \subset \mathbf{K}^n,$$

genannt der verallgemeinerte Eigenraum von A zum Eigenwert λ_i . Dann gilt der

12.9. Satz über die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung. *Das charakteristische Polynom von A zerfällt wie in 12.8.3 über \mathbf{K} in Linearfaktoren. Dann ist der \mathbf{K}^n die direkte Summe*

$$\mathbf{K}^n = V_1 \oplus \dots \oplus V_r \quad (1)$$

der verallgemeinerten Eigenräume, es gilt

$$\dim V_i = m_i,$$

und A lässt (als lineare Abbildung des \mathbf{K}^n betrachtet) den Unterraum V_i invariant.

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf die lineare Algebra bzw. die Algebra-Vorlesung. Hiermit gewinnt man nun praktische Verfahren zur Berechnung von e^{tA} .

12.10. Erstes Verfahren. Es beruht auf der expliziten Berechnung der verallgemeinerten Eigenraumzerlegung.

1. Schritt. Bestimme eine Basis für jeden verallgemeinerten Eigenraum $V_i = \text{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}$. Hierbei ist es im Fall $m_i > 1$ nicht zu empfehlen, $(A - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}$ auszurechnen, denn es könnte ja schon V_i der Kern einer niedrigeren Potenz von $A - \lambda_i \mathbf{1}$ sein. Vielmehr bestimmt man erst eine Basis b_1, \dots, b_s von $\text{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})$. Falls $s < m_i$, ergänzt man zu einer Basis b_1, \dots, b_{s+t} von $\text{Ker}(A - \lambda_i \mathbf{1})^2$, und so weiter.

2. Schritt. Setze die gefundenen Basen von V_1, \dots, V_r der Reihe nach zu einer Matrix $Q = (b_1, \dots, b_n)$ zusammen. Dann hat $B = Q^{-1} A Q = \text{diag}(A_1, \dots, A_r)$ Diagonalblockform und es ist

$$(A_i - \lambda_i \mathbf{1}_{m_i})^{m_i} = 0.$$

Also ist $N_i = A_i - \lambda_i \mathbf{1}_{m_i}$ nilpotent, und 12.8.1 und 12.8.2 ergeben

$$e^{tB} = \text{diag}(e^{\lambda_1 t} e^{tN_1}, \dots, e^{\lambda_r t} e^{tN_r}).$$

3. Schritt. Wegen 12.5.4 ist schliesslich $e^{tA} = Q e^{tB} Q^{-1}$.

12.11. Zweites Verfahren. Hierbei ist es nicht nötig, die verallgemeinerte Eigenraumzerlegung durchzuführen. Wir stellen erst folgende Überlegung an. Sei $x_0 \in \mathbf{K}^n$ ein beliebiger Anfangsvektor, und $\gamma(t) = e^{tA} \cdot x_0$ die Lösung der homogenen Gleichung $\dot{x} = Ax$ mit $\gamma(0) = x_0$. Wir denken uns $x_0 = v_1 + \dots + v_r$ in seine Bestandteile bezüglich der Zerlegung 12.9.1 zerlegt. Dann ist $(A - \lambda_i \mathbf{1})^k v_i = 0$ für $k \geq m_i$. Also folgt

$$\begin{aligned} \gamma(t) = e^{tA} x_0 &= \sum_{i=1}^r e^{tA} v_i = \sum_{i=1}^r e^{t\lambda_i \mathbf{1} + t(A - \lambda_i \mathbf{1})} v_i = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t \mathbf{1}} e^{t(A - \lambda_i \mathbf{1})} v_i \\ &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A - \lambda_i \mathbf{1})^k}{k!} v_i. \end{aligned} \quad (1)$$

Man kann daher für γ den Ansatz

$$\gamma(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \dots + e^{\lambda_r t} P_r(t), \quad (2)$$

mit Polynomvektoren $P_i(t)$ vom Grad $m_i - 1$ mit unbestimmten Koeffizienten machen, und die Koeffizienten durch Einsetzen in die Differentialgleichung, Ausnutzen der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich bestimmen. Dazu muss man wissen, dass die Funktionen des Typs $t^k e^{\lambda_j t}$ für verschiedene k, λ_j linear unabhängig über \mathbf{K} sind. Das wird im nächsten Paragraphen gezeigt werden.

Dieses Verfahren liefert zunächst also nur eine Lösung zu einer gegebenen Anfangsbedingung. Wegen Korollar 12.7 kann man es aber im Prinzip auch benutzen, um die Matrix e^{tA} selber zu berechnen, indem man der Reihe nach als Anfangsbedingung den i -ten Standardbasisvektor e_i wählt. Jedoch ist es für diesen Zweck rechnerisch günstiger, folgendermassen vorzugehen. Man mache wie oben den Ansatz (2) und bestimme durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich alle unbestimmten Koeffizienten bis auf n Stück, etwa ξ^1, \dots, ξ^n . Die gefundene Lösung hängt dann noch linear von diesen n Koeffizienten ab, weil die unbestimmten Koeffizienten ja linear in den Ansatz (2) eingehen. Also können wir schreiben

$$\gamma(t) = F(t) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

wobei $F(t)$ eine Matrix ist, deren Koeffizienten aus Polynomen und e -Funktionen zusammengesetzt, also insbesondere stetig differenzierbar sind. Ferner hat sie die Eigenschaft, dass sich jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ in der Form (3) für geeignete Wahl der ξ^i schreiben lässt; denn gemäss obiger Methode lässt sich jede Anfangsbedingung durch geeignete Wahl der unbestimmten Koeffizienten erfüllen. Nun ergibt sich e^{tA} aus dem folgenden

12.12. Lemma. Sei $F: \mathbf{R} \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ stetig differenzierbar. Jede Lösung γ von $\dot{x} = Ax$ lasse sich in der Form $\gamma(t) = F(t)\xi$ für geeignetes $\xi \in \mathbf{K}^n$ darstellen. Dann ist $F(t)$ invertierbar für alle t und es gilt

$$e^{tA} = F(t)F(0)^{-1}. \quad (1)$$

Beweis. Da die Spalten von e^{tA} nach 12.7 Lösungen sind, gibt es eine Matrix \mathcal{E} mit $e^{tA} = F(t)\mathcal{E}$. Für $t = 0$ ergibt sich $\mathbf{1} = F(0)\mathcal{E}$, also $\mathcal{E} = F(0)^{-1}$ und daher die Formel (1), aus der auch die Invertierbarkeit von $F(t)$ hervorgeht.

12.13. Beispiel. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

mit den Eigenwerten und Vielfachheiten $\lambda_1 = 1, m_1 = 2$ und $\lambda_2 = -2, m_2 = 1$. Wir machen also den Ansatz

$$\gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ b_1 + b_2 t \\ c_1 + c_2 t \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$\dot{\gamma} = e^t \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_2 t \\ b_1 + b_2 + b_2 t \\ c_1 + c_2 + c_2 t \end{pmatrix} - 2e^{-2t} \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

$$A\gamma = e^t \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ 2(a_1 + a_2 t) - 2(b_1 + b_2 t) \\ a_1 + 3b_1 + c_1 + (a_2 + 3b_2 + c_2)t \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} a_3 \\ 2a_3 - 2b_3 \\ a_3 + 3b_3 + c_3 \end{pmatrix}.$$

Vergleich der Terme mit e^t ergibt

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_2 t &= a_1 + a_2 t, & b_1 + b_2 + b_2 t &= 2(a_1 + a_2 t) - 2(b_1 + b_2 t), \\ c_1 + c_2 + c_2 t &= a_1 + 3b_1 + c_1 + (a_2 + 3b_2 + c_2)t, \end{aligned}$$

und weiterer Vergleich der konstanten und in t linearen Terme

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_1 = \frac{2}{3}a_1, \quad c_2 = 3a_1.$$

Ähnlich liefern die Terme mit e^{-2t} die Relationen

$$a_3 = 0, \quad c_3 = -b_3.$$

Die Koeffizienten a_1 , b_3 und c_1 sind frei. Also ist

$$\gamma(t) = e^t \begin{pmatrix} a_1 \\ \frac{2}{3}a_1 \\ c_1 + 3a_1 t \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ b_3 \\ -b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}e^t & e^{-2t} & 0 \\ 3te^t & -e^{-2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_3 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Das ergibt mit 12.12.1

$$\begin{aligned} e^{tA} &= F(t)F(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}e^t & e^{-2t} & 0 \\ 3te^t & -e^{-2t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}(e^t - e^{-2t}) & e^{-2t} & 0 \\ \frac{2}{3}(e^{-2t} - e^t) + 3te^t & (e^t - e^{-2t}) & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

12.14. Reelle Matrizen mit komplexen Eigenwerten. Wenn A eine reelle Matrix mit komplexen Eigenwerten ist, dann liefert das in 12.11 beschriebene Verfahren Lösungen, die komplexe e -Funktionen enthalten. Andererseits ist klar, dass die Lösung der Gleichung $\dot{x} = Ax$ mit reellem Anfangsvektor x_0 reell sein muss. Es sollte also möglich sein, direkt reelle Lösungen zu gewinnen. Das leistet die folgende Methode. Die verschiedenen Eigenwerte von A seien:

- (a) reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten l_1, \dots, l_r ;
- (b) komplexe Eigenwerte $\mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_s, \bar{\mu}_s$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_s .

Weil A reell ist, hat das charakteristische Polynom von A reelle Koeffizienten, sodass mit jedem komplexen Eigenwert auch der konjugiert-komplexe mit derselben Vielfachheit auftreten muss. Sei $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann mache man den Ansatz

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^r e^{\lambda_j t} P_j(t) + \sum_{k=1}^s e^{\alpha_k t} (\cos(\beta_k t) Q_k(t) + \sin(\beta_k t) R_k(t)) \quad (1)$$

mit reellen vektoriellen Polynomen P_j bzw. Q_k, R_k vom Grad $l_j - 1$ bzw. $m_k - 1$ mit unbestimmten Koeffizienten, die wieder durch Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

Dieses Verfahren führt aus folgendem Grund zum Ziel: Nach 12.11.1 ist $\gamma(t)$ eine Summe von Termen der Form $e^{\lambda_j t} P_j(t)$, $e^{\mu_k t} F_k(t)$ und $e^{\bar{\mu}_k t} G_k(t)$ mit komplexen vektoriellen Polynomen P_j, F_k, G_k . Wegen $e^{\mu_k t} = e^{\alpha_k t} (\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t)$ und $\bar{\gamma}(t) = \gamma(t)$ sieht man durch Zerlegung von P_j, F_k und G_k in Real- und Imaginärteil und Ausmultiplizieren, dass die Lösung die im Ansatz angegebene Form haben muss.

Zur Bestimmung von e^{tA} kann man auch hier wieder das in 12.11 und 12.12 beschriebene Verfahren benutzen.

§13. Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

13.1. In diesem Paragraphen behandeln wir Gleichungen des Typs

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = g(t), \quad (1)$$

für die unbekannte Funktion $y(t)$, wobei die a_j konstant (reell oder komplex) sind und die rechte Seite $g(t)$ auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbf{R}$ stetig ist. Für eine beliebige \mathcal{C}^n -Funktion f auf I mit Werten in $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder \mathbf{C} sei

$$Lf := f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{f} + a_n f.$$

Nach den bekannten Eigenschaften der Ableitung ist

$$L: \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}) \rightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbf{K}) \quad (2)$$

eine \mathbf{K} -lineare Abbildung. Man nennt L einen *gewöhnlichen linearen Differentialoperator n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten*. Das Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

heißt das *charakteristische Polynom von L* . Die Gleichung (1) heißt *homogen*, falls die rechte Seite g verschwindet. In diesem Fall ist die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{y \in \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K}) : Ly = 0\} = \text{Ker } L$$

ein Untervektorraum von $\mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$. Falls die inhomogene Gleichung $Ly = g$ überhaupt Lösungen besitzt (und wir werden zeigen, dass dem so ist), dann hat nach bekannten Sätzen der linearen Algebra die Lösungsmenge die Gestalt

$$L^{-1}(g) = y_p + \mathcal{L}, \quad (3)$$

wobei y_p eine spezielle („partikuläre“) Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Wir betrachten also zunächst die homogene Gleichung. Hier können wir sogar $I = \mathbf{R}$ annehmen.

13.2. Satz. (a) *Zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten $c = (c_0, \dots, c_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$ gibt es genau eine Lösung $f = f_c: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}$ der Gleichung $Ly = 0$ mit $f(0) = c_0, \dot{f}(0) = c_1, \dots, f^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$.*

(b) *Die Abbildung $c \mapsto f_c$ ist ein Vektorraumisomorphismus $\mathbf{K}^n \cong \mathcal{L}$ mit Umkehrabbildung $f \mapsto (f(0), \dots, f^{(n-1)}(0))$. Der Lösungsraum \mathcal{L} der homogenen Gleichung ist also n -dimensional.*

(c) *Das charakteristische Polynom von L möge über \mathbf{K} in Linearfaktoren zerfallen. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Wurzeln mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r . Dann bilden die Funktionen*

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leq k \leq m_j - 1, \quad j = 1, \dots, r \quad (1)$$

eine Basis von \mathcal{L} über \mathbf{K} .

Eine Basis des Lösungsraums \mathcal{L} heisst traditionellerweise auch ein *Fundamentalsystem von Lösungen*.

Beweis. (a) Wir betrachten das zu $Ly = 0$ gehörige System von n Gleichungen erster Ordnung wie in 11.1(c):

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = x^3, \dots, \quad \dot{x}^{n-1} = x^n, \quad \dot{x}^n = -a_n x^1 - \dots - a_1 x^n,$$

oder in vektorieller Schreibweise, $\dot{x} = Ax$, mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Ist f eine Lösung von $Ly = 0$, dann ist $\gamma = \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$,

und umgekehrt ist die erste Komponente einer Lösung γ von $\dot{x} = Ax$ eine Lösung von $Ly = 0$. Daher folgt (a) aus Satz 12.6.

(b) Die Abbildung $c \mapsto f_c$ ist eine lineare Abbildung $\mathbf{K}^n \rightarrow \mathcal{L}$, denn die entsprechende Lösung γ_c des zugehörigen Systems ist $\gamma_c(t) = e^{tA}c$, also linear in c , und f_c ist gerade die erste Komponente von γ_c . Nach (a) ist diese Abbildung bijektiv. Die Umkehrabbildung ist offenbar die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(0)$. Also ist $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbf{K}^n = n$.

(c) Man zeigt durch Entwickeln der Determinante, dass $\chi(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{1} - A)$ das charakteristische Polynom von A ist. Also sind die λ_j genau die verschiedenen Eigenwerte von A . Nach 12.11.1 und der in (b) beschriebenen Korrespondenz der Lösungen von $Ly = 0$ und $\dot{x} = Ax$ ist jede Lösung $f \in \mathcal{L}$ eine Linearkombination der in (1) angegebenen Funktionen. Wegen $m_1 + \dots + m_r = n$ gibt es genau n Stück davon. Numerieren wir diese Funktionen irgendwie durch, etwa f_1, \dots, f_n , so folgt $\mathcal{L} \subset \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ (lineare Hülle). Da andererseits $\dim \mathcal{L} = n$ nach (b), so folgt $\mathcal{L} = \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ und die f_i bilden eine Basis von \mathcal{L} . Insbesondere sind die f_i linear unabhängig und selber Lösungen.

13.3. Reelle Gleichungen mit komplexen Wurzeln. Wenn die Gleichung reell ist (d.h., alle $a_i \in \mathbf{R}$) aber nicht alle Wurzeln λ_j reell sind, so liefert der vorige Satz ein Fundamentalsystem aus komplexwertigen Funktionen. Wie bekommt man ein reelles Fundamentalsystem? Unter Verwendung von 12.14.1 und mit demselben Verfahren wie im Beweis von (c) sieht man: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die reellen Wurzeln und $\mu_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \mu_s = \alpha_s + i\beta_s$ sowie $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_s$ die komplexen Wurzeln des Polynoms $\chi(\lambda)$, mit Vielfachheiten l_1, \dots, l_r bzw. m_1, \dots, m_s , dann ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch die Funktionen

$$\begin{aligned} t^k e^{\lambda_j t}, \quad 0 \leq k \leq l_j - 1, \quad j = 1, \dots, r, \\ t^k e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), \quad t^k e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), \quad 0 \leq k \leq m_j - 1, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (1)$$

13.4. Die inhomogene Gleichung. Zur Lösung der Gleichung $Ly = g$ kann man im Prinzip so vorgehen, dass man die Gleichung zunächst in ein System von n Gleichungen erster Ordnung verwandelt und dann mit Hilfe von Satz 12.6 löst. Oft hat die Funktion $g(t)$ jedoch eine spezielle Form, und dann geht es mit geeigneten Ansätzen auch einfacher. Sei wieder $\chi(\lambda)$ das dem Differentialoperator L zugeordnete Polynom.

13.5. Satz. (a) Für jede stetige Funktion $g : I \rightarrow \mathbf{K}$ hat die inhomogene Gleichung $Ly = g$ eine Lösung, mit anderen Worten: Die lineare Abbildung L wie in 13.1.2 ist surjektiv. Man erhält alle Lösungen der inhomogenen Gleichung als $y = y_h + y_p$, wobei y_h eine beliebige Lösung der homogenen Gleichung $Ly = 0$ und y_p eine spezielle („partikuläre“) Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

(b) Sei $g(t) = h(t) e^{\mu t}$, wobei $h(t)$ ein Polynom sei, und sei m die Vielfachheit von μ als Nullstelle von $\chi(\lambda)$ (insbesondere also $m = 0$ genau dann, wenn μ keine Wurzel von $\chi(\lambda)$ ist). Dann hat die inhomogene Gleichung eine partikuläre Lösung der Form

$$y_p(t) = t^m f(t) e^{\mu t}, \quad (1)$$

wobei $f(t)$ ein Polynom vom selben Grad wie $h(t)$ ist.

Ist man in der Situation des Falles (b), so kann man also eine partikuläre Lösung durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten finden und erspart sich die Verwandlung in ein System.

Beweis. (a) Wie im Beweis von Satz 13.2(a) hat man eine Bijektion zwischen den Lösungen der inhomogenen Gleichung und jenen des inhomogenen Systems $\dot{x} = Ax + b(t)$, wobei A wie in 13.2.2 und $b(t) = (0, \dots, 0, g(t))$ ist. Damit folgt die Existenz von Lösungen der inhomogenen Gleichung aus Satz 12.6. Die zweite Aussage ist nur eine Umformulierung von 13.1.3.

(b) Sei y irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, deren Existenz nach (a) gesichert ist. Dann gilt also $Ly = h(t) e^{\mu t}$. Nun ist

$$\left(\frac{d}{dt} - \mu\right) t^k e^{\mu t} = k t^{k-1} e^{\mu t} + t^k \mu e^{\mu t} - \mu t^k e^{\mu t} = k t^{k-1} e^{\mu t},$$

und daher durch $(k + 1)$ -maliges Anwenden

$$\left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^{k+1} (t^k e^{\mu t}) = 0.$$

Sei q der Grad des Polynoms $h(t)$. Dann ist

$$\left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^{q+1} Ly_p = \left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^{q+1} (h(t) e^{\mu t}) = 0.$$

Also ist y eine Lösung der homogenen Gleichung $\tilde{L}y = 0$, wobei

$$\tilde{L} = \left(\frac{d}{dt} - \mu\right)^{q+1} L$$

mit zugehörigem charakteristischem Polynom $\tilde{\chi}(\lambda) = (\lambda - \mu)^{q+1} \chi(\lambda)$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: μ ist keine Wurzel von $\chi(\lambda)$, es ist also $m = 0$. Dann ist nach Satz 13.2 y eine Linearkombination von Funktionen $t^k e^{\lambda_j t}$ sowie $t^l e^{\mu t}$, $0 \leq l \leq q$. Die Funktionen des ersten Typs sind Lösungen der homogenen Gleichung. Also können wir schreiben

$$y = y_h + \sum_{l=0}^q c_l t^l e^{\mu t} = y_h + y_p,$$

wobei y_p die in (1) behauptete Form hat.

