Teoría de representaciones.
Problemas de Representaciones de grupos finitos. Curso 2019-2020

Prof. Cándido Martín

1. Sea $A = M_n(D)$ la K-álgebra de las matrices $n \times n$ con coeficientes en una K-algebra de división D (de dimensión finita sobre K). Si visualizamos D^n como los vectores columnas de n coordenadas en D, demuéstrese que la acción natural $A \times D^n \to D^n$ dota a D^n de estructura de A-modulo y que dicho A-módulo es simple. Demuéstrese que cada A-módulo simples es isomorfo a D^n (con la estructura definida antes). *Para la segunda parte tómese un A-módulo simple M y un $m_0 \in M \setminus \{0\}$. Entonces hay un epimorfismo ${}_AA \to M$ tal que $a \mapsto am_0$. Si el núcleo de dicho epimorfismo es $\mathbb{K}$ tenemos una sucesión exacta corta $0 \to \mathbb{K} \to_A A \to M \to 0$. Demuestra que ${}_AA = \mathbb{K} \oplus M'$ donde M' es un submódulo isomorfo a M. (es decir que la sucesión es split). Esto demuestra que todo A-módulo simple es isomorfo a un sumando de A. Consideremos entonces el A-submódulo M' de A que es isomorfo a M. Como M' es un conjunto de matrices tomemos alguna no nula. Entonces dicha matriz tiene una columna no nula (supongamos que es la i-ésima columna). Definamos $f\colon M' \to D^n$ tal que a cada $m \in M'$ le asocia su i-ésima columna.*

2. Sea $A = \oplus_{i=1}^{q} M_{n_i}(D_i)$ donde cada D_i es una K-álgebra de división y de dimensión finita sobre el cuerpo base K. Comprobar que cada $D_i^{n_i}$ es un A-módulo simple. Demostrar que salvo isomorfismos, estos son los únicos A-módulos simples. Como corolario: justifica que para todo grupo finito G, salvo isomorfismo solo hay un número finito de irreps complejas.

3. Determinar la representación regular (a izquierda) del álgebra $\mathbb{Q}[x]/(x^3+1)$ (esto quiere decir: respecto a una base conveniente del álgebra, encontrar las matrices de los operadores de multiplicación).

4. Sea R una K-álgebra (con unidad). Demuestra que si R es semisimple, todo R-módulo es semisimple. Como corolario: justifica que si G es un grupo finito, toda representación compleja de G es completamente reducible (es decir, es suma directa de irreps). *Puedes usar que (1) una suma directa arbitraria de módulos semisimples es un módulo semisimple, (2) todo cociente de un módulo semisimple es semisimple, (3) todo módulo es un cociente de un módulo libre, (4) si R es algebra semisimple entonces ${}_RR$ es un R-módulo semisimple.*

5. Demostrar con detalle que dado un monoide conmutativo M (con notación aditiva), existe un grupo $\mathcal{G}$ definido como $\mathcal{G} := M \times M/\equiv$ donde la relación $\equiv$ viene dada por: $(x,y) \equiv (s,t)$ si y solo si existe $k \in M$ tal que $x+t+k = y+s+k$. Demuéstrese que la relación es de equivalencia y dótese de estructura de grupo abeliano a $\mathcal{G}$.

   Supongamos ahora que el monoide M es (además de conmutativo) *cancelativo*: $\forall x,y,z \in M$, $x+z = x+y \Rightarrow z = y$. Si denotamos por $\overline{(m,n)}$ la clase de equivalencia de (m,n), compruébese que la aplicación $i\colon M \to \mathcal{G}$ tal que $m \mapsto \overline{(m,0)}$ es un monomorfismo de monoides. El grupo $\mathcal{G}$ es conocido como el grupo de Grothendieck asociado al monoide M. Demuéstrese la propiedad universal del grupo de Grothendieck: si $\mathcal{H}$ es un grupo abeliano, para todo morfismo de monoides $f\colon M \to \mathcal{H}$ existe un único homomorfismo de grupos $F\colon \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ tal que $Fi = f$.

6. Sea A una K-álgebra (con unidad), semisimple y de dimensión finita. Consideremos el conjunto S de clases de isomorfía de A-módulos de dimensión finita. En dicho conjunto denotemos la clase de isomorfía de M mediante $[M]$. Definamos una suma mediante $[M]+[N] := [M \oplus N]$

para todo par de A-módulos M y N. Comprueba que S es un monoide conmutativo y cancelativo. *Fijemos un conjunto $S_1, \ldots, S_q$ (necesariamente finito) de A-módulos simples dos a dos no isomorfos y exhaustivo en el sentido de que cada A-módulo simples es isomorfo a algún S_i. Cada $[M]$ se pude poner como una $\mathbb{Z}$-combinación lineal de $[S_1], \ldots, [S_q]$. A partir de esto demuestra que $M + X \cong M + Y$ implica $X \cong Y$.*

7. Sea G un grupo finito y K un cuerpo cuya característica no divida al orden del grupo. Sea M el monoide de las clases de isomorfía de KG-módulos de dimensión finita (con la suma inducida por la suma directa de módulos). Sea $\mathcal{G}$ el grupo de Grothendieck de M dotado de estructura de $\mathbb{Z}$-módulo en la forma habitual. Demuéstrese que el conjunto de las clases de isomorfía de KG-módulos simples es una base del $\mathbb{Z}$-módulo $\mathcal{G}$.

8. Sea $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ el grupo cuaternión (la tabla de multiplicar se resume en $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$). Determina cuántas representaciones irreducibles complejas hay salvo isomorfismo. Encuentra las dimensiones de dichas representaciones. Determina las representaciones irreducibles complejas y su tabla de caracteres.

9. Si G_1 y G_2 son grupos y consideramos su producto cartesiano $G_1 \times G_2 := \{(x, y) \colon x \in G_1, y \in G_2\}$ con operación por componentes, demuestra que para cualquier cuerpo K el álgebra grupo $K(G_1 \times G_2)$ is isomorfa al producto tensorial $KG_1 \otimes KG_2$.

10. Sea G un grupo finito y H un subgrupo de G. Definamos $\hat{H} := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h \in \mathbb{Q}G$. Demuestra que $\hat{H}$ es un idempotente de $\mathbb{Q}G$ y que es central (es decir, pertenece a $Z(\mathbb{Q}G)$) si y solo si H es un subgrupo normal de G.