Teoría de representaciones.

Bloque correspondiente a representaciones de álgebras asociativas y grupos finitos

Problemas. Curso 2020-2021

Prof. Cándido Martín

1. Sea Δ un anillo de división y M un espacio vectorial a la derecha sobre Δ (es decir Δ actúa a la derecha sobre M). Sean $S, T \in \mathrm{End}_\Delta(M)$ tal que una de ella, S o T, tiene rango finito (es decir la dimensión de su imagen es finita). Compruébese que $\dim(ST)$ es también finita. Supongamos que el anillo de endomorfismos $\mathrm{End}_\Delta(M)$ es simple. Demuéstrese que M es de dimensión finita.

2. Sea R un anillo simple (con unidad) y K un ideal por la izquierda minimal de R. Sabemos que $K = Re$ donde $e^2 = e$ y $\Delta := eRe$ es un anillo de división. También sabemos que K es un Δ espacio vectorial a la derecha para la acción tal que $re \cdot ese := (res)e$, para cualesquiera $r, s \in R$. Demuestra que $ReR = R$ y que se tiene $1 = \sum_i r_i e s_i$ para ciertos $r_i, s_i \in R$. Ahora dado $T \in \mathrm{End}_\Delta(K)$ definamos $a = \sum_i T(r_i e) e s_i$. Compruébese que $L_a = T$. (Aquí $L_a \colon K \to K$ es la aplicación dada por $L_a(re) = are$). De esto podemos concluir que la aplicación $R \to \mathrm{End}_\Delta(M)$ tal que $a \mapsto L_a$ es un epimorfismo de anillos.

3. Sea K un subcuerpo de otro cuerpo F y A una K-algebra de dimensión finita. Consideremos la extensión por escalares $A_F := A \otimes_K F$. Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base de A, demuéstrese que $\{e_i \otimes 1\}_{i=1}^n$ es base de A_F. En la $\mathbb{R}$-álgebra producto tensorial $A := \mathbb{H} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ consideramos los idempotentes $e_1 = 1 + i \otimes i$ y $e_2 = 1 - i \otimes i$. Demuéstrese que $e_i A e_i = \mathbb{C} e_i$ para $i = 1, 2$. Demuéstrese que $e_1 A e_2 = \mathbb{C}(k \otimes i + j \otimes 1)$ y $e_2 A e_1 = \mathbb{C}(k \otimes i - j \otimes 1)$. Determínense elementos $u_{12}, u_{21} \in A$ tales que podamos establecer un isomorfismo de álgebras de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$ tal que $e_i \mapsto E_{ii}$ $(i = 1, 2)$ mientras que $u_{12} \mapsto E_{12}$ y $u_{21} \mapsto E_{21}$, siendo las E_{ij} las matrices elementales.

4. Sea $A = M_n(D)$ la K-álgebra de las matrices $n \times n$ con coeficientes en una K-algebra de división D (de dimensión finita sobre K). Si visualizamos D^n como los vectores columnas de n coordenadas en D, demuéstrese que la acción natural $A \times D^n \to D^n$ dota a D^n de estructura de A-modulo y que dicho A-módulo es simple. Sea $e_i \in A$ la matriz con todas sus entradas nulas excepto el elemento que está en la fila i-ésima y la columna i-ésima (con $i = 1, \dots, n$). Comprueba que hay un isomorfismo $D^n \cong Ae_i$ de A-modulos para todo i. Como $A = \oplus_1^n Ae_i$ tenemos que A es suma directa de A-módulos simples todos ellos isomorfos.

5. Siendo $A = M_n(D)$ como en el problema anterior, demuéstrese que cada A-módulo simple es isomorfo a D^n (con la estructura definida antes). Idea: sea M un A-módulo y construyamos un epimorfismo de A-módulos $p \colon A \to M$, si I es el núcleo del epimorfismo tenemos un isomorfismo de A-módulos $A/I \cong M$. Como $A = \oplus_i Ae_i$ no puede ocurrir que $\forall i, Ae_i \subset I$ (demuéstrese). Por lo tanto existe i tal que $Ae_i \not\subset I$. Compruébese que entonces $Ae_i \cap I = 0$. Definimos entonces $q \colon Ae_i \to M$ el homomorfismo de A-módulos composición $Ae_i \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} M$ donde $q = pi$. Hay que comprobar que $q \neq 0$ luego como Ae_i y M son A-módulos simples no tiene más remedio que ser $\ker(q) = 0$, $\mathrm{Im}(q) = M$. Por lo tanto todo A-módulo simple es isomorfo a D^n.

6. Sea $A = \oplus_{i=1}^q M_{n_i}(D_i)$ donde cada D_i es una K-álgebra de división y de dimensión finita sobre el cuerpo base K. Comprobar que cada $D_i^{n_i}$ es un A-módulo simple. Demostrar que salvo

isomorfismos, estos son los únicos A-módulos simples. Como corolario: justifica que para todo grupo finito G, salvo isomorfismo solo hay un número finito de irreps complejas.

7. Determinar la representación regular (a izquierda) del álgebra $\mathbb{Q}[x]/(x^3+1)$ (esto quiere decir: respecto a una base conveniente del álgebra, encontrar las matrices de los operadores de multiplicación).