2. Fall: μ ist eine Wurzel von $\chi(\lambda)$. Nach Ummumerieren der Wurzeln können wir $\mu = \lambda_1$ und entsprechend $m = m_1$ annehmen. Dann ist, wieder nach Satz 12.6, y eine Linearkombination von $t^k e^{\lambda_j t}$, $0 \leq k \leq m_j - 1$, $j \geq 2$, und $t^l e^{\lambda_1 t}$, $0 \leq l \leq q + m_1$. Wie im 1. Fall kann man die Funktionen des ersten Typs als Lösungen der homogenen Gleichung weglassen und bekommt eine partikuläre Lösung als Linearkombination von $t^l e^{\lambda_1 t}$, wobei sogar $m_1 \leq l \leq q + m_1$ angenommen werden kann, denn die $t^k e^{\lambda_1 t}$ mit $k \leq m_1 - 1$ sind ja wieder Lösungen der homogenen Gleichung.

13.6. Bemerkungen und Anwendung. (i) Durch Superposition gewinnt man mit dem Verfahren in (b) auch dann partikuläre Lösungen, wenn die rechte Seite eine Linearkombination von Funktionen des Typs (Polynom) (e -Funktion) ist.

(ii) Angenommen, die Differentialgleichung ist reell und die rechte Seite hat die Form $h(t)e^{\alpha t} \cos \omega t$ oder $h(t)e^{\alpha t} \sin \omega t$. Dann löse man zunächst die komplexe Gleichung $Ly = h(t)e^{(\alpha+i\omega)t}$ und nehme dann Real- bzw. Imaginärteil.

Als *Anwendung* behandeln wir die Differentialgleichung

$$\ddot{y} + 2\varrho \dot{y} + \omega_0^2 y = a \cos \omega t.$$

Die Physiker versichern uns, dass diese Gleichung die Bewegung eines gedämpften harmonischen Oszillators unter der Einwirkung einer periodischen äusseren Kraft beschreibt. Hierbei ist $\varrho \geq 0$ der Dämpfungsfaktor, $\omega_0 > 0$ die Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators, $a > 0$ die Amplitude und $\omega > 0$ die Kreisfrequenz der von aussen angelegten Schwingung. Zuerst lösen wir die

13.7. Homogene Gleichung = freie gedämpfte Schwingung. Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\varrho\lambda + \omega_0^2 = (\lambda + \varrho)^2 + \omega_0^2 - \varrho^2$ mit den Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2}.$$

Es gibt 3 Möglichkeiten.

1. Fall: $\varrho < \omega_0$. Dann ist die Wurzel imaginär und man hat

$$\lambda_{1,2} = -\varrho \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem des Lösungsraumes ist also nach 13.3.1 durch

$$f_1(t) = e^{-\varrho t} \cos \sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2} t, \quad f_2(t) = e^{-\varrho t} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2} t$$

gegeben. Die physikalische Interpretation ist die einer exponentiell gedämpften harmonischen Schwingung mit der Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}}$. Die Kreisfrequenz $\sqrt{\omega_0^2 - \varrho^2}$ ist kleiner als die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung.

2. Fall: $\varrho = \omega_0$. Dann hat man das Fundamentalsystem

$$f_1(t) = e^{-\varrho t}, \quad f_2(t) = t e^{-\varrho t}.$$

Beide Lösungen sind exponentiell abfallend, es tritt keine Schwingung auf.

3. Fall: $\varrho > \omega_0$: Hier ist ein Fundamentalsystem

$$f_{1,2}(t) = \exp(-\varrho \pm \sqrt{\varrho^2 - \omega_0^2})t$$

mit demselben Verhalten wie im 2. Fall.

Nun betrachten wir die

13.8. Inhomogene Gleichung = erzwungene Schwingung. Wenn $\varrho > 0$ ist, geht nach der obigen Diskussion jede Lösung der homogenen Gleichung für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen Null. Also ist für grosse t nur eine Lösung der inhomogenen Gleichung interessant. Nach (ii) von 13.6 betrachten wir zunächst die komplexe Gleichung $Ly = ae^{i\omega t}$, und unterscheiden die folgenden Fälle.

1. Fall: $i\omega$ ist keine Wurzel von $\chi(\lambda)$. Hier ist zu bemerken: Sobald $\varrho > 0$ ist, liegt automatisch dieser Fall vor; denn dann hat $\chi(\lambda)$ keine rein imaginären Nullstellen. Nach 13.5.1 gibt es eine partikuläre Lösung der Form $y_p(t) = ce^{i\omega t}$, mit einer noch zu bestimmenden komplexen Konstanten c . Einsetzen in die Differentialgleichung liefert wegen $\dot{y}_p = i\omega ce^{i\omega t}$, und $\ddot{y}_p = -\omega^2 ce^{i\omega t}$ die Bedingung

$$c(-\omega^2 + 2\varrho i\omega + \omega_0^2)e^{i\omega t} = ae^{i\omega t},$$

also nach Kürzen des Exponentialfaktors und Reellmachen des Nenners

$$c = \frac{a}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\varrho i\omega} = \frac{a(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\varrho i\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2}.$$

Eine reelle partikuläre Lösung ist also

$$\operatorname{Re}(ce^{i\omega t}) = \frac{a}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\varrho\omega \sin \omega t \right).$$

Man gewinnt eine bessere Einsicht in das Verhalten des Systems, wenn man $c = re^{i\delta}$ in Polarkoordinaten schreibt. Wegen $\operatorname{Im} c \leq 0$ kann man dabei $\delta \in [-\pi, 0]$ annehmen. Dann gilt

$$r = |c| = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2}},$$

und die komplexe partikuläre Lösung ist

$$ce^{i\omega t} = re^{i\delta} e^{i\omega t} = re^{i(\omega t + \delta)},$$

sodass die reelle Lösung gleich

$$y_p(t) = \operatorname{Re}(re^{i(\omega t + \delta)}) = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t + \delta)$$

ist. (Man beachte, wie sich diese Rechnung durch die Verwendung der komplexen e -Funktion vereinfacht.) Hieran lässt sich folgendes ablesen: Der Oszillator schwingt mit der neuen Amplitude

$$a' = \frac{a}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varrho^2\omega^2}} \quad (1)$$

und zeigt eine Phasenverschiebung von

$$\delta = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varrho\omega}\right) & \text{falls } \varrho > 0, \\ 0 & \text{falls } \varrho = 0 \text{ und } \omega < \omega_0, \\ -\pi & \text{falls } \varrho = 0 \text{ und } \omega > \omega_0. \end{cases}$$

2. Fall: $i\omega$ ist eine Wurzel von $\chi(\lambda)$. Dann ist notwendig $\varrho = 0$, $\omega = \omega_0$ und die Differentialgleichung lautet $\ddot{y} + \omega_0^2 y = a \cos \omega_0 t$. Eine partikuläre Lösung ist nach 13.5.1 von der Form $\operatorname{Re}(cte^{i\omega_0 t})$. Dies ist der sogenannte *Resonanzfall*; die Amplitude wird wegen des Faktors t beliebig gross.

§14. Lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten

14.1. In diesem Paragraphen behandeln wir Systeme des Typs

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad (1)$$

wobei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $A: I \rightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbf{K})$ und $b: I \rightarrow \mathbf{K}^n$ stetig seien, sowie Gleichungen n -ter Ordnung

$$Ly = y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t), \quad (2)$$

mit stetigen Funktionen $a_i, g: I \rightarrow \mathbf{K}$. Bevor wir den grundlegenden Satz über die Resolvente beweisen können, brauchen wir folgende

14.2. Differentiationsregel für das Inverse von Matrizen. Sei $t \mapsto A(t) \in \operatorname{GL}_n(\mathbf{K})$ stetig differenzierbar. Dann ist auch $t \mapsto A(t)^{-1}$ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dt} A^{-1} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}.$$

Beweis. Der bekannte Ausdruck für das Inverse einer Matrix als Matrix der Kofaktoren dividiert durch die Determinante zeigt, dass die Koeffizienten von A^{-1} rationale Funktionen mit nicht verschwindendem Nenner in den Koeffizienten von A sind. Insbesondere ist also A^{-1} wieder stetig differenzierbar als Funktion von t , wenn A es war. Nun folgt durch Differenzieren von $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$ mit der Produktregel 12.4.2

$$0 = \dot{A} \cdot A^{-1} + A \cdot \frac{d}{dt} A^{-1},$$

und hieraus die Behauptung durch Linksmultiplikation mit A^{-1} .

14.3. Satz über die Resolvente. Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $A : I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ stetig. Ferner sei $t_0 \in I$.

(a) Es gibt genau eine stetig differenzierbare Abbildung $R : I \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{K})$, für die gilt

$$R(t_0) = \mathbf{1}_n, \quad \dot{R}(t) = A(t)R(t) \quad (1)$$

für alle $t \in I$. Sie heisst die Resolvente zur Matrix A oder zur Gleichung $\dot{x} = Ax$.

(b) Für die Determinante von R gilt

$$\frac{d}{dt} \det R(t) = \text{Spur}(A(t)) \cdot \det R(t)$$

und folglich

$$\det R(t) = \exp \int_{t_0}^t \text{Spur } A(s) ds.$$

(c) Schreibt man $R(t, t_0)$ statt $R(t)$, um die Abhängigkeit von t_0 anzudeuten, dann gilt die Funktionalgleichung

$$R(t, s)R(s, u) = R(t, u)$$

für alle $s, t, u \in I$. Insbesondere ist $R(t, s)^{-1} = R(s, t)$.

(d) Falls speziell $A(t) = A$ konstant ist, so gilt

$$R(t, t_0) = e^{(t-t_0)A}, \quad \det e^{tA} = e^{t \text{Spur } A}.$$

Beweis. (a) Wir definieren rekursiv $R_k : I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ durch

$$R_0(t) = \mathbf{1}_n, \quad R_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t A(s)R_k(s) ds. \quad (2)$$

Durch Induktion sieht man sofort, dass die R_k stetig (sogar stetig differenzierbar) sind. Sei $[a, b] \subset I$ ein kompaktes Teilintervall, das t_0 enthält. Dann ist die stetige Funktion $t \mapsto |A(t)|$ auf $[a, b]$ beschränkt, etwa durch M . Wir behaupten nun, dass für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt:

$$|R_k(t)| \leq \frac{M^k |t - t_0|^k}{k!}. \quad (3)$$

Für $k = 0$ ist das wegen $|\mathbf{1}| = 1$ klar. Der Induktionsschluss folgt mit Hilfe von Satz 3.2 für $t \geq t_0$ aus

$$\begin{aligned} |R_{k+1}(t)| &\leq \int_{t_0}^t |A(s)R_k(s)| ds \leq \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |R_k(s)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t M \cdot \frac{M^k (s - t_0)^k}{k!} ds \\ &= \frac{M^{k+1} |t - t_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

und durch eine ähnliche Rechnung für $t \leq t_0$. Daher ist die Reihe

$$R(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t) \quad (4)$$

auf $[a, b]$ absolut und gleichmässig konvergent. Da jeder Punkt von I eine Umgebung der Form $[a, b]$ hat, ist die Reihe (4) auf I lokal gleichmässig konvergent, und damit eine stetige Funktion. Aus der Definition ist ferner klar, dass $R_k(t_0) = 0$ für $k \geq 1$, sodass $R(t_0) = \mathbf{1}$. Zum Beweis der Differentialgleichung (1) gehen wir folgendermassen vor:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} + \int_{t_0}^t A(s)R(s) ds &= \mathbf{1} + \int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{\infty} A(s)R_k(s) ds \\ &= \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^t A(s)R_k(s) ds \\ &= \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{\infty} R_{k+1}(t) = R(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Hierbei ist die Vertauschung von Summe und Integral wegen der gleichmässigen Konvergenz der Reihe auf $[t_0, t]$ gerechtfertigt. Aus (5) ersieht man nun, dass R nach t stetig differenzierbar ist, und zwar mit der Ableitung

$$\dot{R}(t) = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{1} + \int_{t_0}^t A(s)R(s) ds \right) = A(t)R(t).$$

Die Invertierbarkeit von R wird unter (b) bewiesen. Zum Beweis der Eindeutigkeit nehmen wir an, dass S dieselben Eigenschaften wie R habe. Dann ist nach Lemma 14.2

$$\frac{d}{dt}(R^{-1}S) = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}S + R^{-1}\dot{S} = R^{-1}(-ARR^{-1}S + AS) = 0$$

und folglich $R(t)^{-1}S(t) = R(t_0)^{-1}S(t_0) = \mathbf{1}$, sodass $R(t) = S(t)$ für alle $t \in I$ folgt.

(b) Sei R^i die i -te Zeile von R und A^i die i -te Zeile von A . Dann kann man (1) schreiben als

$$\dot{R}^i = A^i \cdot R = (a_1^i, \dots, a_n^i) \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j^i R^j.$$

Weil die Determinante einer Matrix als Funktion der Zeilen multilinear ist, folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det R &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ \dot{R}^i \\ \vdots \\ R^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ A^i R \\ \vdots \\ R^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_j^i \det \begin{pmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^{i-1} \\ R^j \\ R^{i+1} \\ \vdots \\ R^n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j} a_j^i \delta_{ij} \det R = \sum_i a_i^i \det R = (\text{Spur } A) \det R. \end{aligned}$$

Daraus folgt die zweite Formel nach dem Satz über lineare Differentialgleichungen erster Ordnung.

(c) Sei $B(t) := R(t, u)R(s, u)^{-1}$. Dann gilt

$$\dot{B}(t) = \dot{R}(t, u)R(s, u)^{-1} = A(t)R(t, u)R(s, u)^{-1} = A(t)B(t)$$

und $B(s) = \mathbf{1}$. Nach der unter (a) bewiesenen Eindeutigkeit folgt also $B(t) = R(t, s)$ und damit die behauptete Funktionalgleichung.

(d) Wenn A konstant ist, dann kann man in (2) die R_k explizit ausrechnen und erhält durch Induktion

$$R_k(t, t_0) = \frac{(t - t_0)^k}{k!} A^k.$$

Damit folgt nun die behauptete Formel für $R(t, t_0)$ auf Grund der Definition der Exponentialreihe, und die zweite bekommt man durch Spezialisieren von (b).

14.4. Bemerkung. Die zu 11.2.2 analoge Formel für die Resolvente einer Matrix ist **falsch**, es gilt also im Allgemeinen

$$R(t) \neq \exp\left(\int_{t_0}^t A(s) ds\right).$$

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier ist

$$\exp\left(\int_0^t A(s) ds\right) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & \frac{2}{t}(e^{t^2/2} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

während man für die Resolvente

$$R(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & u(t)e^{t^2/2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält, wobei

$$u(t) = \int_0^t e^{-s^2/2} ds$$

nicht einmal durch elementare Funktionen ausdrückbar ist.

14.5. Satz. Seien $A : I \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{K})$ und $b : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ stetig und sei $x_0 \in \mathbf{K}^n$ beliebig. Dann hat das lineare System 14.1.1 genau eine Lösung $\gamma : I \rightarrow \mathbf{K}^n$ mit $\gamma(t_0) = x_0$. Sie ist gegeben durch

$$\gamma(t) = R(t)\left(x_0 + \int_{t_0}^t R(s)^{-1}b(s) ds\right), \quad (1)$$

wobei R die zu A gehörige Resolvente wie in Satz 14.3 ist.

Beweis. Durch Differenzieren von (1) und Verwendung von 14.3.1 verifiziert man leicht, dass γ eine Lösung ist, und $\gamma(t_0) = x_0$ ist klar wegen $R(t_0) = \mathbf{1}$. Zum Beweis der Eindeutigkeit sei auch β eine Lösung mit demselben Anfangswert. Dann ist $\alpha := \beta - \gamma$ eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{x} = Ax$ mit Anfangswert $\alpha(t_0) = 0$. Ferner ist

$$\frac{d}{dt}(R^{-1}\alpha) = -R^{-1}\dot{R}R^{-1}\alpha + R^{-1}\dot{\alpha} = (R^{-1}(-ARR^{-1}\alpha + A\alpha)) = 0.$$

Also ist $R^{-1}\alpha$ konstant gleich 0 und wegen der Invertierbarkeit der Resolvente folgt $\alpha = 0$.



14.6. Satz. Seien a_i und g stetige Funktionen auf $I \subset \mathbf{R}$.

(a) Zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten c_0, \dots, c_{n-1} gibt es genau eine Lösung $\varphi: I \rightarrow \mathbf{K}$ von 14.1.2 mit $\varphi(t_0) = c_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = c_{n-1}$.

(b) Die Lösungen der homogenen Gleichung $Ly = 0$ bilden einen n -dimensionalen Vektorraum $\mathcal{L} \subset \mathcal{C}^n(I, \mathbf{K})$.

(c) Die Lösungen der inhomogenen Gleichung $Ly = g$ sind $\varphi_h + \varphi_p$, wobei $\varphi_h \in \mathcal{L}$ beliebig und φ_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

(d) Seien $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{L}$ irgendwelche Lösungen der homogenen Gleichung. Die Wronskische Matrix $W(t)$ und die Wronskische Determinante $w(t)$ dieser Lösungen sind definiert als

$$W(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) & \dots & f_n(t) \\ \dot{f}_1(t) & \dots & \dot{f}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(t) & \dots & f_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad w(t) := \det W(t).$$

Dann gilt die sogenannte Liouvillesche Formel

$$w(t) = w(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right).$$

Ferner ist f_1, \dots, f_n ein Fundamentalsystem, also eine Basis von \mathcal{L} , dann und nur dann, wenn $w(t) \neq 0$ für ein $t \in I$ (und damit für alle $t \in I$).

Beweis. Der Beweis von (a)–(c) verläuft wie im Fall konstanter Koeffizienten, denn er benützt nur die Linearität des Operators L und den Existenz- und Eindeutigkeitsatz 14.5. Wir überlassen daher die Details dem Leser. Zum Beweis von (d) sei $R(t)$ die Resolvente des zugehörigen Systems mit der Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & \dots & \dots & -a_2(t) & -a_1(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $W(t) = R(t)W(t_0)$, denn jede Spalte γ von W ist Lösung des homogenen Systems $\dot{x} = Ax$ und daher nach Satz 14.5 von der Form $\gamma(t) = R(t)\gamma(t_0)$. Nach Satz 14.3(b) und wegen $\text{Spur } A(t) = -a_1(t)$ ist

$$w(t) = \det R(t) \cdot w(t_0) = w(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t a_1(s) ds\right).$$

Insbesondere ist entweder $w(t) = 0$ für alle $t \in I$ oder $w(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Nun sei f_1, \dots, f_n eine Basis von \mathcal{L} . Dann lässt sich jedes $\varphi \in \mathcal{L}$ in der Form $\varphi = \sum \lambda_i f_i$ mit $\lambda_i \in \mathbf{K}$ darstellen. Durch wiederholtes Differenzieren und Einsetzen von t_0 folgt

$$\begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \dot{\varphi}(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \sum \lambda_i W_i(t_0) = W(t_0) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei W_i die i -te Spalte von W sei. Da die $\varphi^{(j)}(t_0) = c_j$ beliebig vorgebar sind, muss $W(t_0)$ invertierbar und damit $w(t_0) \neq 0$ sein. Umgekehrt sei das der Fall, und sei $\sum \lambda_i f_i = 0$ eine lineare Relation zwischen den f_i . Durch Differenzieren und Einsetzen von t_0 folgt dann $\sum \lambda_i W_i(t_0) = 0$ und daraus, dass alle λ_i Null sind, denn die Spalten von $W(t_0)$ sind linear unabhängig. Also sind die f_1, \dots, f_n linear unabhängig, und wegen $\dim \mathcal{L} = n$ bilden sie eine Basis von \mathcal{L} .

