Teoría de representaciones.

Bloque correspondiente a representaciones de grupos finitos

Problemas. Curso 2021-2022

Prof. Cándido Martín

1. Sea R una K-álgebra (con unidad). Demuestra que si R es semisimple, todo R-módulo es semisimple. Como corolario: justifica que si G es un grupo finito, toda representación compleja de G es completamente reducible (es decir, es suma directa de irreps). *Puedes usar que (1) una suma directa arbitraria de módulos semisimples es un módulo semisimple, (2) todo cociente de un módulo semisimple es semisimple, (3) todo módulo es un cociente de un módulo libre, (4) si R es algebra semisimple entonces ${}_RR$ es un R-módulo semisimple.*

2. Determinar la representación regular (a izquierda) del álgebra $\mathbb{Q}[x]/(x^3+1)$ (esto quiere decir: respecto a una base conveniente del álgebra, encontrar las matrices de los operadores de multiplicación y escribir la matriz de un elemento genérico del álgebra).

3. Sea G un grupo finito y V un G-módulo. Sea W un G-submódulo y W' un subespacio cualquiera tal que $V = W \oplus W'$. Tomemos $\pi_W\colon V \to V$ la proyección en W. Demuéstrese que la aplicación $\pi\colon V \to V$ definida como $\pi(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g\pi_W(g^{-1}v)$ es un homomorfismo de G-modulos y que $\pi^2 = \pi$. Conclúyase que $\ker(\pi)$ es un G-módulo complementario a W (por lo tanto todo G-módulo de dimensión finita es completamente reducible).

4. Sea G un grupo y para cada $g \in G$ definamos la aplicación $\varphi_g\colon G \to G$ dada por $\varphi_g(h) := ghg^{-1}$. Compruébese que cada φ_g es un automorfismo del grupo G. Sea $\mathrm{Inn}(G) := \{\varphi_g\colon g \in G\}$. Demuéstrese que $\mathrm{Inn}(G)$ es un subgrupo normal del grupo de automorfismos de G. Definimos el subgrupo derivado $[G,G]$ de un grupo G como el subgrupo generado por los “conmutadores”, es decir, los elementos $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ de G. Compruébese que $[G,G]$ es un subgrupo normal de G. Cuando G es finito demuéstrese que el número de IRREPS complejas de grado uno de G coincide con el cardinal del grupo $G/[G,G]$.

5. Determina los caracteres de las IRREPS complejas del grupo simétrico S_4.

6. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo cuaternión (la tabla de multiplicar se resume en $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). Determina cuántas representaciones irreducibles complejas hay salvo isomorfismo. Encuentra las dimensiones de dichas representaciones. Determina las representaciones irreducibles complejas y su tabla de caracteres.

7. Si G_1 y G_2 son grupos y consideramos su producto cartesiano $G_1 \times G_2 := \{(x,y)\colon x \in G_1, y \in G_2\}$ con operación por componentes, demuestra que para cualquier cuerpo K el álgebra grupo $K(G_1 \times G_2)$ is isomorfa al producto tensorial $KG_1 \otimes KG_2$.

8. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. Definamos $\hat{H} := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \mathbb{Q}G$. Demuestra que $\hat{H}$ es un idempotente de $\mathbb{Q}G$ y que es central (es decir, pertenece a $Z(\mathbb{Q}G)$) si y solo si H es un subgrupo normal de G.

9. Sea G el subgrupo de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_3)$ formado por las matrices del tipo $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$. Calcúlese el grupo $[G,G]$ definido en algún ejercicio anterior. Determínense las IRREPS complejas de grado uno de G. ¿Cuántas IRREPS complejas de grado > 1 tiene el grupo?