8. Sea R una K-álgebra (con unidad). Demuestra que si R es semisimple, todo R-módulo es semisimple. Como corolario: justifica que si G es un grupo finito, toda representación compleja de G es completamente reducible (es decir, es suma directa de irreps). *Puedes usar que (1) una suma directa arbitraria de módulos semisimples es un módulo semisimple, (2) todo cociente de un módulo semisimple es semisimple, (3) todo módulo es un cociente de un módulo libre, (4) si R es algebra semisimple entonces ${}_R R$ es un R-módulo semisimple.*

9. Demostrar con detalle que dado un monoide conmutativo M (con notación aditiva), existe un grupo $\mathcal{G}$ definido como $\mathcal{G} := M \times M/\equiv$ donde la relación $\equiv$ viene dada por: $(x,y) \equiv (s,t)$ si y solo si existe $k \in M$ tal que $x+t+k = y+s+k$. Demuéstrese que la relación es de equivalencia y dótese de estructura de grupo abeliano a $\mathcal{G}$.

   Supongamos ahora que el monoide M es (además de conmutativo) *cancelativo*: $\forall x,y,z \in M$, $x+z = x+y \Rightarrow z = y$. Si denotamos por $\overline{(m,n)}$ la clase de equivalencia de (m,n), compruébese que la aplicación $i\colon M \to \mathcal{G}$ tal que $m \mapsto \overline{(m,0)}$ es un monomorfismo de monoides. El grupo $\mathcal{G}$ es conocido como el grupo de Grothendieck asociado al monoide M. Demuéstrese la propiedad universal del grupo de Grothendieck: si $\mathcal{H}$ es un grupo abeliano, para todo morfismo de monoides $f\colon M \to \mathcal{H}$ existe un único homomorfismo de grupos $F\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tal que $Fi = f$.

10. Sea A una K-álgebra (con unidad), semisimple y de dimensión finita. Consideremos el conjunto S de clases de isomorfía de A-módulos de dimensión finita. En dicho conjunto denotemos la clase de isomorfía de M mediante $[M]$. Definamos una suma mediante $[M]+[N] := [M \oplus N]$ para todo par de A-módulos M y N. Comprueba que S es un monoide conmutativo y cancelativo. *Fijemos un conjunto $S_1, \ldots, S_q$ (necesariamente finito) de A-módulos simples dos a dos no isomorfos y exhaustivo en el sentido de que cada A-módulo simples es isomorfo a algún S_i. Cada $[M]$ se pude poner como una $\mathbb{Z}$-combinación lineal de $[S_1], \ldots, [S_q]$. A partir de esto demuestra que $M + X \cong M + Y$ implica $X \cong Y$.*

11. Sea G un grupo finito y K un cuerpo cuya característica no divida al orden del grupo. Sea M el monoide de las clases de isomorfía de KG-módulos de dimensión finita (con la suma inducida por la suma directa de módulos). Sea $\mathcal{G}$ el grupo de Grothendieck de M dotado de estructura de $\mathbb{Z}$-módulo en la forma habitual. Demuéstrese que el conjunto de las clases de isomorfía de KG-módulos simples es una base del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathcal{G}$.

12. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo cuaternión (la tabla de multiplicar se resume en $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). Determina cuántas representaciones irreducibles complejas hay salvo isomorfismo. Encuentra las dimensiones de dichas representaciones. Determina las representaciones irreducibles complejas y su tabla de caracteres.

13. Si G_1 y G_2 son grupos y consideramos su producto cartesiano $G_1 \times G_2 := \{(x,y)\colon x \in G_1, y \in G_2\}$ con operación por componentes, demuestra que para cualquier cuerpo K el álgebra grupo $K(G_1 \times G_2)$ is isomorfa al producto tensorial $KG_1 \otimes KG_2$.

14. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. Definamos $\hat{H} := \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} h \in \mathbb{Q}G$. Demuestra que $\hat{H}$ es un idempotente de $\mathbb{Q}G$ y que es central (es decir, pertenece a $Z(\mathbb{Q}G)$) si y solo si H es un subgrupo normal de G.

15. Comprueba que el grupo A_4 de las permutaciones pares de S_4 (grupo de permutaciones de $\{1,2,3,4\}$) se puede definir con generadores y relaciones diciendo que es el grupo con tres generadores α, β y g que cumplen

$$\alpha^2 = \beta^2 = 1, \alpha\beta = \beta\alpha, g^3 = 1, g\alpha = \alpha\beta g, g\beta = \alpha g.$$

Apoyándose en esto determínense las tres irreps (salvo isomorfismo) complejas de grado uno de A_4 (si $\tau\colon A_4 \to \mathbb{C}^*$ es una representación, comprueba que necesariamente $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = 1$, con lo cual solo tenemos algo de libertad al elegir $\tau(g)$ que debe ser una raíz cúbica de la unidad).

16. Sea A_4 el grupo de las permutaciones pares de S_4 (grupo de permutaciones de $\{1,2,3,4\}$). Demuestra que hay una acción de A_4 en $\mathbb{C}^4$ tal que $\sigma e_i := e_{\sigma(i)}$ donde $\{e_i\}_1^4$ es la base canónica de $\mathbb{C}^4$ y $\sigma \in A_4$ es arbitrario. Esto dota a $\mathbb{C}^4$ de estructura de A_4-modulo. Sea V el subespacio de $\mathbb{C}^4$ formado por los vectores (x,y,z,t) tales que $x+y+z+t=0$. Demuestra que V es un A_4-submódulo de $\mathbb{C}^4$ y sea $\rho\colon A_4 \to \mathrm{GL}(V)$ la representación asociada. Tomando una base de V, encuéntrese el caracter χ de ρ y compruébese que ρ es irreducible calculando $\langle \chi, \chi \rangle$.