Im Allgemeinen ist es bereits sehr schwierig bzw. im Rahmen der elementaren Funktionen unmöglich, eine homogene Gleichung zweiter Ordnung $\ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0$ zu lösen, wenn a_1 und a_2 nicht konstant sind. Kennt man jedoch eine nichttriviale Lösung schon, so kann man eine weitere davon linear unabhängige, nach dem Verfahren der Reduktion der Ordnung finden:

14.7. Satz (Reduktion der Ordnung). *Seien a_1, a_2 und g stetige Funktionen auf einem offenen Intervall $I \subset \mathbf{R}$ und sei φ eine nirgends verschwindende Lösung der Gleichung*

$$Ly = \ddot{y} + a_1(t)\dot{y} + a_2(t)y = 0. \quad (1)$$

(a) *Man bekommt eine zweite linear unabhängige Lösung ψ von (1) durch den Ansatz $\psi(t) = \varphi(t)u(t)$, wobei u eine nicht konstante Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung erster Ordnung für \dot{u}*

$$\ddot{u} + \left(\frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} + a_1\right)\dot{u} = 0 \quad (2)$$

ist.

(b) *Man bekommt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $Ly = g$ durch denselben Ansatz, wobei jetzt u eine partikuläre Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung für \dot{u}*

$$\ddot{u} + \left(\frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} + a_1\right)\dot{u} = \frac{g}{\varphi} \quad (3)$$

ist.

Beweis. Einsetzen von $\psi = \varphi \cdot u$ in die Gleichung und einfache Rechnung liefert

$$L(\varphi \cdot u) = (L\varphi)u + \varphi \cdot \left(\ddot{u} + \left(\frac{2\dot{\varphi}}{\varphi} + a_1\right)\dot{u}\right).$$

Also ist ψ genau dann eine Lösung von $Ly = 0$ bzw. $Ly = g$, wenn (2) bzw. (3) erfüllt sind. Dass φ und ψ im homogenen Fall linear unabhängig sind, folgt aus dem Wronskischen Kriterium des vorigen Satzes:

$$\det \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \dot{\varphi} & \dot{\psi} \end{pmatrix} = \varphi(\dot{\varphi}u + \varphi\dot{u}) - \dot{\varphi}\varphi u = \varphi^2\dot{u} \neq 0.$$

14.8. Beispiel. Für praktische Rechnungen ist es nicht nötig, sich die Formeln 14.7.2 bzw. 14.7.3 zu merken, sondern man macht einfach den Ansatz $y = \varphi u$ und setzt in die Gleichung ein. Betrachten wir etwa die Gleichung $(1+t^2)\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 0$. Hier ist leicht zu sehen, dass $\varphi(t) = t$ eine Lösung ist. Sie verschwindet zwar im Nullpunkt, aber wir können das Verfahren der Reduktion der Ordnung ja auf die

offenen Teilintervalle $]0, +\infty[$ und $] -\infty, 0[$ anwenden. Durch Einsetzen von $y = \varphi u$ und Vereinfachen ergibt sich

$$t\ddot{u}(1+t^2) + 2\dot{u} = 0$$

mit der Lösung

$$\dot{u} = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad u = t - \frac{1}{t}.$$

(Hier kommt es nicht auf die allgemeinste Lösung an, sodass sich Integrationskonstanten erübrigen.) Das liefert die zweite Lösung

$$\psi(t) = t\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^2 - 1,$$

die zwar nur für $t \neq 0$ hergeleitet wurde, aber auf ganz \mathbf{R} sinnvoll ist. Durch Nachrechnen stellt man fest, dass ψ auch auf ganz \mathbf{R} eine Lösung ist, und sie ist linear unabhängig von φ , denn

$$\det \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \dot{\varphi} & \dot{\psi} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{pmatrix} = 1 + t^2$$

ist nirgends Null.

§15. Allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitsätze

15.1. Vektorfelder. Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall eines autonomen Systems

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

wo die f^i Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ sind. Wie schon in 11.1,

fassen wir sie zu einer Abbildung $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix} : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ zusammen und deuten f

als Vektorfeld auf U . Eine *Lösung* von (1) ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : I \rightarrow U$ mit $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ für alle $t \in I$. Statt Lösung sagt man auch *Integralkurve* von f .

Ohne geeignete Voraussetzungen an f braucht es weder Lösungen zu geben, noch sind sie, falls vorhanden, durch ihren Anfangswert eindeutig bestimmt. Eine hinreichende Bedingung hierfür ist die in 4.7 und 4.10 eingeführte lokale Lipschitz-Bedingung. Wir wiederholen zur Bequemlichkeit noch einmal die

Definition. Ein Vektorfeld f auf U heisst *lokal dehnungsbeschränkt*, wenn es zu jedem $a \in U$ eine Umgebung $U_a \subset U$ und eine Konstante $L > 0$ gibt, sodass $f|_{U_a}$ einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L genügt, also $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in U_a$ gilt. Statt lokal dehnungsbeschränkt sagt man auch, f genüge *lokal einer Lipschitz-Bedingung*. Es gelten die Implikationen

$$f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbf{R}^n) \implies f \text{ lokal dehnungsbeschränkt} \implies f \text{ stetig,}$$

wobei die erste aus 4.11(a) und die zweite leicht aus den Definitionen folgt. Die Umkehrungen sind falsch.

15.2. Eindeutigkeitsatz. Das Vektorfeld f auf U sei lokal dehnungsbeschränkt. Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und seien $\beta, \gamma : I \rightarrow U$ Integralkurven von f mit $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$ für ein $t_0 \in I$. Dann ist $\beta(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in I$.

Beweis. Sei

$$I_1 = \{t \in I : \beta(t) = \gamma(t)\} \quad \text{und} \quad I_2 = \{t \in I : \beta(t) \neq \gamma(t)\}.$$

Weil β und γ stetig sind, ist es auch die Funktion $h(t) := |\beta(t) - \gamma(t)|$. Ferner ist $t \in I_2$ genau dann, wenn $h(t) > 0$. Also ist I_2 offen. Klarerweise ist I die disjunkte Vereinigung von I_1 und I_2 . Wir zeigen nun, dass auch I_1 offen ist. Da $t_0 \in I_1$ und I nach 5.12 zusammenhängend ist, wird dann $I_2 = \emptyset$ folgen, was gerade die Behauptung ist.

Sei also $t_1 \in I_1$, sei $a = \beta(t_1) = \gamma(t_1)$ und sei $V \subset U$ eine offene Umgebung von a , auf der f einer Lipschitz-Bedingung mit der Konstanten L genügt. Ferner sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $[t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \subset I$ sowie $\beta(t) \in V$ und $\gamma(t) \in V$ für alle t mit $|t - t_1| \leq \varepsilon$. Ein solches ε existiert, weil β und γ stetig sind. Sei

$$C := \sup\{|\beta(t) - \gamma(t)| : |t - t_1| \leq \varepsilon\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |\beta(t) - \gamma(t)| &= |(\beta(t) - \beta(t_1)) - (\gamma(t) - \gamma(t_1))| \\ &= \left| \int_{t_1}^t [f(\beta(s)) - f(\gamma(s))] ds \right| \\ &\leq \left| \int_{t_1}^t |f(\beta(s)) - f(\gamma(s))| ds \right| \leq L \left| \int_{t_1}^t |\beta(s) - \gamma(s)| ds \right|. \end{aligned} \quad (1)$$

Wir behaupten, dass

$$|\beta(t) - \gamma(t)| \leq C \cdot \frac{L^k |t - t_1|^k}{k!} \quad (2)$$

für alle $k \in \mathbf{N}$ und alle t mit $|t - t_1| \leq \varepsilon$. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach k . Für $k = 0$ ist das die Definition von C . Der Induktionsschritt folgt für $t \geq t_1$ aus

$$\begin{aligned} |\beta(t) - \gamma(t)| &\leq L \int_{t_1}^t |\beta(s) - \gamma(s)| ds && \text{(nach (1))} \\ &\leq L \int_{t_1}^t C \cdot \frac{L^k (s - t_1)^k}{k!} ds && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)} \\ &= C \cdot \frac{L^{k+1} (t - t_1)^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

und durch eine ähnliche Rechnung für $t \leq t_1$. Lässt man nun $k \rightarrow \infty$ gehen, so zeigt (2), dass $\beta(t) = \gamma(t)$ für alle $|t - t_1| \leq \varepsilon$. Also ist $]t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon[\subset I_1$, das heisst, t_1 ist ein innerer Punkt von I_1 . Da $t_1 \in I_1$ beliebig war, ist I_1 offen, wie behauptet.

15.3. Beispiel. Wenn f lediglich stetig ist, so wird der Eindeutigkeitsatz falsch. Als Beispiel betrachte man das auf ganz \mathbf{R} definierte und stetige Vektorfeld $f(x) = x^{2/3}$, das in keiner Umgebung von 0 einer Lipschitz-Bedingung genügt. Durch den Nullpunkt gehen die zwei Lösungen $\beta(t) = 0$ und $\gamma(t) = \frac{1}{27}t^3$.

15.4. Existenzsatz von Picard-Lindelöf. Sei f ein auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbf{R}^n$ lokal dehnungsbeschränktes Vektorfeld und a ein Punkt von U . Dann gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von a und ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in V$ gibt es eine (nach Satz 15.2 eindeutig bestimmte) Integralkurve $\gamma = \gamma_x :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow U$ von f mit $\gamma_x(0) = x$. Die Abbildung $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \rightarrow U$, $\phi(t, x) := \gamma_x(t)$, ist stetig; die Lösung γ_x hängt also insbesondere stetig von der Anfangsbedingung x ab.

Beweis. Wähle eine genügend kleine offene Kugel $B_r(a) \subset U$, auf der f einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten $L > 0$ genügt. Für $x \in B_r(a)$ gilt dann

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq L|x - a| + |f(a)| \leq Lr + |f(a)| =: M.$$

Angenommen, γ ist eine Lösung mit $\gamma(0) = x$. Dann folgt aus $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ durch Integration

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(s)) ds.$$

Die Beweisidee ist nun, diese Integralgleichung durch Iteration zu lösen. Wir setzen dazu

$$V := B_{r/2}(a) \quad \text{und} \quad \varepsilon := \frac{r}{2M}.$$

Für $x \in V$ und $|t| < \varepsilon$ definieren wir induktiv

$$\gamma_0(t) = \phi_0(t, x) = x, \quad \gamma_{k+1}(t) = \phi_{k+1}(t, x) = x + \int_0^t f(\phi_k(s, x)) ds. \quad (1)$$

Damit das wohldefiniert ist, müssen wir zeigen, dass $\gamma_k(t) \in B_r(a) \subset U$ für alle $k \in \mathbf{N}$ und alle $|t| < \varepsilon$. Genauer zeigen wir durch Induktion, dass

$$|\gamma_k(t) - a| \leq |t|M + |x - a|. \quad (2)$$

Wegen $|t|M < \varepsilon M = r/2$ und $|x - a| < r/2$ ist dann insbesondere $\gamma_k(t) \in B_r(a)$. Für $k = 0$ ist (2) klar. Wenn es schon für k gilt, dann folgt

$$\begin{aligned} |\gamma_{k+1}(t) - a| &\leq |\gamma_{k+1}(t) - x| + |x - a| \\ &= \left| \int_0^t f(\gamma_k(s)) ds \right| + |x - a| \\ &\leq |t|M + |x - a|, \end{aligned}$$

Wie behauptet. Als Nächstes zeigen wir

$$|\phi_k(t, x) - \phi_{k-1}(t, x)| \leq \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k |t|^k}{k!} \quad \text{für alle } k \geq 1. \quad (3)$$

Der Beweis geht wieder durch Induktion nach k . Für $k = 1$ ist

$$|\phi_1(t, x) - x| = \left| \int_0^t f(x) ds \right| \leq \left| \int_0^t |f(x)| ds \right| \leq \left| \int_0^t M ds \right| = M|t|.$$

Der Induktionsschritt folgt für $t \geq 0$ aus

$$\begin{aligned} |\phi_{k+1}(t, x) - \phi_k(t, x)| &\leq \int_0^t |\mathbf{f}(\phi_k(s, x)) - \mathbf{f}(\phi_{k-1}(s, x))| ds \\ &\leq \int_0^t L |\phi_k(s, x) - \phi_{k-1}(s, x)| ds \\ &\leq \int_0^t L \cdot \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k s^k}{k!} ds = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^{k+1} |t|^{k+1}}{(k+1)!}, \end{aligned}$$

und durch eine ähnliche Rechnung für $t \leq 0$.

Nun setze $\psi_0 = \phi_0$ und $\psi_k = \phi_k - \phi_{k-1}$ für $k \geq 1$. Dann ist $\phi_k = \sum_{j=0}^k \psi_j$ und nach (3) hat die Reihe $\sum_0^\infty \psi_k$ die von $(t, x) \in]-\varepsilon, \varepsilon[\times V$ unabhängige konvergente Majorante

$$\sum_0^\infty \frac{M}{L} \cdot \frac{L^k \varepsilon^k}{k!} = \frac{M}{L} e^{\varepsilon L}.$$

Also konvergiert nach 12.2 und 12.3 die Reihe $\sum_0^\infty \psi_k$ und folglich auch die Funktionenfolge (ϕ_k) gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion ϕ auf $]-\varepsilon, \varepsilon[\times V$, deren Werte wegen (2) in $B_r(a) \subset U$ liegen. Die Folge $\mathbf{f} \circ \phi_k$ konvergiert ebenfalls gleichmässig gegen $\mathbf{f} \circ \phi$, denn

$$|\mathbf{f}(\phi_k(t, x)) - \mathbf{f}(\phi(t, x))| \leq L |\phi_k(t, x) - \phi(t, x)|$$

wegen der Lipschitz-Bedingung auf $B_r(a)$. Also folgt für $k \rightarrow \infty$ in (1), und weil man Integral und Limes wegen der gleichmässigen Konvergenz vertauschen darf, dass

$$\phi(t, x) = x + \int_0^t \mathbf{f}(\phi(s, x)) ds. \quad (4)$$

Hieraus sieht man, dass $\phi(t, x)$ bei festem x stetig differenzierbar als Funktion von t ist, mit der Ableitung

$$\dot{\phi}(t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = \mathbf{f}(\phi(t, x)).$$

Schliesslich ist $\phi(0, x) = x$ klar auf Grund von (4).

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Lösung $\phi(t, x)$ sogar stetig differenzierbar von t und x abhängt, falls das Vektorfeld \mathbf{f} stetig differenzierbar ist. Dazu brauchen wir erst einige Vorbereitungen.

15.5. Lemma. Sei $I \subset \mathbf{R}$ ein offenes Intervall und $P \subset \mathbf{R}^p$ offen und sei $g : I \times P \rightarrow \mathbf{R}^m$ stetig. Ferner sei $t_0 \in I$. Dann ist

$$h(t, \xi) := \int_{t_0}^t g(s, \xi) ds$$

stetig als Funktion von $(t, \xi) \in I \times P$.

Beweis. Wir bemerken erst, dass h bezüglich ξ nach Satz 10.8 stetig ist und als Funktion der oberen Grenze t sogar stetig differenzierbar, aber das genügt leider nicht ganz. Sei also $(t_1, \xi_1) \in I \times P$. Dann gilt

$$|h(t, \xi) - h(t_1, \xi_1)| \leq |h(t, \xi) - h(t_1, \xi)| + |h(t_1, \xi) - h(t_1, \xi_1)|.$$

Nach Satz 10.8 geht der zweite Term gegen Null für $\xi \rightarrow \xi_1$. Weiter ist g wegen der Stetigkeit in einer Umgebung von (t_1, ξ_1) beschränkt, etwa durch M . Daher folgt nun für den ersten Term

$$|h(t, \xi) - h(t_1, \xi)| \leq \left| \int_{t_0}^{t_1} M ds \right| = M|t_0 - t_1|,$$

und hieraus sieht man, dass $|h(t, \xi) - h(t_1, \xi_1)| \rightarrow 0$ für $(t, \xi) \rightarrow (t_1, \xi_1)$.

Als Nächstes brauchen wir eine Verfeinerung des Satzes über die Resolvente „mit Parametern“.

15.6. Lemma. *Seien I , P und t_0 wie oben und sei $A: I \times P \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ stetig. Für jeden festen Parameterwert $\xi \in P$ sei $R(t, \xi)$ die Resolvente der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = A(t, \xi)x$ mit Anfangswert $R(t_0, \xi) = \mathbf{1}_n$. Dann ist die Abbildung $R: I \times P \rightarrow \text{GL}_n(\mathbf{R})$, $(t, \xi) \mapsto R(t, \xi)$, stetig.*

Beweis. Wie im Beweis von Satz 14.3 ist

$$R(t, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(t, \xi) \quad (1)$$

wobei $R_0 = \mathbf{1}_n$ und

$$R_{k+1}(t, \xi) = \int_{t_0}^t A(s, \xi) R_k(s, \xi) ds.$$

Mittels Induktion und Lemma 15.5 sieht man, dass die R_k auf $I \times P$ stetig sind. Sei $[a, b] \subset I$ ein Intervall, das t_0 enthält, und $K \subset P$ kompakt. Dann ist die stetige Abbildung A auf $[a, b] \times K$ beschränkt, etwa durch M . Wie im Beweis von Satz 14.3 zeigt man, dass

$$|R_k(t, \xi)| \leq \frac{M^k |b - a|^k}{k!}$$

für alle $(t, \xi) \in [a, b] \times K$. Folglich konvergiert die Reihe (1) auf $I \times P$ lokal gleichmäßig, woraus die Stetigkeit von R nach 12.2 und 12.3 folgt.

15.7. Satz über die Variationsgleichung. *Sei f ein C^1 -Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subset \mathbf{R}^n$, sei $a \in U$ und seien ε, V und $\phi:]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \rightarrow U$ wie in Satz 15.4. Dann ist ϕ eine C^1 -Abbildung; insbesondere hängen also die Lösungen stetig differenzierbar von den Anfangsbedingungen ab. Die sogenannte Raumableitung*

$$R(t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x) = \left(\frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(t, x) \right)$$

genügt der Variationsgleichung

$$\dot{R}(t, x) = f'(\phi(t, x)) \cdot R(t, x) \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung $R(0, x) = \mathbf{1}_n$, ist also gerade die parameterabhängige Resolvente zur Matrix $A(t, x) = f'(\phi(t, x))$. Insbesondere ist $\phi'(t, x)$ invertierbar.

