Representaciones de grupos finitos

Cándido Martín González

Universidad de Málaga

http://agt2.cie.uma.es/TR.htm

23 de noviembre de 2018

Teorema

Sea G un grupo finito. El número de clases de isomorfía de representaciones irreducibles complejas coincide con el número de clases de conjugación de G

Dem. $KG = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\mathbb{C})$ y el número de representaciones irreducibles complejas es q.

$$Z(KG) = \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C} \qquad \text{(hay } q\text{-sumandos)} \ ,$$

por lo tanto $\dim(Z(KG)) = q$.

Veamos que hay tantas clases de conjugación como $\dim(Z(KG))$: Sea $z \in Z(KG)$ y pongamos $z = \sum_{g \in G} \lambda_g g$. Para todo $h \in G$ se tiene

$$z = hzh^{-1} = \sum_g \lambda_g hgh^{-1} = \sum_{g'} \lambda_{h^{-1}g'h} g' =$$

$$\sum_g \lambda_{h^{-1}gh} g.$$

por tanto $\lambda_g = \lambda_{h^{-1}gh}$ para todo h. Todos los conjugados de g tienen el mismo escalar en la expresión $z = \sum_{g \in G} \lambda_g g$.

Luego si denotamos por g^* la suma de todos los conjugados de g,
tenemos un g^* por cada clase de conjugación.
Además

$$z = \sum \lambda_g g^*$$

lo que quiere decir que el conjunto de los diferentes g^* es un sistema de generadores de $Z(KG)$.
Además son L.I. porque si $\sum \lambda_g g^* = 0$ como las clases de conjugación forman una partición del grupo, se tiene $\lambda_g = 0$. Por tanto $\{g^*\}$ es una base de $Z(KG)$ y $q = \dim(Z(KG)) =$ número de clases de conjugación de G.

Teoría de caracteres.

Recordermos que la traza de una matriz cuadrada es la suma de los elementos de su diagonal. Si denotamos por tr la traza de una matriz, se trata de una aplicación lineal

$$\operatorname{tr}\colon M_n(K) \to K$$

dada por $\operatorname{tr}(a_{ij}) = \sum_i a_{ii}$. Esta aplicación lineal cumple que

$$\forall A, B \in M_n(K),\ \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Por lo tanto si P es cualquier matriz inversible

$$\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$$

para toda $A \in M_n(K)$.
Esta propiedad permite definir el concepto de traza de una aplicación lineal $f \colon V \to V$ siendo V un e.v. de dim. finita. En efecto: fijemos una base B de V y definamos

$$\mathrm{tr}(f) := \mathrm{tr}(M_B(f))$$

siendo $M_B(f)$ la matriz de f relativa a la base B.

La definición no depende de la base elegida porque si B' es otra base, existe una matriz inversible tal que $M_{B'}(f) = PM_B(f)P^{-1}$ y entonces $\mathrm{tr}(M_{B'}(f)) = \mathrm{tr}(M_B(f))$.
Por lo tanto tenemos una aplicación lineal

$$\mathrm{tr}\colon \mathrm{End}_K(V) \to K$$

tal que $\forall f, g \in \mathrm{End}_K(V)$, se cumple

$$\mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf).$$

Carácter de una representación

Dada una representacion de grado finito $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ de un grupo G en el espacio V, definimos el carácter de ρ (denotado χ_ρ) como la aplicación

$$\chi_\rho\colon G \to K$$

tal que $\forall g \in G$, se tiene $\chi_\rho(g) := \mathrm{tr}(\rho(g))$.

Problema

Calcular el carácter de la representación de Δ_3 dada por $d\colon \Delta_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ siendo

$$d(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, d(g) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$d(g^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, d(sg) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$d(sg^2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Por tanto el carácter χ_d de la representación es:

	1	g	g^2	s	sg	sg^2
χ_d	2	-1	-1	0	0	0

Problema

Determinar la tabla de caracteres de Δ_3.

Aparte de la representación de grado dos, cuyo carácter hemos calculado en el problema anterior, teníamos dos representaciones irreducibles de grado uno no isomorfas

$$\begin{aligned} 1\colon \Delta_3 &\to \mathbb{C}^\times \\ s &\mapsto 1 \\ g &\mapsto 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u\colon \Delta_3 &\to \mathbb{C}^\times \\ s &\mapsto -1 \\ g &\mapsto 1 \end{aligned}$$

La table completa de caracteres de Δ_3 es:

	1	g	g^2	s	sg	sg^2
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_u	1	1	1	-1	-1	-1
χ_d	2	-1	-1	0	0	0

Observaciones

A partir de aquí, el cuerpo base será $\mathbb{C}$.

1. Para toda representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, $\chi_\rho(1) = \dim(V)$.
2. Si $\dim(V) = 1$, se tiene $\chi_\rho = \rho$.
3. Si ρ_1 y ρ_2 son representaciones isomorfas de G,

$$\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}.$$

Dem. La condición de isomorfía implica la existencia de un isomorfismo lineal $f\colon V_1 \to V_2$ tal que $\forall g \in G$, $\rho_2(g)f = f\rho_1(g)$.

Entonces $\rho_2(g) = f\rho_1(g)f^{-1}$ luego $\chi_{\rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)$ por tanto $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$.