Beweis. Bei festem x ist $t \mapsto \phi(t, x)$ differenzierbar, und $\dot{\phi}(t, x) = f(\phi(t, x))$ ist stetig als Funktion von (t, x) , weil das nach 15.4 für ϕ gilt. Daher genügt es zu

zeigen, dass für $|t| < \varepsilon$ die Abbildung $\phi_t : V \rightarrow U$, $x \mapsto \phi(t, x)$, differenzierbar ist und ihre Ableitung $\phi'_t(x) = (\partial\phi/\partial x)(t, x)$ als Funktion von (t, x) stetig ist. Dazu betrachten wir $x, y \in V$ und setzen $\psi(t, x, y) = \phi_t(y) - \phi_t(x)$. Dann gilt nach der Kettenregel, weil f stetig differenzierbar ist,

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t, x, y) &= \dot{\phi}(t, y) - \dot{\phi}(t, x) = f(\phi_t(y)) - f(\phi_t(x)) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\phi_t(x) + s\psi(t, x, y)) ds \\ &= \left[\int_0^1 f'(\phi_t(x) + s\psi(t, x, y)) ds \right] \cdot \psi(t, x, y) = A(t, x, y) \psi(t, x, y), \end{aligned}$$

wobei

$$A(t, x, y) = \int_0^1 f'(\phi_t(x) + s\psi(t, x, y)) ds. \quad (2)$$

Nach Satz 15.4 und Satz 10.8 ist $A :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times V \rightarrow \text{Mat}_n(\mathbf{R})$ stetig. Also genügt ψ einer linearen homogenen Differentialgleichung, die noch von den Parametern $\xi = (x, y) \in V \times V$ abhängt. Sei $R(t, x, y)$ die Resolvente dieses Systems bezüglich $t_0 = 0$. Nach Lemma 15.6 ist das eine stetige Funktion von (t, x, y) , und nach Satz 14.3 und wegen $\psi(0, x, y) = y - x$ ist $\psi(t, x, y) = R(t, x, y) \cdot (y - x)$. Es folgt

$$\begin{aligned} |\phi_t(y) - \phi_t(x) - R(t, x, x)(y - x)| &= |(R(t, x, y) - R(t, x, x))(y - x)| \\ &\leq |R(t, x, y) - R(t, x, x)| |y - x|, \end{aligned}$$

und es gilt $\lim_{y \rightarrow x} |R(t, x, y) - R(t, x, x)| = 0$ wegen der Stetigkeit von R . Daher ist ϕ_t im Punkt x differenzierbar mit Ableitung

$$\phi'_t(x) = R(t, x, x) =: R(t, x), \quad (3)$$

und letztere ist, wieder nach Lemma 15.6, stetig als Funktion von (t, x) . Damit ist die stetige Differenzierbarkeit von ϕ nach (t, x) bewiesen.

Schliesslich ist $\psi(t, x, x) = 0$ und folglich nach (2)

$$A(t, x) := A(t, x, x) = \int_0^1 f'(\phi_t(x)) ds = f'(\phi_t(x)),$$

und daher folgt durch Differenzieren von (3)

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi'_t(x) = \dot{R}(t, x) = A(t, x)R(t, x) = f'(\phi_t(x))\phi'_t(x),$$

also die behauptete Variationsgleichung (1). Für $t = 0$ und alle $x \in V$ ist $\phi'_0(x) = R(0, x, x) = \mathbf{1}_n$.

15.8. Zeit- und parameterabhängige Systeme. Bisher haben wir der Einfachheit halber nur autonome Systeme, also zeitunabhängige Vektorfelder, betrachtet. Wie wir jetzt zeigen wollen, ist das keine wesentliche Einschränkung. Sei $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ und $P \subset \mathbf{R}^p$ offen und seien f^i Funktionen auf $U \times P$. Wir betrachten das zeit- und parameterabhängige System

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \dots, x^n, \xi^1, \dots, \xi^p) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Mit (1) assoziieren wir das Vektorfeld \tilde{f} auf $\tilde{U} = U \times P \subset \mathbf{R}^{1+n+p}$ mit den Koordinaten x^0, \dots, x^{n+p} , das durch

$$\tilde{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ f^1(x^0, \dots, x^{n+p}) \\ \vdots \\ f^n(x^0, \dots, x^{n+p}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert ist. Falls $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{U}$ eine Integralkurve von \tilde{f} mit den Komponenten γ^i und dem Anfangswert $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0 = (t_0, x_0, \xi_0)$ ist, so ist $\dot{\gamma}^0(t)$ konstant gleich 1, also $\gamma^0(t) = t + t_0$, und weiter ist $\dot{\gamma}^j(t) = 0$ für $j > n$, sodass $\gamma^j(t) = x_0^j$ konstant ist, für $j > n$. Also ist $\beta(t) := (\gamma^1(t - t_0), \dots, \gamma^n(t - t_0))$ eine Lösung von (1) mit Anfangswert $\beta(t_0) = x_0$ und Parameterwert $\xi_0 = (x_0^{n+1}, \dots, x_0^{n+p})$. Umgekehrt liefert eine Lösung β von (1) mit $\beta(t_0) = x_0$ zum Parameterwert ξ_0 eine Integralkurve $\tilde{\gamma}$ von \tilde{f} mit $\tilde{\gamma}(0) = (t_0, x_0, \xi_0)$, indem man setzt $\tilde{\gamma}(t) = (t + t_0, \beta(t + t_0), \xi_0)$. Damit lassen sich die bewiesenen Sätze auch auf Systeme des Typs (1) anwenden, und man erhält insbesondere:

15.9. Satz. Die Funktionen f^i in 15.8.1 seien stetig differenzierbar. Dann sind die Lösungen von 15.8.1 eindeutig: Zwei Lösungen β und γ mit $\beta(t_0) = \gamma(t_0)$ stimmen auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein. Zu jedem (t_0, x_0, ξ_0) gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung \tilde{V} von (x_0, ξ_0) , sodass für alle t mit $|t - t_0| < \varepsilon$ und $(x, \xi) \in \tilde{V}$ die Lösung $\phi(t, x, \xi)$ von 15.8.1 mit Anfangswert $\phi(t_0, x, \xi) = x$ existiert und stetig differenzierbar von (t, x, ξ) abhängt.

§16. Der Fluss eines Vektorfeldes

16.1. Definition. In diesem Paragraphen ist stets $U \subset \mathbf{R}^n$ offen und f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf U . Wir betrachten einen Punkt $a \in U$ und die Menge \mathcal{I} aller offenen Intervalle $I \subset \mathbf{R}$ mit folgender Eigenschaft: I enthält den Nullpunkt, und es gibt eine Integralkurve $\gamma_I : I \rightarrow U$ von f mit Anfangswert $\gamma_I(0) = a$. Nach Satz 15.4 ist \mathcal{I} nicht leer. Es sei I_a die Vereinigung aller $I \in \mathcal{I}$. Dann ist I_a wieder ein offenes Intervall, das den Nullpunkt enthält; genauer gilt $I_a =]t_-, t_+[$, wobei t_- das Infimum aller linken Endpunkte von Intervallen in \mathcal{I} ist, und analog t_+ das Supremum aller rechten solchen Endpunkte (Beweis als Aufgabe!). Nach Satz 15.2 gilt für $I, J \in \mathcal{I}$, dass die Integralkurven γ_I und γ_J auf $I \cap J$ übereinstimmen. Also gibt es eine wohldefinierte Integralkurve $\gamma_a : I_a \rightarrow U$, sodass $\gamma_a|_I = \gamma_I$ für alle $I \in \mathcal{I}$ gilt. Offenbar ist I_a das maximale Existenzintervall einer Integralkurve von f mit Anfangswert a .

Weiter definieren wir

$$D := \{(t, x) \in \mathbf{R} \times U : t \in I_x\} = \bigcup_{x \in U} (I_x \times \{x\}) \subset \mathbf{R} \times U,$$

und eine Abbildung $\phi : D \rightarrow U$ durch

$$\phi(t, x) := \phi_t(x) := \gamma_x(t).$$

Die Abbildung ϕ heisst der von f erzeugte Fluss. Das Vektorfeld f heisst *vollständig*, falls $D = \mathbf{R} \times U$, oder anders gesagt: wenn das maximale Existenzintervall jeder Integralkurve von f ganz \mathbf{R} ist.

16.2. Beispiele. (i) Sei f ein lineares Vektorfeld, also $f(x) = Ax$ für eine $n \times n$ -Matrix A , auf $U = \mathbf{R}^n$. Dann ist f vollständig, und es gilt

$$\phi_t(x) = e^{tA}x$$

nach Satz 12.6.

(ii) Sei $f(x) = x^2$ auf $U = \mathbf{R}$. Durch Trennung der Variablen rechnet man leicht nach, dass

$$\phi_t(x) = \frac{x}{1 - tx}$$

mit dem Definitionsbereich

$$D = \{(t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : tx < 1\}.$$

Hier ist das maximale Existenzintervall der Lösung durch x gegeben durch

$$I_x = \begin{cases} \left] \frac{1}{x}, +\infty[& \text{falls } x < 0, \\ \mathbf{R} & \text{falls } x = 0, \\ \left] -\infty, \frac{1}{x}[& \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Dieses Vektorfeld ist also nicht vollständig.

(iii) Es sei

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$$

auf $U = \mathbf{R}^2$. Zur Bestimmung des Flusses lösen wir das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = 1 - x^2, \quad \dot{y} = -xy \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung (x_0, y_0) zur Zeit $t = 0$. Trennung der Variablen liefert für die erste Gleichung

$$dt = \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{1 + x} + \frac{dx}{1 - x} \right) = \frac{1}{2} d \log \left| \frac{1 + x}{1 - x} \right|,$$

und folglich $2t = \log |(1 + x)/(1 - x)| + \text{const}$ oder nach Exponenzieren und Berücksichtigung der Anfangsbedingung

$$\frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1 + x_0}{1 - x_0} \cdot e^{2t}.$$

Durch Auflösen nach x ergibt sich

$$x = x(t) = \frac{(1 + x_0)e^t - (1 - x_0)e^{-t}}{(1 + x_0)e^t + (1 - x_0)e^{-t}}. \tag{2}$$

Trägt man dies in die zweite Gleichung ein, so bekommt man eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten für y . Die üblichen Methoden liefern die Lösung

$$y = y(t) = \frac{2y_0}{(1 + x_0)e^t + (1 - x_0)e^{-t}}. \tag{3}$$

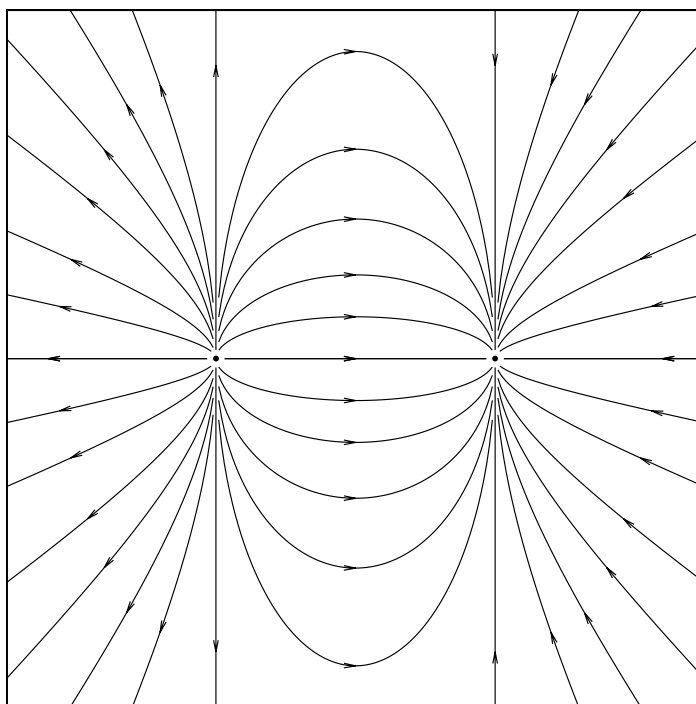
Um zu der in 16.1 verwendeten Schreibweise zu kommen, wo wir auch die Anfangsbedingungen als variabel ansehen, ersetzen wir in (2) und (3) x_0 und y_0 durch x und y , und schreiben $\phi_t(x, y)$ statt $(x(t), y(t))$. Dann ist der Fluss von f gegeben durch

$$\phi_t(x, y) = \frac{1}{(1+x)e^t + (1-x)e^{-t}} \begin{pmatrix} (1+x)e^t - (1-x)e^{-t} \\ 2y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Für die maximalen Existenzintervalle ergibt sich

$$I_{(x,y)} = \begin{cases} \mathbf{R} & \text{falls } |x| \leq 1, \\ \left] \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right), +\infty \right[& \text{falls } x > 1, \\ \left] -\infty, \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-1}{x+1} \right) \right[& \text{falls } x < -1. \end{cases}$$

Auch dieses Vektorfeld ist also nicht vollständig.



Um eine anschauliche Vorstellung von den Lösungen zu gewinnen, betrachten wir zuerst wie in 11.9 die zu (1) gehörige Pfaffsche Gleichung

$$\omega = xy \, dx + (1 - x^2) \, dy = 0,$$

mit den singulären Punkten $(\pm 1, 0)$. Auf dem Bereich $\{(x, y) : (1 - x^2)y \neq 0\}$ ist

$$\begin{aligned} 2\omega &= (1 - x^2)y \left(\frac{2x \, dx}{1 - x^2} + \frac{2 \, dy}{y} \right) \\ &= (1 - x^2)y \left(-d \log |1 - x^2| + d \log y^2 \right) \\ &= (1 - x^2)y \, d \log \left(\frac{y^2}{|1 - x^2|} \right). \end{aligned}$$

Also sind die „geometrischen“ Integralkurven (d.h., ohne Berücksichtigung der Durchlaufung) die vertikalen Geraden $x = \pm 1$, die x -Achse $y = 0$, sowie die Kurven $y^2 = C(1 - x^2)$. Für $C > 0$ ist das eine Schar von Ellipsen mit den Scheiteln in den Punkten $(\pm 1, 0)$, und für $C < 0$ eine Schar von Hyperbeln mit denselben Scheiteln. Die Art der Durchlaufung ergibt sich aus (4) bzw. aus dem Vektorfeld f . So ist etwa die erste Komponente von f für $|x| < 1$ positiv und für $|x| > 1$ negativ, sodass die Integralkurven auf den Punkt $(1, 0)$ hin und vom Punkt $(-1, 0)$ weg durchlaufen werden. Interpretiert man f als eine Flüssigkeitsströmung, dann ist $(-1, 0)$ eine Quelle und $(1, 0)$ eine Senke.

16.3. Satz. Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U \subset \mathbf{R}^n$ und sei $\phi: D \rightarrow U$ der Fluss von f .

(a) Für $(t, x) \in D$ und $s \in \mathbf{R}$ gilt

$$(s + t, x) \in D \iff (s, \phi_t(x)) \in D,$$

und in diesem Fall ist

$$\phi_{s+t}(x) = \phi_s(\phi_t(x)). \quad (1)$$

(b) Für jedes $t \in \mathbf{R}$ sei $D_t = \{x \in U : (t, x) \in D\}$. Dann ist $\phi_t: D_t \rightarrow U$ injektiv, es gilt $\phi_t(D_t) = D_{-t}$, und die Umkehrabbildung $\phi_t^{-1}: D_{-t} \rightarrow D_t$ ist gegeben durch

$$\phi_t^{-1} = \phi_{-t}. \quad (2)$$

Beweis. Setze $y = \phi_t(x)$ und betrachte die Kurve $\beta(s) = \phi_{s+t}(x) = \gamma_x(s + t)$. Offenbar ist $\beta(s)$ definiert für alle s mit $s + t \in I_x$, also alle $s \in I_x - t$. Weiter gilt

$$\frac{d\beta}{ds} = \dot{\gamma}_x(s + t) = f(\gamma_x(s + t)) = f(\beta(s)),$$

und folglich ist β eine Integralkurve von f , mit Anfangswert $\beta(0) = \phi_t(x) = y$. Nach dem Eindeutigkeitssatz und wegen der Maximalität von I_y folgt $I_x - t \subset I_y$ und $\beta(s) = \gamma_y(s)$, also $\phi_{s+t}(x) = \phi_s(y) = \phi_s(\phi_t(x))$, für alle $s \in I_x - t$. Damit haben wir bewiesen: Falls $s + t \in I_x$ also $(s + t, x) \in D$, so ist $s = (s + t) - t \in I_x - t \subset I_y$, also $(s, \phi_t(x)) \in D$, und es gilt (1). Insbesondere können wir dies auf $s = -t$ anwenden; denn $-t + t = 0 \in I_x$, und bekommen: $-t \in I_y$ und $\phi_{-t}(y) = \phi_{-t}(\phi_t(x)) = x$. Nun betrachte die Kurve $\alpha(u) = \gamma_y(u - t)$. Offenbar ist α definiert für alle u mit $u - t \in I_y$, also für $u \in I_y + t$. Weiter gilt $\alpha(0) = \gamma_y(-t) = \phi_{-t}(y) = x$, und $\dot{\alpha}(u) = \dot{\gamma}_y(u - t) = f(\gamma_y(u - t)) = f(\alpha(u))$. Folglich (nach Definition der maximalen Integralkurve γ_x) ist $I_y + t \subset I_x$ und α und γ_x stimmen auf $I_y + t$ überein. Das zeigt: Falls $s \in I_y$, also $(s, y) \in D$, so ist $s + t \in I_y + t \subset I_x$, also $(s + t, x) \in D$. Damit ist alles bewiesen.

16.4. Korollar. Sei f vollständig. Dann ist ϕ_t für jedes $t \in \mathbf{R}$ eine Bijektion (sogar ein Diffeomorphismus, siehe 16.11) von U auf sich, und es gilt $\phi_0 = \text{Id}$ und $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ für alle $s, t \in \mathbf{R}$.

Wir können dies auch so ausdrücken: Die Abbildung $t \mapsto \phi_t$ ist ein Homomorphismus der additiven Gruppe \mathbf{R} in die Gruppe aller Bijektionen von U auf sich. Man nennt dann $(\phi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ die von f erzeugte Einparametergruppe. Falls f linear ist, dann ist $\phi_t = e^{tA}$, und die Gleichung 16.3.1 ist gerade die Funktionalgleichung der Matrizen- e -Funktion 12.5(c).

16.5. Satz. Sei $\gamma_x: I_x \rightarrow U$ die maximale Integralkurve des Vektorfeldes f durch den Punkt x . Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

(i) $I_x = \mathbf{R}$, $\gamma_x(t) = x$ (konstant) und $f(x) = 0$. In diesem Fall spricht man von einer stationären Lösung.

(ii) $\gamma_x: I_x \rightarrow U$ ist injektiv und $\dot{\gamma}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in I_x$.

(iii) $I_x = \mathbf{R}$, $\gamma_x: \mathbf{R} \rightarrow U$ ist periodisch mit einer Periode $\tau > 0$, und es gilt wieder $\dot{\gamma}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

Beweis. Falls $f(x) = 0$, so ist die konstante Kurve $\gamma(t) = x$ für alle t offenbar eine Lösung durch x , und wegen der Eindeutigkeit auch die einzige. Sei nun $f(x) \neq 0$. Wir behaupten, dass dann $\dot{\gamma}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in I_x$: Wäre etwa $\dot{\gamma}_x(t_1) = 0$ für ein $t_1 \in I_x$, so würde folgen, dass f an der Stelle $x_1 := \gamma_x(t_1)$ eine Nullstelle hat. Dann hätte man durch den Punkt x_1 zwei Lösungen, nämlich die konstante Lösung $\alpha(s) = x_1$ und die Lösung $\beta(s) = \gamma_x(t_1 + s)$, die nicht gleich sein können, weil $\beta(-t_1) = \gamma_x(0) = x$ und $\alpha(-t_1) = x_1$, und $x \neq x_1$ wegen $f(x) \neq 0 = f(x_1)$, Widerspruch.

Nun sei wieder $f(x) \neq 0$. Wir nehmen an, dass der Fall (ii) nicht vorliegt. Also ist γ_x nicht injektiv, etwa $\gamma_x(t_1) = \gamma_x(t_2)$ für $t_1 < t_2$. Sei $\tau = t_2 - t_1$ und $y = \phi_{t_1}(x) = \gamma_x(t_1)$. Dann ist $(t_1 + \tau, x) \in D$ und $(t_1, x) \in D$, folglich nach Satz 16.3 auch $(\tau, \phi_{t_1}(x)) = (\tau, y) \in D$ und es gilt

$$\phi_\tau(y) = \phi_{t_1+\tau}(x) = \gamma_x(t_1 + \tau) = \gamma_x(t_1) = y.$$

Wieder nach Satz 16.3 folgt $(2\tau, y) \in D$, denn $(\tau, \phi_\tau(y)) = (\tau, y) \in D$, usw. Allgemein ist also $(n\tau, y) \in D$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Ferner gilt $(-\tau, \phi_\tau(y)) \in D$ und $y = \phi_{-\tau}(\phi_\tau(y)) = \phi_{-\tau}(y)$, daher nun auch $(n\tau, y) \in D$ für alle $n \in \mathbf{Z}$. Das zeigt, dass $I_y = \mathbf{R}$. Wegen $y = \phi_{t_1}(x)$ und Satz 16.3 folgt auch $I_x = \mathbf{R}$. Schliesslich gilt $\gamma_x(t) = \gamma_x(t + \tau)$ für alle $t \in \mathbf{R}$; denn die linke und die rechte Seite sind Lösungen, die für $t = t_1$ übereinstimmen. Also ist γ_x periodisch mit der Periode τ .

16.6. Satz. Sei $I_a =]t_-, t_+[$, sei $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge, und sei $\gamma_a(t) \in K$ für alle $t \in [0, t_+[$. Dann ist $t_+ = +\infty$. Analoges gilt für den linken Endpunkt t_- von I_a .

Beweis. Wir nehmen an, dass $t_+ < +\infty$. Sei (t_k) eine Folge in $[0, t_+[$, die gegen t_+ konvergiert, und sei $a_k := \gamma_a(t_k) \in K$. Wegen der Kompaktheit von K kann man, eventuell nach Übergang zu einer Teilfolge, annehmen, dass $\lim a_k = b \in K$ existiert. Insbesondere liegt b wieder in U . Nach Satz 15.4 gibt es eine Umgebung V von b und ein $\varepsilon > 0$ mit $] - \varepsilon, \varepsilon[\times V \subset D$. Für genügend grosses k ist $a_k = \phi_{t_k}(a) \in V$ und $0 < t_+ - t_k < \varepsilon$. Also ist $(t_+ - t_k, \phi_{t_k}(a)) \in D$. Nach Satz 16.3 folgt $((t_+ - t_k) + t_k, a) = (t_+, a) \in D$, also $t_+ \in I_a$, Widerspruch.

16.7. Korollar. Ein beschränktes C^1 -Vektorfeld auf ganz \mathbf{R}^n ist vollständig.

Beweis. Sei $I_a =]t_-, t_+[$ das maximale Existenzintervall der Lösung durch den Punkt a . Angenommen, $t_+ < +\infty$. Dann gilt

$$|\gamma_a(t) - a| = \left| \int_0^t f(\gamma_a(s)) ds \right| \leq \int_0^t |f(\gamma_a(s))| ds \leq Mt_+,$$

wenn etwa f durch die Konstante M beschränkt ist. Also liegt $\gamma_a(t)$ für alle $t \in [0, t_+[$ in der abgeschlossenen Kugel mit Mittelpunkt a und Radius Mt_+ , und nach Satz 16.6 ist $t_+ = +\infty$, Widerspruch. Analog zeigt man $t_- = -\infty$.

16.8. Beispiel: Das Pendel. Die beiden vorigen Resultate lassen sich auch dann anwenden, wenn eine explizite Lösung der Differentialgleichung nicht oder nur sehr schwer möglich ist. Als Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung $\ddot{x} = -\sin x$ des Pendels, die zum System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Wie in 11.10 ist die zugehörige Pfaffsche Gleichung $\omega = y dy + \sin x dx = d(y^2/2 - \cos x) = 0$. Also sind die geometrischen Lösungen die Kurven

$$y^2 = 2(C + \cos x), \quad (1)$$

wobei offenbar $C \geq -1$ sein muss. Einsetzen von (1) führt auf das elliptische Integral

$$t = \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2(C + \cos x)}},$$

das sich nur für $C = 1$ durch elementare Funktionen ausdrücken lässt.

Für $C = -1$ erhält man genau die stationären Lösungen (Nullstellen von f) $(n\pi, 0)$, $n \in \mathbf{Z}$. Nun sei $C > -1$ und sei $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ eine maximale nicht stationäre Lösung zum Wert C . Zur Vermeidung von Indizes schreiben wir $\gamma = (\alpha, \beta)$ und setzen $\gamma(0) = (a, b)$. Dann gilt also

$$\beta(t)^2 = 2(C + \cos \alpha(t)) \quad (2)$$

für alle $t \in I$, insbesondere $b^2 = 2(C + \cos a)$. Weil f in x -Richtung periodisch mit der Periode 2π ist, ist für jedes $n \in \mathbf{Z}$ auch $(\alpha + 2\pi n, \beta)$ eine Lösung mit demselben Definitionsbereich wie γ . Daher können wir ohne Einschränkung $|a| \leq \pi$ annehmen.

Wir betrachten jetzt den Fall $-1 < C \leq 1$ und behaupten, dass dann sogar

$$|\alpha(t)| < \pi \quad \text{für alle } t \in I \quad (3)$$

gilt. Zunächst ist $|a| < \pi$, denn wäre $a = \pm\pi$ dann würde folgen $b^2 = 2(C + \cos(\pm\pi)) = 2(C - 1) \leq 0$ und daher $b = 0$, und γ wäre doch eine stationäre Lösung. Angenommen, es wäre $|\alpha(t)| \geq \pi$ für ein $t \in I$. Dann gibt es wegen $|\alpha(0)| = |a| < \pi$ nach dem Zwischenwertsatz ein s zwischen 0 und t mit $|\alpha(s)| = \pi$. Folglich ist wieder $\beta(s)^2 = 2(C + \cos \alpha(s)) = 2(C - 1) \leq 0$ und damit $\beta(s) = 0$ und $\gamma(s) = (\pm\pi, 0)$, also wäre γ wieder stationär. Damit ist (3) bewiesen. Zusammen mit (2) zeigt nun (3), dass $\gamma(t)$ für alle $t \in I$ in der kompakten Teilmenge

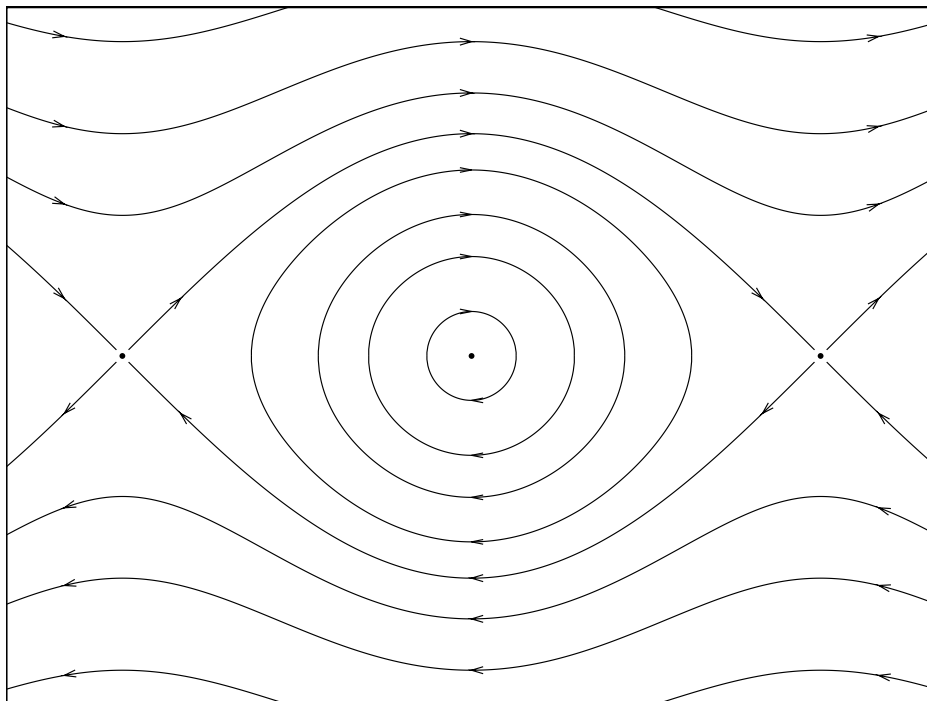
$$K = \{(x, y) : |x| \leq \pi, |y| \leq 2\}$$

bleibt. Nach Satz 16.6 ist also $I = \mathbf{R}$. Eine genauere Analyse ergibt, dass für $-1 < C < 1$ die Lösungen periodisch sind, während sie für $C = 1$ asymptotisch den stationären Punkten $(\pm\pi, 0)$ zustreben.

Nun sei $C > 1$. Dann ist $\beta(t)^2 = 2(C + \cos \alpha(t)) > 0$ für alle $t \in I$, insbesondere ist $b \neq 0$, sodass α der Differentialgleichung

$$\dot{x} = g(x) = \operatorname{sgn}(b)\sqrt{2(C + \cos x)}$$

genügt. Das auf ganz \mathbf{R} definierte und stetig differenzierbare Vektorfeld g ist offenbar beschränkt. Also ist $\alpha(t)$ nach Korollar 16.7 auf ganz \mathbf{R} definiert, und ebenso $\beta(t)$ nach (2). Insgesamt zeigt das die Vollständigkeit von f .



Wir kommen schliesslich zur Globalisierung des Satzes 15.7 über die Variationsgleichung.

16.9. Satz. Sei f ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf $U \subset \mathbf{R}^n$ und $\phi : D \rightarrow U$ der zugehörige Fluss wie in 16.1. Dann ist D offen in $U \times \mathbf{R}$ und ϕ ist stetig differenzierbar. Die wie in 15.7 definierte Raumableitung $\phi'_t(x)$ genügt auf ganz D der Variationsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi'_t(x) = f'(\phi_t(x)) \cdot \phi'_t(x).$$

Beweis. Sei $a \in U$ ein beliebiger Punkt, I_a der Definitionsbereich der maximalen Lösung durch a , und sei $I^* \subset I_a$ die Menge aller $t \in I_a$ mit folgender Eigenschaft:

- Es gibt ein offenes Intervall J mit $t \in J \subset I_a$ und eine offene
- (*) Umgebung $V \subset U$ von a , sodass $J \times V \subset D$ und $\phi : J \times V \rightarrow U$ stetig differenzierbar ist.

Für die Offenheit von D und die stetige Differenzierbarkeit von ϕ ist es offenbar hinreichend, dass $I^* = I_a$ für alle $a \in U$. Nach Satz 15.7 ist jedenfalls $0 \in I^*$ und somit $I^* \neq \emptyset$. Ferner ist nach Definition klar, dass I^* offen ist. Der Beweis nützt nun die Tatsache aus, dass I_a ein Intervall und somit zusammenhängend ist. Daher genügt es zu zeigen, dass das Komplement $K = I_a \setminus I^*$ ebenfalls offen ist; denn dann folgt $I^* = I_a$, weil sich I_a nicht in zwei disjunkte nichtleere offene Teilmengen zerlegen lässt.

Sei also $s \in K$ und sei $b = \phi_s(a)$. Nach Satz 15.7 gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine offene Umgebung $W \subset U$ von b , sodass $] - \varepsilon, \varepsilon[\times W \subset D$ und ϕ auf $] - \varepsilon, \varepsilon[\times W$ stetig

differenzierbar ist. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $t \mapsto \phi_t(a)$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass $\phi_t(a) \in W$ für alle $t \in I_a$ mit $|t - s| < \delta$.

Angenommen, s ist kein innerer Punkt von K . Dann gibt es beliebig nahe bei s noch Punkte von I^* . Insbesondere können wir ein $t^* \in I^*$ so finden, dass $|t^* - s| < \min(\varepsilon, \delta)$. Also ist $\phi_{t^*}(a) \in W$.

Nach der Definition (*) von I^* gibt es ein offenes Intervall $J \subset I_a$ mit $t^* \in J$ und eine offene Umgebung $V \subset U$ von a , sodass $J \times V \subset D$ und ϕ auf $J \times V$ stetig differenzierbar ist. Insbesondere ist die Abbildung $\phi_{t^*}: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar. Weil $\phi_{t^*}(a) \in W$ und W offen ist, kann man, eventuell nach Verkleinern von V , annehmen, dass $\phi_{t^*}(V) \subset W$. Wegen $] -\varepsilon, \varepsilon[\times W \subset D$ folgt damit, dass $(t, \phi_{t^*}(x)) \in D$ für alle $|t| < \varepsilon$ und alle $x \in V$. Nun zeigt Satz 16.3, dass

$$(t + t^*, x) \in D \quad \text{und} \quad \phi_{t+t^*}(x) = \phi_t(\phi_{t^*}(x)) \quad (1)$$

für alle $|t| < \varepsilon$ und alle $x \in V$. Setzt man also $J' =]t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon[$, so gilt $J' \times V \subset D$ und (1) zeigt, dass ϕ auf $J' \times V$ stetig differenzierbar ist, denn $\phi_{t^*}: V \rightarrow W$ ist stetig differenzierbar, und ϕ ist es auf $] -\varepsilon, \varepsilon[\times W$. Wegen $|s - t^*| < \varepsilon$ ist schliesslich $s \in J'$. Daher zeigt nun die Definition von I^* , dass s doch in I^* liegt, im Widerspruch zu $s \in K = I_a \setminus I^*$. Also ist s ein innerer Punkt von K .

Da $s \in K$ beliebig war, folgt die behauptete Offenheit von K , und damit wie anfangs erklärt, die Offenheit von D und die stetige Differenzierbarkeit von ϕ auf ganz D .

Es bleibt die Gültigkeit der Variationsgleichung auf ganz D zu beweisen. Nach Satz 15.7 gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} \phi'_s(y) = f'(\phi_s(y)) \cdot \phi'_s(y)$$

jedenfalls für alle genügend kleinen s und alle $y \in U$, sodass für $s = 0$ folgt:

$$\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi'_s(y) = f'(y). \quad (2)$$

Nun sei $(t, x) \in D$ beliebig und sei s so klein, dass noch $(s + t, x) \in D$. Wegen der soeben bewiesenen Offenheit von D bilden diese (s, t, x) eine offene Umgebung von $\{0\} \times \{0\} \times U$ in $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times U$. Daher folgt durch Differenzieren von 16.3.1 nach x mit der Kettenregel:

$$\phi'_{s+t}(x) = \phi'_s(\phi_t(x)) \cdot \phi'_t(x),$$

und durch weiteres Differenzieren nach s an der Stelle $s = 0$, wegen (2), wo jetzt $y = \phi_t(x)$ zu setzen ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi'_t(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi'_{s+t}(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \phi'_s(\phi_t(x)) \cdot \phi'_t(x) = f'(\phi_t(x)) \cdot \phi'_t(x),$$

wie behauptet.

16.10. Korollar. Falls das Vektorfeld f von der Klasse \mathcal{C}^k ist ($k \geq 1$), dann ist es auch der von f erzeugte Fluss $\phi: D \rightarrow U$.

Beweis. Durch Induktion nach k . Der Induktionsanfang $k = 1$ ist gerade Satz 16.9. Nun sei das Korollar schon bewiesen für alle Vektorfelder der Klasse \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) auf

beliebigen offenen Teilmengen eines beliebigen \mathbf{R}^m , und sei f von der Klasse \mathcal{C}^{k+1} auf $U \subset \mathbf{R}^n$. Betrachte das Vektorfeld g auf $U \times \mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$, das durch

$$g(x, v) = \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x)v \end{pmatrix}$$

definiert ist. Offenbar ist g von der Klasse \mathcal{C}^k auf $U \times \mathbf{R}^n$. Nach Induktionsvoraussetzung ist der Fluss Ψ von g von der Klasse \mathcal{C}^k . Nun ist aber Ψ gegeben durch

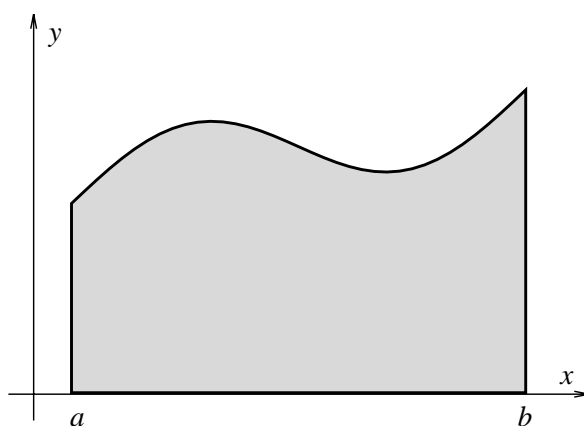
$$\Psi_t(x, v) = \begin{pmatrix} \phi_t(x) \\ \phi_t'(x)v \end{pmatrix},$$

wie durch einfaches Nachrechnen aus der Variationsgleichung folgt. Daher ist die Abbildung $(t, x) \mapsto \phi_t'(x)$ von der Klasse \mathcal{C}^k . Ferner ist die Abbildung $(t, x) \mapsto \dot{\phi}_t(x) = f(\phi_t(x))$ von der Klasse \mathcal{C}^k . Also sind alle partiellen Ableitungen $\partial\phi/\partial x^i$ und $\partial\phi/\partial t$ von der Klasse \mathcal{C}^k , sodass ϕ von der Klasse \mathcal{C}^{k+1} ist, wie behauptet.

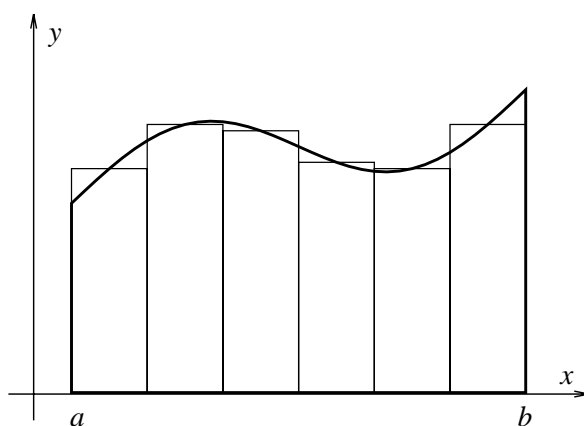
16.11. Korollar. *Sei f ein Vektorfeld von der Klasse \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) auf U . Für jedes $t \in \mathbf{R}$ ist dann $D_t = \{x \in U : (t, x) \in D\}$ eine offene Teilmenge von U , und $\phi_t : D_t \rightarrow D_{-t}$ ist ein \mathcal{C}^k -Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung ϕ_{-t} .*

Anhang A. Das bestimmte Integral

A.1. Zerlegungen und Riemannsche Summen. Sei $Q = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f: Q \rightarrow \mathbf{R}$ eine reelle Funktion. Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ ist anschaulich der von der x -Achse, dem Graphen von f und den Abszissen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossene Flächeninhalt:



Der folgenden Definition liegt die Idee zugrunde, diesen Flächeninhalt durch eine Summe von parallelen vertikalen Rechteckstreifen zu approximieren und dann zu hoffen, dass bei immer feiner werdender Approximation der Limes dieser Summen existiert:



Wir führen daher folgende Definitionen ein.

Eine *gestützte Zerlegung des Intervalls Q* ist ein $2n + 1$ -tupel

$$Z = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n), \quad (1)$$

wobei für die *Teilpunkte x_i* gilt

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

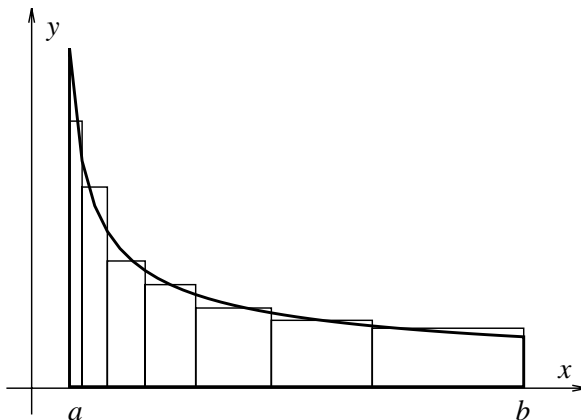
und natürlich $n \geq 1$, während für die *Stützstellen ξ_i* zunächst nur $\xi_i \in Q$ verlangt wird. Zu einer Zerlegung Z und einer Funktion f auf Q bilden wir dann die *Riemannsche Summe*

$$S_Z(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \quad (2)$$

Zur Abkürzung setzen wir oft

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

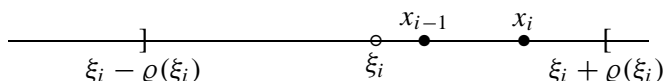
Wir möchten nun mit möglichst wenig Teilpunkten eine möglichst gute Approximation des Flächeninhaltes durch (2) erreichen. Es ist einleuchtend, dass in einem Bereich, wo die Funktion annähernd konstant ist, die Stützstellen weiter auseinander liegen dürfen, während sie dort engmaschiger sein müssen, wo sich die Funktion stark ändert:



Als Mass für die Feinheit einer Zerlegung und damit für die Güte der Approximation des Flächeninhaltes wählen wir daher eine positive Funktion $\varrho : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_{++}$, die die Maschenweite der Stützstellen folgendermassen regelt. Die Zerlegung Z heisst *feiner als* ϱ oder ϱ -*fein*, geschrieben $Z < \varrho$, wenn sich die Anfangs- und Endpunkte des i -ten Teilintervalls von der i -ten Stützstelle um höchstens $\varrho(\xi_i)$ unterscheiden:

$$|x_i - \xi_i| < \varrho(\xi_i) \quad \text{und} \quad |x_{i-1} - \xi_i| < \varrho(\xi_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Es wird also *nicht* verlangt, dass die Stützstelle ξ_i innerhalb des zugehörigen Teilintervalles $[x_{i-1}, x_i]$ liegt, sondern nur, dass das Teilintervall im offenen Intervall der Länge $2\varrho(\xi_i)$ mit Mittelpunkt ξ_i enthalten ist. Zum Beispiel ist



zugelassen. Wir werden bald sehen, dass dies eine vernünftige Definition ist.

Es ist oft praktisch, eine Zerlegung von Q als eine endliche Menge

$$Z = \{(\xi_i, P_i) : i \in E\} \quad (1^*)$$

von Paaren (ξ_i, P_i) aufzufassen. Dabei ist E eine endliche Indexmenge, die Stützstellen ξ_i liegen in Q und die abgeschlossenen Teilintervalle $P_i \subset Q$ haben folgende Eigenschaften: Ihre Vereinigung ist ganz Q , und sie sind *fast disjunkt*, d.h., für $i \neq j$ besteht $P_i \cap P_j$ aus höchstens einem Punkt. Beschreibt man Z wie in (1), dann ist $P_i = [x_{i-1}, x_i]$ und $E = \{1, \dots, n\}$. Die Beschreibung (1*) hat den Vorteil, dass man nicht darauf festgelegt ist, die Teilintervalle in aufsteigender Reihenfolge durchnummerieren. Auf die Riemannsche Summe hat das natürlich keinen Einfluss; sie kann nun als

$$S_Z(f) = \sum_{i \in E} f(\xi_i) \lambda(P_i) \quad (2^*)$$

geschrieben werden, wobei $\lambda(P_i)$ die Länge des Intervalls P_i bezeichnet. Die Feinheitsdefinition (3) kann einfach als

$$P_i \subset]\xi_i - \varrho(\xi_i), \xi_i + \varrho(\xi_i)[\quad \text{für alle } i \in E \quad (3^*)$$

ausgedrückt werden, anders ausgedrückt: P_i liegt in der offenen „Kugel“ mit Mittelpunkt ξ_i und „Radius“ $\varrho(\xi_i)$.

Als Nächstes beweisen wir, dass es bei beliebiger positiver Funktion ϱ stets Zerlegungen $Z \prec \varrho$ gibt.

A.2. Lemma. Sei $\varrho: Q = [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_{++}$ eine beliebige positive Funktion. Dann gibt es Zerlegungen Z von Q mit $Z \prec \varrho$.

Beweis. Angenommen, es gäbe kein solches Z . Sei $c = \frac{1}{2}(a + b)$, zerlege Q in die beiden Teilintervalle $Q_1 = [a, c]$ und $Q_2 = [c, b]$, und setze $\varrho_j := \varrho|_{Q_j}$. Dann gibt es für mindestens ein Teilintervall Q_j keine Zerlegung feiner als ϱ_j ; denn sonst könnte man zwei solche Zerlegungen, etwa $Z_1 \prec \varrho_1$ und $Z_2 \prec \varrho_2$, zu einer ϱ -feinen Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2$ von ganz $[a, b]$ zusammensetzen. (Hier ist die alternative Beschreibung einer Zerlegung wie in (1*) oben vorteilhaft.) Durch fortwährendes Halbieren bekommt man also eine Intervallschachtelung $Q = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$, sodass kein I_k eine $\varrho|_{I_k}$ -feine Zerlegung besitzt. Sei $\{\xi\} := \bigcap I_k$ und $\varepsilon := \varrho(\xi) > 0$. Für genügend grosses k ist dann $I_k \subset]\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon[$. Sei etwa $I_k = [a_k, b_k]$. Dann ist aber trivialerweise $(a_k, b_k; \xi)$ eine Zerlegung von I_k (mit nur einem Teilintervall und einer Stützstelle), die feiner als $\varrho|_{I_k}$ ist, Widerspruch!

A.3. Definition. Eine (möglicherweise komplexwertige) Funktion f auf $Q = [a, b]$ heisst *integrierbar*, wenn der Limes der Riemannschen Summen

$$\lim_Z S_Z(f) = A \quad (1)$$

in folgendem Sinne existiert: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass für jede Zerlegung $Z \prec \varrho$ gilt:

$$|S_Z(f) - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

In diesem Fall nennt man $A \in \mathbf{C}$ das *bestimmte Integral von f über Q* und verwendet eine der folgenden Schreibweisen:

$$A = \int_Q f = \int_a^b f = \int_a^b f(x) dx.$$

Dabei darf die Integrationsvariable x durch irgendeine andere, sonst nicht vorkommende Variable ersetzt werden, also etwa

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

Man beachte die formale Ähnlichkeit dieser Definition mit der des Limes einer Funktion, etwa $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = A$, die ja besagt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für alle z mit $|z| < \delta$ gilt: $|g(z) - A| < \varepsilon$. Die Rolle des $\delta > 0$ in dieser Definition wird also beim Integral von der Funktion $\varrho > 0$ übernommen. Ebenso

wie dort gilt, dass der Limes A , falls er existiert, eindeutig ist, was die Definition erst sinnvoll macht. Denn gelte etwa (2) für A_1 und A_2 . Dann gibt es Funktionen ϱ_1 und ϱ_2 , sodass für alle Zerlegungen $Z_j \prec \varrho_j$ gilt: $|S_{Z_j} - A_j| < \varepsilon$ ($j = 1, 2$). Sei $\varrho = \min(\varrho_1, \varrho_2)$ und sei $Z \prec \varrho$. (Nach Lemma A.2 gibt es so ein Z). Dann folgt $|A_1 - A_2| \leq |A_1 - S_Z(f)| + |S_Z(f) - A_2| < 2\varepsilon$. Da ε beliebig war, muss $A_1 = A_2$ sein.

* Diese Definition von „integrierbar“ ist bereits dasselbe wie „Lebesgue-integrierbar“ und stammt von J. Kurzweil und E.J. McShane. Die Teilklasse der Riemann-integrierbaren Funktionen bekommt man, wenn man in der obigen Definition fordert, dass ϱ konstant gewählt werden kann. Wenn man verlangt, dass die Stützstellen innerhalb der Teilintervalle liegen, bekommt man nicht mehr das Lebesgue-Integral, sondern einen noch allgemeineren Integralbegriff, das sogenannte Denjoy-Integral. Dann lässt sich aber zum Beispiel Satz B.6 nicht mehr beweisen.

Der Limes in (1) kann natürlich als der Limes eines Netzes aufgefasst werden, und zwar des folgenden: Als gerichtete Indexmenge Λ nehme man die Menge aller Paare (Z, ϱ) , wobei Z eine ϱ -feine Zerlegung von $[a, b]$ ist, mit der Relation $(Z, \varrho) \leq (Z', \varrho') \iff \varrho \geq \varrho'$. Dann ist $\int_{\varrho} f$ der Limes des Netzes $\Lambda \rightarrow \mathbf{C}, (Z, \varrho) \mapsto S_Z(f)$. Die Sätze A.7 und B.1 sind nur Spezialfälle der allgemeinen Sätze über Limites von Netzen. *

A.4. Beispiele. Jede konstante Funktion ($f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$) ist integrierbar mit $\int_a^b f = c(b - a)$. Das ist trivial; denn jede Riemannsche Summe hat hier den Wert

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Interessanter ist schon:

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Definiere $\varrho(x) = \varepsilon$ für alle $x \in [0, 1]$, und betrachte eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (0 = x_0, \dots, x_n = 1; \xi_1, \dots, \xi_n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left| \xi_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \right| &= \left| \xi_i - \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}) \right| (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \frac{1}{2} (|\xi_i - x_i| + |\xi_i - x_{i-1}|) (x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{1}{2} (\varrho(\xi_i) + \varrho(\xi_i)) (x_i - x_{i-1}) \\ &= \varepsilon(x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned} \left| S_Z(f) - \frac{1}{2} \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \xi_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_{i-1}^2) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \xi_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) \right| < \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

A.5. Beispiel. Auch unbeschränkte Funktionen können integrierbar sein:

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 f(x) dx = 2.$$

Zum Beweis sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Definiere ϱ durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon x}{4} & \text{für } 0 < x \leq 1, \\ \frac{\varepsilon^2}{16} & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

und sei $Z = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ eine ϱ -feine Zerlegung. Dann ist

$$\begin{aligned} |S_Z(f) - 2| &= \left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 2(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}})] \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}) - 2|(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}). \end{aligned}$$

Für $\xi_i \neq 0$ hat man

$$\begin{aligned} |f(\xi_i)(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}) - 2| &= \left| \frac{\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}} - 2\sqrt{\xi_i}}{\sqrt{\xi_i}} \right| \\ &\leq \frac{|\sqrt{x_i} - \sqrt{\xi_i}| + |\sqrt{x_{i-1}} - \sqrt{\xi_i}|}{\sqrt{\xi_i}} = (*), \end{aligned}$$

und weiter

$$\frac{|\sqrt{x_i} - \sqrt{\xi_i}|}{\sqrt{\xi_i}} = \frac{|x_i - \xi_i|}{\sqrt{\xi_i}(\sqrt{x_i} + \sqrt{\xi_i})} \leq \frac{|x_i - \xi_i|}{(\sqrt{\xi_i})^2} < \frac{\varrho(\xi_i)}{\xi_i} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Ebenso zeigt man

$$\frac{|\sqrt{x_{i-1}} - \sqrt{\xi_i}|}{\sqrt{\xi_i}} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Hieraus folgt $(*) \leq \varepsilon/2$ und weiter

$$\begin{aligned} \sum_{\xi_i \neq 0} |f(\xi_i)(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}) - 2|(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) &\leq \sum_{\xi_i \neq 0} \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{2}(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Nun sei $\xi_i = 0$. Dann ist $|x_i - \xi_i| = |x_i| < \varrho(0) = \varepsilon^2/16$. Bezeichnet l den grössten Index i mit $\xi_i = 0$, dann gilt

$$\sum_{\xi_i=0} 2(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \leq \sum_{i=1}^l 2(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) = 2\sqrt{x_l} < 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also bekommt man schliesslich

$$|S_Z(f) - 2| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{\xi_i \neq 0} |f(\xi_i)(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}}) - 2|(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i-1}}) \leq \varepsilon,$$

wie zu zeigen war.

In den bisherigen Beispielen war f stetig oder zumindest stetig bis auf einen Punkt. Aber auch das ist keineswegs erforderlich; denn es gilt:

A.6. Satz. Ist f eine Funktion auf $[a, b]$ und gilt $f(x) = 0$ mit Ausnahme von höchstens abzählbar vielen Punkten, dann ist f integrierbar und $\int_a^b f = 0$.

Insbesondere ist also die nirgends stetige Dirichletsche Sprungfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1] \text{ rational,} \\ 0 & \text{falls } x \in [0, 1] \text{ irrational,} \end{cases}$$

integrierbar, und hat das Integral 0.

Zum Beweis sei $U = \{u \in [a, b] : f(u) \neq 0\} = \{u_1, u_2, \dots\}$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Definiere ϱ durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \notin U, \\ \frac{\varepsilon}{2^{k+1}|f(u_k)|} & \text{falls } x = u_k \in U. \end{cases}$$

Sei $Z = \{(\xi_i, P_i) : i \in E\}$ eine ϱ -feine Zerlegung, beschrieben wie in A.1.1*. Definiere $E_k := \{i \in E : \xi_i = u_k\}$ für $k \geq 1$ und $E_0 := \{i \in E : \xi_i \notin U\}$. Dann ist E die disjunkte Vereinigung $E = E_0 \cup E_1 \cup \dots$, wobei natürlich nur endlich viele E_k nicht leer sind. Nun folgt für die Riemannsche Summe:

$$|S_Z(f) - 0| = \left| \sum_{k \geq 1} \sum_{i \in E_k} f(\xi_i) \lambda(P_i) \right| \leq \sum_{k \geq 1} |f(u_k)| \cdot \sum_{i \in E_k} \lambda(P_i) = (*)$$

Für jedes k sind die Teilintervalle P_i ($i \in E_k$) alle im offenen Intervall $]u_k - \varrho(u_k), u_k + \varrho(u_k)[$ der Länge $2\varrho(u_k)$ enthalten und überlappen sich nicht. Folglich ist $\sum_{i \in E_k} \lambda(P_i) < 2\varrho(u_k)$, und es folgt

$$(*) < \sum_{k \geq 1} |f(u_k)| \cdot 2\varrho(u_k) = \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

* Im Gegensatz zu Beispiel A.4 kann man in A.5 und im allgemeinen in A.6 nicht mehr ϱ konstant wählen, diese Funktionen sind also nicht mehr Riemann-integrierbar. *

A.7. Satz. Sei Q ein kompaktes Intervall.

(a) Sind $f, g : Q \rightarrow \mathbf{C}$ integrierbar und ist $c \in \mathbf{C}$ dann sind auch $f + g$ und cf integrierbar, und es gilt

$$\int_Q (f + g) = \int_Q f + \int_Q g, \quad \int_Q (cf) = c \int_Q f. \quad (1)$$

(b) Für eine komplexwertige Funktion f sind äquivalent:

- (i) f ist integrierbar;
- (ii) \bar{f} ist integrierbar;
- (iii) $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ sind integrierbar.

In diesem Fall gilt

$$\int_Q \bar{f} = \overline{\int_Q f}, \quad \int_Q f = \int_Q \operatorname{Re}(f) + i \int_Q \operatorname{Im}(f). \quad (2)$$

(c) Sind f und g reellwertig und integrierbar, dann gilt

$$f \leq g \implies \int_Q f \leq \int_Q g. \quad (3)$$

Beweis. (a) Klarerweise ist $S_Z(f)$ linear in f :

$$S_Z(f + g) = S_Z(f) + S_Z(g), \quad S_Z(cf) = cS_Z(f). \quad (4)$$

Setze $A = \int_Q f$ und $B = \int_Q g$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle positive Funktionen ϱ_1, ϱ_2 auf Q mit $|S_Z(f) - A| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_1$ und $|S_Z(g) - B| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho_2$. Definiere $\varrho(x) := \min(\varrho_1(x), \varrho_2(x))$. Dann ist für alle $Z \prec \varrho$ erst recht $Z \prec \varrho_i$ und folglich nach A.3.2 und der Dreiecksungleichung

$$|S_Z(f + g) - (A + B)| \leq |S_Z(f) - A| + |S_Z(g) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Der Beweis der zweiten Formel von (1) wird dem Leser überlassen.

(b) Sei wieder $A = \int_Q f$. Weil die komplexe Konjugation mit Summen und Produkten verträglich ist und den Betrag einer komplexen Zahl nicht ändert, gilt $|S_Z(\bar{f}) - \bar{A}| = |\overline{S_Z(f)} - \bar{A}| = |S_Z(f) - A|$. Nun folgt (i) \implies (ii) und die erste Formel von (2) aus der Definition der Integrierbarkeit, und (ii) \implies (i) wegen $\overline{\bar{f}} = f$. Weil $\operatorname{Re}(f)$ und $\operatorname{Im}(f)$ Linearkombinationen von f und \bar{f} sind, folgen die restlichen Behauptungen aus (1).

(c) Nach der ersten Formel von (2) ist $A = \int_Q f$ reell, falls f reellwertig ist. Wegen (1) genügt es zu zeigen, dass $A \geq 0$, falls $f \geq 0$. Nach A.1.2 ist klar, dass jede Riemannsche Summe zu f nicht negativ ist. Wäre $A < 0$, dann wähle zu $\varepsilon := -A/2$ eine Funktion ϱ wie in der Definition der Integrierbarkeit. Für jede Zerlegung $Z \prec \varrho$ gilt dann $S_Z(f) - A < -A/2$ oder $S_Z(f) < A/2 < 0$, Widerspruch.

A.8. Korollar. Sei f eine integrierbare Funktion auf Q und sei \tilde{f} eine Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle x mit Ausnahme einer abzählbaren Menge. Dann ist auch \tilde{f} integrierbar, und es gilt $\int_Q f = \int_Q \tilde{f}$.

Beweis. Dies folgt aus Teil (a) des Satzes, angewandt auf f und $g = \tilde{f} - f$; denn nach A.6 ist g integrierbar und hat das Integral 0.

Die Berechnung von bestimmten Integralen ist besonders einfach, wenn die zu integrierende Funktion f stetig ist und eine Stammfunktion besitzt, d.h., eine Funktion F mit der Eigenschaft, dass $F' = f$. Man nennt eine solche Funktion auch ein *unbestimmtes Integral* von f . Hier gilt der

A.9. Satz. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ stetig mit Stammfunktion F . Dann ist f integrierbar, und

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Beweis. Indem man f in Realteil und Imaginärteil zerlegt und A.7(b) anwendet, sieht man leicht, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit f reellwertig annehmen darf. Das ist wichtig, um den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden zu können, der für komplexwertige Funktionen nicht gilt. Der folgende Beweis wird durch die Beispiele A.4 und A.5 nahegelegt.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem $x \in [a, b]$ wähle ein $\delta_x > 0$ so, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$ für $|x - y| < \delta_x$, und definiere ϱ durch $\varrho(x) = \delta_x$. Sei $Z =$

$(x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ eine ϱ -feine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gilt unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$\begin{aligned} \left| S_Z(f) - (F(b) - F(a)) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) \Delta x_i - (F(x_i) - F(x_{i-1}))) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| f(\xi_i) - \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{\Delta x_i} \right| \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i = (*), \end{aligned}$$

wobei $x_{i-1} < \eta_i < x_i$. Weil $Z \prec \varrho$ (vgl. A.1.3*), folgt $|\xi_i - \eta_i| < \varrho(\xi_i)$ und daher $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon/(b-a)$, nach Definition von ϱ . Also ist

$$(*) < \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \varepsilon,$$

und folglich ist f über $[a, b]$ integrierbar mit Integral $F(b) - F(a)$.

Die naheliegende Frage ist nun: Welche stetigen Funktionen haben eine Stammfunktion? Der im nächsten Paragraphen bewiesene Hauptsatz B.11 besagt, dass jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt. Bevor wir uns in diese theoretischen Überlegungen stürzen, stellen wir fest, dass unsere Differentiationsregeln, von rechts nach links gelesen, bereits eine reichhaltige Liste von Stammfunktionen liefern . . .

Anhang B. Integration und Differentiation

B.1. Cauchy-Kriterium für Integrierbarkeit. Sei Q ein kompaktes Intervall und $f: Q \rightarrow \mathbf{C}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) f ist integrierbar;
- (ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine positive Funktion ϱ auf Q , sodass für alle Zerlegungen $Z, Z' \prec \varrho$ gilt: $|S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < \varepsilon$.

Ist zu gegebenem ε ein ϱ wie in (ii) gewählt, dann gilt

$$\left| S_Z(f) - \int_Q f \right| \leq \varepsilon \quad (1)$$

für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho$.

Beweis. (i) \implies (ii): Wie im Falle von Folgen.

(ii) \implies (i): Zu $\varepsilon_n = 1/n$ wähle ϱ_n wie in (ii). Indem man eventuell ϱ_n durch $\min(\varrho_1, \dots, \varrho_n)$ ersetzt, kann man annehmen, dass $\varrho_m \leq \varrho_n$ für $m \geq n$ gilt. Weiter sei Z_n eine Zerlegung feiner als ϱ_n , und $A_n = S_{Z_n}(f)$. Dann konvergiert die Zahlenfolge $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nach dem Cauchy-Kriterium für Folgen: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $N \in \mathbf{N}$ mit $N > 1/\varepsilon$. Für alle $m, n \geq N$ gilt dann

$$|A_m - A_n| = |S_{Z_m}(f) - S_{Z_n}(f)| < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

weil ja $Z_m \prec \varrho_m \leq \varrho_N$ und $Z_n \prec \varrho_n \leq \varrho_N$. Also existiert $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ nach dem Cauchy-Kriterium für Folgen.

Nun zeigen wir, dass $A = \int_Q f$ ist. Dazu sei wieder $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle k so gross, dass $1/k \leq \varepsilon/2$ und $|A_k - A| < \varepsilon/2$, und setze $\varrho := \varrho_k$. Für alle $Z \prec \varrho$ gilt dann nach (ii), weil Z und Z_k feiner als ϱ_k sind,

$$|S_Z(f) - A| \leq |S_Z(f) - A_k| + |A_k - A| < \frac{1}{k} + |A_k - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zum Beweis der letzten Aussage sei $\tilde{\varepsilon} > 0$ beliebig, und sei $\tilde{\varrho}$ so gewählt, dass $|S_{\tilde{Z}}(f) - A| < \tilde{\varepsilon}$ für alle $\tilde{Z} \prec \tilde{\varrho}$. Sei $Z \prec \varrho$ und $Z' \prec \min(\varrho, \tilde{\varrho})$. Dann ist

$$|S_Z(f) - A| \leq |S_Z(f) - S_{Z'}(f)| + |S_{Z'}(f) - A| < \varepsilon + \tilde{\varepsilon},$$

und die Behauptung folgt für $\tilde{\varepsilon} \downarrow 0$.

Bevor wir das Cauchy-Kriterium anwenden können, um die Integrierbarkeit von stetigen Funktionen zu beweisen, brauchen wir:

B.2. Einfügen von Teilpunkten. Sei $Z = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ eine Zerlegung mit Stützstellen von $Q = [a, b]$ und sei $c \in Q$ ein Punkt, der von den Teilpunkten x_i verschieden ist, etwa $x_{k-1} < c < x_k$. Dann definieren wir $Z' = Z[c]$ als die Zerlegung mit den folgenden Teilpunkten und Stützstellen:

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{falls } 0 \leq i < k, \\ c & \text{falls } i = k, \\ x_{i-1} & \text{falls } k < i \leq n+1, \end{cases} \quad \xi'_i = \begin{cases} \xi_i & \text{falls } 1 \leq i \leq k, \\ \xi_{i-1} & \text{falls } k < i \leq n+1. \end{cases}$$

Das Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ zerfällt also in die zwei neuen Teilintervalle $[x_{k-1}, c]$ und $[c, x_k]$, und beiden wird dieselbe „alte“ Stützstelle $\xi'_k = \xi_k$ und $\xi'_{k+1} = \xi_k$ zugeordnet. Dabei kann es natürlich vorkommen, dass eine Stützstelle ausserhalb des entsprechenden Teilintervalles zu liegen kommt, selbst wenn das vorher nicht der Fall gewesen sein sollte:

Aber das wurde ja bei der Definition einer Zerlegung ausdrücklich zugelassen. Für die Riemannschen Summen einer beliebigen Funktion f bezüglich Z und Z' gilt $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$; denn

$$\begin{aligned} S_Z(f) - S_{Z'}(f) &= f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - f(\xi'_k)(x'_k - x'_{k-1}) - f(\xi'_{k+1})(x'_{k+1} - x'_k) \\ &= f(\xi_k)(x_k - x_{k-1} - (c - x_{k-1}) - (x_k - c)) = 0. \end{aligned}$$

Weiter ist klar, dass

$$Z \prec \varrho \implies Z' \prec \varrho.$$

Man kann natürlich auch mehrere neue Teilpunkte c_1, c_2, \dots einfügen, indem man diesen Prozess wiederholt.

Seien nun Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen von Q , und sei \tilde{Z}_1 die Zerlegung, die aus Z_1 durch Einfügen derjenigen Teilpunkte von Z_2 entsteht, die in Z_1 nicht vorkommen. Analog sei \tilde{Z}_2 die aus Z_2 durch Einfügen der in Z_2 nicht vorkommenden Teilpunkte von Z_1 entstehende Zerlegung. Dann haben offenbar \tilde{Z}_1 und \tilde{Z}_2 dieselben Teilpunkte und unterscheiden sich nur in den Stützstellen. Das hat den Effekt, dass man Riemannsche Summen zu \tilde{Z}_1 und \tilde{Z}_2 leicht vergleichen kann. Denn sind etwa x_0, \dots, x_n die gemeinsamen Teilpunkte und ξ_1, \dots, ξ_n bzw. η_1, \dots, η_n die Stützstellen von \tilde{Z}_1 bzw. \tilde{Z}_2 , so gilt

$$S_{Z_1}(f) - S_{Z_2}(f) = S_{\tilde{Z}_1}(f) - S_{\tilde{Z}_2}(f) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) - f(\eta_i)) \Delta x_i. \quad (1)$$

Dieses Verfahren wird in Zukunft oft benützt werden.

B.3. Satz. *Jede stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $Q = [a, b]$ ist integrierbar.*

Beweis. Wir benützen das Cauchy-Kriterium B.1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil f in jedem Punkt $x \in Q$ stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in Q$ mit $|x - y| < \delta$. Wähle für jedes $x \in Q$ ein solches $\delta = \delta_x$ und setze $\varrho(x) = \delta_x$. Nun seien Z_1 und Z_2 ϱ -feine Zerlegungen. Wegen B.2 kann man nach Einfügen von weiteren Teilpunkten annehmen, dass Z_1 und Z_2 dieselben Teilpunkte x_0, \dots, x_n und die Stützstellen ξ_1, \dots, ξ_n bzw. η_1, \dots, η_n haben. Dann gilt

$$|f(\xi_i) - f(\eta_i)| \leq |f(\xi_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

weil ja $|\xi_i - x_i| < \varrho(\xi_i)$ und $|x_i - \eta_i| < \varrho(\eta_i)$ nach Definition einer ϱ -feinen Zerlegung in A.1.3. Also folgt nun mit B.2.1

$$|S_{Z_1}(f) - S_{Z_2}(f)| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i < \sum_{i=1}^n 2\varepsilon \Delta x_i = 2(b-a)\varepsilon,$$

und hieraus die Integrierbarkeit von f .

B.4. Mittelwertsatz der Integralrechnung. *Sei $f : [a, b] = Q \rightarrow \mathbf{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in Q$ mit*

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a). \quad (1)$$

Beweis. Sei m und M das Minimum bzw. Maximum von f auf Q , das ja wegen der Stetigkeit von f angenommen wird. Dann ist $m \leq f \leq M$ und folglich nach A.7.3 $m(b-a) \leq \int_Q f \leq M(b-a)$, oder

$$m \leq \frac{\int_Q f}{b-a} \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es daher ein ξ mit $f(\xi) = \frac{\int_Q f}{b-a}$.

B.5. Lemma. *Sei $f : Q \rightarrow \mathbf{C}$ integrierbar, und zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ wie im Cauchy-Kriterium B.1. Ferner seien Z_1 und Z_2 zwei ϱ -feine Zerlegungen mit denselben Teilpunkten x_i und Stützstellen ξ_i bzw. η_i . Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i < 2\varepsilon. \quad (1)$$

Falls f reellwertig ist, gilt (1) sogar mit ε statt 2ε .

Beweis. (a) Sei f reellwertig. Definiere Zerlegungen Z_3 und Z_4 mit denselben Teilpunkten und neuen Stützstellen ξ'_i bzw. η'_i durch

$$\xi'_i := \begin{cases} \xi_i & \text{falls } f(\xi_i) \geq f(\eta_i), \\ \eta_i & \text{falls } f(\xi_i) < f(\eta_i). \end{cases} \quad \eta'_i := \begin{cases} \xi_i & \text{falls } f(\xi_i) < f(\eta_i), \\ \eta_i & \text{falls } f(\xi_i) \geq f(\eta_i). \end{cases}$$

Dann sind auch Z_3 und Z_4 feiner als ϱ , und es gilt nach Definition

$$f(\xi'_i) - f(\eta'_i) = |f(\xi_i) - f(\eta_i)|.$$

Nach dem Cauchy-Kriterium ist daher

$$S_{Z_3}(f) - S_{Z_4}(f) = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i < \varepsilon.$$

(b) Nun sei f komplexwertig und $f = f_1 + if_2$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Nach Satz A.7(b) sind f_1 und f_2 integrierbar. Für jede komplexe Zahl w ist $\max(|\operatorname{Re}(w)|, |\operatorname{Im}(w)|) \leq |w| \leq |\operatorname{Re}(w)| + |\operatorname{Im}(w)|$. Für $j = 1, 2$ gilt daher

$$|S_{Z_1}(f_j) - S_{Z_2}(f_j)| \leq |S_{Z_1}(f) - S_{Z_2}(f)| < \varepsilon,$$

also nach (a)

$$\sum_{i=1}^n |f_j(\xi_i) - f_j(\eta_i)| \Delta x_i < \varepsilon.$$

Wegen $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| \leq |f_1(\xi_i) - f_1(\eta_i)| + |f_2(\xi_i) - f_2(\eta_i)|$ folgt die Behauptung.

B.6. Satz. Wenn $f: Q \rightarrow \mathbf{C}$ integrierbar ist, dann ist es auch die Funktion $|f|$, und es gilt die Integral-Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|. \quad (1)$$

Beweis. Wir zeigen die Integrierbarkeit von $|f|$ mit dem Cauchy-Kriterium B.1. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle ϱ wie im Cauchy-Kriterium. Seien Z_1 und Z_2 zwei ϱ -feine Zerlegungen, die wir nach B.2 mit denselben Teilpunkten x_i und Stützstellen ξ_i bzw. η_i annehmen können. Dann gilt unter Verwendung von Dreiecksungleichung, umgekehrter Dreiecksungleichung und Lemma B.5,

$$\begin{aligned} |S_{Z_1}(|f|) - S_{Z_2}(|f|)| &= \left| \sum_{i=1}^n (|f(\xi_i)| - |f(\eta_i)|) \Delta x_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| |f(\xi_i)| - |f(\eta_i)| \right| \Delta x_i \\ &\leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f(\eta_i)| \Delta x_i < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $|f|$ integrierbar.

Sei $A = \int_Q f$ und $B = \int_Q |f|$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle ϱ so, dass $|A - S_Z(f)| < \varepsilon$ und $|B - S_Z(|f|)| < \varepsilon$ für alle $Z < \varrho$. Aus der Dreiecksungleichung und A.1.2 sieht man sofort

$$|S_Z(f)| \leq S_Z(|f|).$$

Daher folgt

$$|A| \leq |A - S_Z(f)| + |S_Z(f)| \leq \varepsilon + S_Z(|f|) \leq \varepsilon + |S_Z(|f|) - B| + B \leq 2\varepsilon + B.$$

Da ε beliebig war, ist $|A| \leq B$, wie behauptet.

* Im Allgemeinen folgt aus der Integrierbarkeit von $|f|$ nicht, dass f selbst integrierbar ist. Beispiele hierzu sind aber nicht leicht zu finden ($V \subset Q$ nicht messbare Menge, $f = 1 - 2\chi_V$). *

B.7. Integration über Teilintervalle. Sei f eine Funktion auf $[a, b]$ und $[c, d] \subset [a, b]$. Man sagt, f sei über $[c, d]$ integrierbar, wenn die Restriktion $f_1 = f|_{[c, d]}$ integrierbar ist, und schreibt dann einfach

$$\int_c^d f = \int_c^d f_1. \quad (1)$$

Sei ϱ eine positive Funktion auf $[a, b]$. Eine Zerlegung Z_1 von $[c, d]$ heisst feiner als ϱ , wenn sie feiner als $\varrho_1 := \varrho|_{[c, d]}$ ist. Analog zu (1) schreiben wir die Riemannsche Summe von f_1 bezüglich Z_1 auch einfach als

$$S_{Z_1}(f) = S_{Z_1}(f_1).$$

B.8. Satz. Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und f eine Funktion auf $[a, b]$.

(a) Ist f über $[a, b]$ integrierbar, dann auch über jedes Teilintervall $[c, d]$. Genauer gilt: Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei ϱ so gewählt, dass $|S_Z(f) - \int_a^b f| < \varepsilon$ für jede Zerlegung $Z \prec \varrho$. Dann gilt auch für jede Zerlegung $Z_1 \prec \varrho$ von $[c, d]$, dass

$$|S_{Z_1}(f) - \int_c^d f| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

(b) Umgekehrt sei $c \in [a, b]$ und sei f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar. Dann ist f über $[a, b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad (2)$$

Beweis. (a) Sei f integrierbar. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ sei die Funktion ϱ auf $[a, b]$ wie im Cauchy-Kriterium B.1 gewählt. Wir zeigen, dass f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar ist, für jedes $c \in [a, b]$. Man überlegt sich leicht, dass das ausreichend ist. Seien Z_1 und Z'_1 zwei ϱ -feine Zerlegungen von $[a, c]$ und Z_2 eine ϱ -feine Zerlegung von $[c, b]$. Dann sind $Z = Z_1 \cup Z_2$ und $Z' = Z'_1 \cup Z_2$ ϱ -feine Zerlegungen von ganz $[a, b]$. Für die Riemanschen Summen gilt offenbar

$$S_Z(f) = S_{Z_1}(f) + S_{Z_2}(f), \quad S_{Z'}(f) = S_{Z'_1}(f) + S_{Z_2}(f).$$

Daher folgt

$$|S_{Z_1}(f) - S_{Z'_1}(f)| = |S_Z(f) - S_{Z'}(f)| < \varepsilon.$$

Also ist $f|_{[a, c]}$ nach dem Cauchy-Kriterium integrierbar, und aus B.1.1 folgt (1). Die entsprechenden Aussagen für $f|_{[c, b]}$ zeigt man analog.

(b) Sei f über $[a, c]$ und $[c, b]$ integrierbar, mit Integralen $A_1 = \int_a^c f$ und $A_2 = \int_c^b f$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle positive Funktionen ϱ_1 und ϱ_2 auf $[a, c]$ und $[c, b]$, sodass $|S_{Z_i}(f) - A_i| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z_i \prec \varrho_i$. Definiere ϱ auf ganz $[a, b]$ durch

$$\varrho(x) = \begin{cases} \min(\varrho_1(x), c - x) & \text{für } a \leq x < c, \\ \min(\varrho_1(c), \varrho_2(c)) & \text{für } x = c, \\ \min(\varrho_2(x), x - c) & \text{für } c < x \leq b, \end{cases}$$

und betrachte eine ϱ -feine Zerlegung $Z = (x_0, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$ von $[a, b]$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass c ein Teilpunkt ist, etwa $c = x_m$; andernfalls füge man c als neuen Teilpunkt wie in B.2 ein.

Die Definition von ϱ garantiert, dass für einen Index i mit der Eigenschaft, dass die Stützstelle $\xi_i > c$ ist, das zugehörige Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ in $]c, b]$ enthalten ist. Anders gesagt: Wenn ein Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ in $[a, c]$ enthalten ist, dann muss auch die Stützstelle ξ_i in $[a, c]$ liegen. Nach Definition von ϱ ist die Einschränkung von ϱ auf $[a, c]$ bzw. $[c, b]$ kleiner oder gleich ϱ_1 bzw. ϱ_2 . Folglich ist $Z_1 := (x_0, \dots, x_m; \xi_1, \dots, \xi_m)$ eine ϱ_1 -feine Zerlegung von $[a, c]$, und analog ist $Z_2 := (x_m, \dots, x_n; \xi_{m+1}, \dots, \xi_n)$ eine ϱ_2 -feine Zerlegung von $[c, b]$. Daher folgt

$$\begin{aligned} |S_Z(f) - A_1 - A_2| &= |S_{Z_1}(f) + S_{Z_2}(f) - A_1 - A_2| \\ &\leq |S_{Z_1}(f) - A_1| + |S_{Z_2}(f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

und somit ist f integrierbar und $\int_a^b f = A_1 + A_2$, wie zu zeigen war.

B.9. Satz über das Integral als Funktion der oberen Grenze. Sei f über $[a, b]$ integrierbar.

(a) Die (nach dem vorigen Satz wohldefinierte) Funktion

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

ist stetig auf $[a, b]$.

(b) Ist f im Punkt $c \in [a, b]$ stetig, dann ist F in c differenzierbar mit Ableitung $F'(c) = f(c)$.

Beweis. (a) Sei $c \in [a, b]$ und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle eine positive Funktion ϱ , sodass $|\int_a^b f - S_Z(f)| < \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z \prec \varrho$. Nach B.8.2 gilt $F(x) - F(c) = \int_c^x f(t) dt$ für $x \geq c$. Nach B.8.1 gilt $|\int_c^x f - S_{Z_1}(f)| \leq \varepsilon/2$ für alle Zerlegungen $Z_1 \prec \varrho$ von $[c, x]$. Insbesondere sei nun $0 \leq x - c < \varrho(c)$. Dann ist $Z_1 = (c, x; c)$ eine ϱ -feine Zerlegung von $[c, x]$ mit nur einem Teilintervall und einer Stützstelle, und die zugehörige Riemannsche Summe ist $S_{Z_1}(f) = f(c)(x - c)$. Also ist

$$\left| \int_c^x f(t) dt - f(c)(x - c) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

und es folgt

$$\begin{aligned} |F(x) - F(c)| &= \left| \int_c^x f(t) dt \right| \leq \left| \int_c^x f(t) dt - f(c)(x - c) \right| + |f(c)(x - c)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |f(c)(x - c)|. \end{aligned}$$

Nun sei $\delta = \min(\varrho(c), \frac{\varepsilon}{2(1 + |f(c)|)})$. Für $0 \leq x - c < \delta$ gilt dann

$$|F(x) - F(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(c)| \varepsilon}{2(1 + |f(c)|)} < \varepsilon.$$

Also ist $\lim_{x \downarrow c} F(x) = F(c)$. Analog beweist man $\lim_{x \uparrow c} F(x) = F(c)$, und somit ist F im Punkte c stetig.

(b) Sei f stetig in c . Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ so, dass $|f(t) - f(c)| \leq \varepsilon$ für alle $t \in [a, b]$ mit $|t - c| < \delta$. Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $|x_i - c| < \delta$ und $x_1 < x_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} - f(c) \right| &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(t) - f(c)}{x_2 - x_1} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} |f(t) - f(c)| dt \quad (\text{nach B.6.1}) \\ &\leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon dt = \varepsilon. \end{aligned} \quad (1)$$

Setzt man speziell $x_1 = c$ und $x_2 = x$ bzw. $x_1 = x$ und $x_2 = c$, so zeigt (1), dass

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| \leq \varepsilon$$

für alle x mit $|x - c| < \delta$. Also gilt $F'(c) = f(c)$.

* Aus (1) folgt sogar, dass F in c strikt differenzierbar ist. *

B.10. Bemerkung Das Integral ist natürlich auch stetig bzw. differenzierbar als Funktion der unteren Grenze, denn nach B.8.2 gilt

$$\int_x^b f(t) dt = A - F(x)$$

wobei $A = \int_a^b f$, und somit

$$\frac{d}{dx} \bigg|_{x=c} \int_x^b f(t) dt = -f(c),$$

falls f im Punkt c stetig ist.

Ist $b \leq a \in I$ und ist f über $[b, a]$ integrierbar, so setzen wir $\int_a^b f(t) dt := -\int_b^a f(t) dt$. Dann gilt die Formel B.8.2 bei beliebiger gegenseitiger Lage der Punkte $a, b, c \in I$, vorausgesetzt, dass die Integrale einen Sinn haben.

Aus Satz B.9 bekommen wir nun leicht den

B.11. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. *Jede stetige Funktion f auf einem Intervall I besitzt eine Stammfunktion, und diese ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wenn g eine Stammfunktion von f ist, dann gilt*

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) - g(a) \quad (1)$$

für alle $a, b \in I$.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Stammfunktion bis auf eine additive Konstante ist klar nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung; denn sind g_1 und g_2 Stammfunktionen, dann ist $g_1' - g_2' = 0$ und somit $g_1 - g_2 = \text{const}$. Zum Beweis der Existenz bemerke zunächst, dass f nach B.3 über jedes kompakte Teilintervall von I integrierbar ist. Wählt man einen Punkt $x_0 \in I$ und definiert

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt,$$

so ist nach Satz B.9 und der folgenden Bemerkung F eine Stammfunktion von f , und es gilt $F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f(x) dx - \int_{x_0}^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$. Für eine beliebige Stammfunktion g ist $g = F + \text{const}$ und folglich ebenfalls $g(b) - g(a) = F(b) - F(a)$.

Bezeichnungen und Konventionen

$A \subset B$	A ist (echte oder unechte) Teilmenge von B
\mathbf{N}	natürliche Zahlen $\{0, 1, 2, \dots\}$
\mathbf{Z}	ganze Zahlen
\mathbf{R}	reelle Zahlen
\mathbf{R}_+	nichtnegative reelle Zahlen
\mathbf{R}_{++}	positive reelle Zahlen
\mathbf{C}	komplexe Zahlen
sgn	Vorzeichen
Re, Im	Realteil, Imaginärteil
\mathbf{K}	\mathbf{R} oder \mathbf{C}
$\text{Mat}_{pq}(\mathbf{K})$	$p \times q$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbf{K}
$\text{Mat}_n(\mathbf{K})$	$n \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten in \mathbf{K}
$\mathbf{1}_n$	$n \times n$ -Einheitsmatrix
$\text{diag}(A_1, \dots, A_r)$	Diagonal(block)matrix
$\det A$	Determinante
Spur A	Spur (Summe der Diagonalelemente)
$\text{Hom}(V, W)$	Vektorraumhomomorphismen von V nach W
x^i	Koordinatenfunktionen im \mathbf{R}^n
$ \cdot $	Absolutbetrag, Norm
$\ \cdot\ $	Euklidische Norm
$\dot{\gamma}$	Ableitung einer Kurve
$L(\gamma)$	Bogenlänge einer Kurve
$\beta \bullet \gamma$	Zusammensetzung von Kurven
$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = \partial_i f(a)$	partielle Ableitung
\mathcal{C}^k	k -mal stetig partiell differenzierbar
$f'(a)$	(totale) Ableitung von f in a
$\text{grad}_a f$	Gradient von f in a
df	Differential von f
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall, Strecke von a nach b
$]a, b[$	offenes Intervall
$[a, b[$ und $]a, b]$	halboffene Intervalle
$\Omega^1(U), \Omega^2(U)$	Differentialformen erster (zweiter) Stufe auf U
$\Phi^*(\omega)$	Zurückholen einer Differentialform
$d\omega$	äußere Ableitung
$\omega \wedge \eta$	äußeres Produkt
$S_Z(f)$	Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z
$Z \prec \varrho$	Zerlegung Z feiner als ϱ

Für Zwecke der linearen Algebra, insbesondere die üblichen Konventionen über Produkte von Vektoren und Matrizen, wird unter \mathbf{K}^n der Vektorraum der Spaltenvektoren mit Koeffizienten in \mathbf{K} verstanden, und es werden die Komponenten eines Spaltenvektors $v \in \mathbf{K}^n$ mit oberen Indizes numeriert, also $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$. Aus Gründen der typographischen Bequemlichkeit weichen wir jedoch oft von dieser Konvention ab und schreiben v auch als Zeilenvektor.

Namen- und Sachverzeichnis

- 1-Form** 39
 —, äussere Ableitung 50
 —, Exaktheitskriterium 44, 53
 —, exakt 44
 —, geschlossen 51
 —, lokal exakte 45
 —, Veranschaulichung 40
- 2-Form** 46
 —, Veranschaulichung 48
- abgeschlossene Menge** 1
 —, Durchschnitt und Vereinigung 2
 —, in normierten Räumen 8
 —, Kriterium 2
- Ableitung** 15
 —, bijektive 33
 —, injektive 31
 —, partielle 13
 —, surjektive 32
 —, zweite partielle 27
 —, zweite, als Bilinearform 28
 — äussere *Siehe* äussere Ableitung
 — des Inversen einer Matrix 79
 — einer Kurve 10
 — längs einer Kurve 25
- Äquivalenz**
 — von Normen 5
- Äquivalenz von Normen** 5
- äussere Ableitung** 50
 —, Regeln 51
- äusseres Produkt** 46
- alternierend** 46, 49
- Anfangsbedingung**
 —, differenzierbare Abhängigkeit von der — 89
 —, stetige Abhängigkeit von der — 87
- Ansatz**
 — zur Berechnung von e^A 71, 73
 — zur Lösung der inhomogenen Gleichung 76
- autonom** 56, 85
- beschränkt**
 —, Folge 2
 —, lokal 20
 —, Menge 2, 7
 —, stetige Funktion auf kompakter Menge 4
- Bogenlänge** 12
 —, Invarianz bei Parameterwechsel 12
- Bolzano-Weierstrass** 2, 8
- Cauchy-Kriterium**
 — für Folgen 7, 8
 — für Integrierbarkeit 11, 107, 109
- C^1 14
- C^k 27
- C^∞ 27
- definit**
 —, Hauptminorenkriterium 30
 —, negativ 29
 —, positiv 29
- dehnungsbeschränkt** 18, 31
 —, lokal 21, 85, 87
- Denjoy** 103
- Diffeomorphismus** 34
 —, C^k 34, 99
- Differential** 21
 —, Kettenregel 24
 —, Produktregel 22
 —, Rechenregeln 22
 —, universelle Formel 21
- Differentialform**
 — erster Stufe *Siehe* 1-Form
 — zweiter Stufe *Siehe* 2-Form
- Differentialgleichung** 55
 —, Eindeutigkeitssatz 86
 —, Existenzsatz 87
 —, homogene 61
 —, lineare 1. Ordnung 57, 58
 — lineare n -ter Ordnung, mit konstanten Koeffizienten 74
 — lineare n -ter Ordnung, mit variablen Koeffizienten 83
 —, System, linear mit konstanten Koeffizienten 67, 69
 —, System, linear mit variablen Koeffizienten 82
 — mit getrennten Variablen 57
 — n -ter Ordnung 56
- Differentialoperator** 74
- differenzierbar**
 —, Kurve 10
 —, stetig partiell — 14
 —, total 15
 —, partiell 13
 — strikt *Siehe* strikt differenzierbar
- Dirichletsche Sprungfunktion** 105
- Drehsinn** 48
- Dreiecksungleichung** 5
 —, umgekehrte 5
 — für Integrale von 1-Formen 43
 — für Integrale von Funktionen 110
 — für Integrale von Kurven 11
- Eigenraum**
 —, verallgemeinerter 70
- Eigenwert** 70
 —, Existenz reeller —e 38
- Eindeutigkeitssatz** 86
- Einfügen von Teilpunkten** 108
- Einparametergruppe** 94

elliptisches Integral 64
 Euler 61
 exakt 44, 60
 —, hinreichendes Kriterium 53
 —, Integralkriterium 44
 —, lokal 45, 54
 Existenzsatz 87
 Exponentialfunktion
 —, Berechnung von e^A 69, 71
 — von Matrizen 68
 Extremum
 —, lokales, Kriterium dafür 29
 — mit Nebenbedingung 36
 — mit Nebenbedingung, hinreichende Bedingung 38
 — mit Nebenbedingung, notwendige Bedingung 37
 — stetiger Funktion auf kompakter Menge 4
Feinheit einer Zerlegung 101
 Feld
 —, elektrisches 40, 50
 —, magnetisches 50
 Feldlinie 49, 50
 Fixpunktsatz 31
 Fluss 91, 94
 —, Differenzierbarkeit des —es 97, 98
 folgenkompakt 3
 Fundamentalsatz der Algebra 55, 70
 Fundamentalsystem 75
 —, reelles 75
 Funktionalmatrix 16
geschlossen
 —, 1-Form 51
 —, Kurve 44
 getrennte Variablen 57
 gleichmässig konvergent 66, 81, 88
 globale Eigenschaft 20, 45, 52
 Gradient 17
 Grenzfunktion 67
Halbraum 40
 harmonischer Oszillator 56, 77
 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 113
 —, verallgemeinerter, für 1-Formen 43
 Heine-Borel 3
 Hessesche Matrix 28
 heteronom 56, 90
 homogene Gleichung 58, 74
 Hund 64
 Hyperebene 40
implicit
 —, Satz über —e Funktionen 35
 implizite
 — Differentialgleichung 56
 — Lösung 60

indefinit 29
 inhomogene Gleichung 59, 74, 76
 innerer Punkt 1, 8
 Integral
 —, bestimmtes 102
 —, elliptisches 64, 96
 —, parameterabhängiges 52, 88
 —, unbestimmtes 106
 — als Funktion der oberen Grenze 112
 — als Funktion der unteren Grenze 113
 — einer Kurve 10
 Integralgleichung 87
 Integralkurve 56
 —, maximale 91, 95
 Integration
 — über Teilintervalle 111
 — von 1-Formen 42
 integrierbar
 —, Funktion 102
 —, obwohl unbeschränkt 103
 —, obwohl unstetig 105
 —, stetige Funktionen sind — 109
 — Kurve 10
 Iteration 87

Jacobimatrix 16

Kettenregel 23
 — für Differentiale 24
 kompakt 3, 6, 9, 30, 31, 38, 53, 89, 95, 96
 —, bei unendlicher Dimension 8
 —, Charakterisierung im \mathbf{R}^n 3
 —, in normierten Räumen 8
 konstant
 —, lokal 25
 konvergent 1, 6
 —, absolut 7, 8
 —, gleichmässig 66, 81, 88
 —, in normierten Räumen 8
 konvex 6, 52
 kritischer Punkt 29
 Kugel 6
 Kurve 10
 Kurvenintegral 42
 Kurzweil 103

Laplace-Gleichung 57
 Lebesgue-integrierbar 103
 Limes
 —, in normierten Räumen 8
 — von Folgen 6
 — von Funktionen 1, 6
 — von Netzen 103
 — von Riemannschen Summen 102
 Linearform 40
 Liouvillesche Formel 83

- Lipschitz-
 — Bedingung 18, 31
 — Bedingung, lokale 85
 — Konstante 18
 — Konstante kleiner als 1 31
 Lösung 55
 —, Eindeutigkeit 86
 —, Existenz 87
 —, maximale 91, 95
 —, nicht eindeutige 86
 —, partikuläre 59, 74
 — einer Pfaffschen Gleichung 59
 lokal
 — beschränkt 20
 — dehnungsbeschränkt 21, 85, 87
 — exakt 45, 54
 — gleichmäßig konvergent 66, 81
 — konstant 25
 lokale Eigenschaft 20, 52
- M**agnetfeld 50
 Majorantenkriterium
 — für gleichmäßige Konvergenz 67
 Massenpunkt 56
 —, eindimensionaler 64
 maximales Existenzintervall 91
 Maximum
 —, lokales 29
 — stetiger Funktion auf kompakter Menge 4
 McShane 103
 Minimum
 —, lokales 29
 — stetiger Funktion auf kompakter Menge 4
 Mittelwertsatz
 — der Integralrechnung 109
 Modul 39, 46
 Multiplikator
 —, Eulerscher 61
 —, Lagrangescher 37
- N**ebenbedingung 36
 —, Extrema unter — 37, 38
 Neilsche Parabel 38
 Netz 103
 Norm 4
 —, äquivalente —en 5
 — einer bilinearen Abbildung 10
 — einer linearen Abbildung 9
 normierter Vektorraum 5
- O**ffene Menge 2, 33
 —, Durchschnitt und Vereinigung 2
 —, in normierten Räumen 8
 —, Kriterium 2
 —, Kriterium für — 8
 —, Kugel 6
- Orientierung 48
- P**arameterwechsel 12
 —, orientierungserhaltend 12
 —, orientierungsumkehrend 12
 —, Verhalten des Kurvenintegrals bei — 42
 partiell
 —, Differentialgleichung 57
 — differenzierbar, —e Ableitung 13
 partikuläre Lösung 59
 Pendel 56, 64, 96
 periodisch 95, 96
 Pfaffsche Form *Siehe* 1-Form
 Pfaffsche Gleichung 59, 96
 Phasenverschiebung 79
 Picard-Lindelöf 87
 Plattenkondensator 40
 Polynom
 —, charakteristisches 70, 74
 —, Existenz von Nullstellen 55
 Produktregel 22, 67
 Punkt
 —, regulärer 60
 —, singulärer 60
- R**aumableitung 89
 Raumwinkelform 49
 Reduktion
 — auf eine Pfaffsche Gleichung 63
 — der Ordnung 84
 rektifizierbar 12
 Resolvente 57, 80
 — mit Parametern 89
 Resonanzfall 79
 Riccati 61
 Richtungsableitung 16
 Riemann-integrierbar 103
 Riemannsche Summe 100
- S**attelpunkt 29
 Schwingung
 —, erzwungene 78
 —, freie 77
 semidefinit 29
 Sphäre 7
 Stammfunktion 44, 106, 113
 stationär 95, 96
 sternförmig 52–54
 stetig 1, 9
 —, Funktion auf kompakter Menge 4
 —, Grenzfunktion 67
 —, in normierten Räumen 8
 Strecke 6
 Streckenzug 26
 strikt differenzierbar 17
 —, äquivalente Bedingungen 18
 — impliziert lokal dehnungsbeschränkt 18
 — und bijektive Ableitung 33
 — und injektive Ableitung 31
 — und surjektive Ableitung 32

stückweise glatt 11
 Stützstelle 100
 Substitution 61
 Symmetrie
 — der höheren Ableitungen 28
 — der zweiten Ableitungen 27
 System *Siehe* Differentialgleichungen

Tangentialgerade 36
 Tangentialraum 36
 — als Untervektorraum 36
 Tangentialvektor 10, 15
 Taylorentwicklung
 —, allgemeine 30
 — 2. Ordnung 29

Überdeckung 3
 Umgebung 1
 Umkehrsatz 33, 34
 Umparametrisierung *Siehe* Parameterwechsel

Variation der Konstanten 58
 Variationsgleichung 89, 97
 Vektorfeld 56, 85–87
 —, beschränkt impliziert vollständig 95
 —, C^1 89, 97
 —, C^k 98
 —, parameterabhängig 90
 —, vollständiges 91
 —, zeitabhängig 90

Vektorraum
 —, normiert 5
 —, unendlichdimensional 8
 Veranschaulichung
 — von 1-Formen 40
 — von 2-Formen 48
 verbindbar 26
 Verbindungsstrecke 6
 vollständiges Vektorfeld 91, 95

Winkelform 40
 Wronski 83

Zeitabhängig 56, 90
 Zerlegung
 —, Existenz von ϱ -feiner — 102
 — eines Intervalls 100
 — feiner als ϱ 101
 — in verallgemeinerte Eigenräume 70
 Zurückholen
 —, Regeln 42, 47
 — von 1-Formen 41
 — von 2-Formen 46
 zusammenhängend 26, 86, 97
 —, sternförmig impliziert — 52
 — genau dann, wenn verbindbar 26
 Zusammensetzung von Kurven 12