5. Si $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ es una representación compleja, $\forall g \in G$ se tienen $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
   Dem. Como $\rho(g)$ es diagonalizable su traza es la suma de sus autovalores.

$$\rho(g) = p\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_q)p^{-1}$$

$$\rho(g^{-1}) = p\ \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_q^{-1})p^{-1}$$

Pero cada λ_i es de norma unidad $\rho(g)$ es de orden finito (todo endomorfismo de orden finito tiene autovalores que son raíces n-ésimas de la unidad). Así

$$\overline{\chi_\rho(g)} = \sum_i \overline{\lambda_i} = \sum_i \lambda_i^{-1} = \mathrm{tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_\rho(g^{-1}).$$

Teorema

Si A es un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado y M es un A-módulo simple, entonces $\forall f \in \mathrm{End}_A(M)$ no nulo, existe $\lambda \in K^\times (= K \setminus \{0\})$ tal que $f = \lambda 1_M$.

Dem. $ker(f)$ es una A-submódulo de M luego $\ker(f) = 0$ (no puede ser $\ker(f) = M$ porque $f \neq 0$). Análogamente $\mathrm{Im}(f) = M$. Luego f es un automorfismo.

Por lo tanto todo elemento no nulo del álgebra $\mathrm{End}_A(M)$ es inversible lo que quiere decir que $\mathrm{End}_A(M)$ es un álgebra de división (y de dimensión finita por serlo M). Como K es algebraicamente cerrado, $\mathrm{End}_A(M) \cong K$ luego todo elemento es múltiplo escalar de la identidad.

Sean $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ dos representaciones de G. Suponemos que V y W son K-espacios vectoriales. Definamos por $\hom(V, W)$ el K espacio de todas las aplicaciones lineales $V \to W$. Si V y W son finito-dimensionales $\hom(V, W)$ cumple

$$\dim(\hom(V, W)) = \dim(V)\dim(W).$$

Denotemos por $\hom_G(V, W)$ el subespacio de $\hom(V, W)$ de todas las $f\colon V \to W$ tales que $f(gv) = gf(v)$ para cada $g \in G$, $v \in V$.

Teorema (dimensional)

Supongamos que $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son irreps de G.

1. Si $\rho_1 \not\cong \rho_2$ se tiene $\hom_G(V, W) = 0$.
2. Sea K algebraicamente cerrado. Si $\rho_1 \cong \rho_2$ se tiene $\dim(\hom_G(V, W)) = 1$.

Dem Sea $f \in \hom_G(V, W)$. V y W son G-módulos simples luego $\ker(f)$ es 0 o V. Análogamente $\mathrm{Im}(f) = 0$ o W. Como las representaciones no son isomorfas, V no es isomorfo a W como G-módulo .

por tanto $\ker(f) = V$, $\mathrm{Im}(f) = 0$. En este caso $\hom_G(V, W) = 0$. Supogamos ahora que $\rho_1 \cong \rho_2$ y K algebraicamente cerrado. Existe un isomorfismo de G-módulos $f\colon V \to W$. Para cualquier otro $g \in \hom_G(V, W)$ se tiene $f^{-1}g \in \mathrm{End}_G(V) \cong K$ por tanto $f^{-1}g = \lambda 1$ para algún $\lambda \in K^\times$, luego $g = \lambda f$ y $\dim(\hom_G(V, W)) = 1$.

Definición

Sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación en el K-espacio vectorial V. Sea $V^* := \hom_K(V, K)$ el dual de V. Definimos la representación dual $\rho^*\colon G \to \mathrm{GL}(V^*)$ mediante

$$\rho^*(g)(f) = f\rho(g^{-1})$$

para cada $g \in G$, $f\colon V \to K$ elemento de V^*.

Problema: $\forall g \in G$, $\chi_{\rho^*}(g) = \overline{\chi_\rho(g)}$.

Recordemos que si V y W son K-espacios vectoriales de dimensión finita, hay un isomorfismo

$$\theta\colon V^* \otimes W \cong \hom(V, W)$$

tal que $f \otimes w \mapsto f(\ )w$ siendo esta, la aplicación $V \to W$ tal que $v \mapsto f(v)w$:

$$[f(\ )w](v) = f(v)w$$

para cada $f \in V^*$, $w \in W$, $v \in V$.
Dem. Es fácil ver que θ es un monomorfismo y como ambos espacios tienen la misma dimensión, θ es un isomorfismo.

Proposición

Si $A \in M_n(K)$, $B \in M_q(K)$ entonces $\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$.

Dem. Si $A = (a_{ij})$ entonces

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}\operatorname{tr}(B) + \cdots + a_{nn}\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(B)$$

Corolario

Si $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ para $i = 1, 2$ son representaciones de G en los K-espacios V_1 y V_2, entonces $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g)$ para cada $g \in G$.

Dem.

$$\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \mathrm{tr}(\rho_1(g) \otimes \rho_2(g)) =$$

$$\mathrm{tr}(\rho_1(g))\,\mathrm{tr}(\rho_2(g)) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g).$$

Si $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones de G en los K-espacios V yW, podemos definir la representación

$$\rho_1 \vdash \rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(\mathrm{hom}(V, W))$$

tal que $(\rho_1 \vdash \rho_2)(g)\colon \mathrm{hom}(V, W) \to \mathrm{hom}(V, W)$ viene dada por

$$T \mapsto \rho_2(g) T \rho_1(g^{-1})$$

El isomorfismo $\theta\colon V^* \otimes W \to \hom(V,W)$ descrito anteriormente, induce un isomorfismo de representaciones

$$\rho_1 \vdash \rho_2 \cong \rho_1^* \otimes \rho_2.$$

Compruebe el lector que para cada $g \in G$ se tienen cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \xrightarrow{(\rho_1^* \otimes \rho_2)(g)} & V^* \otimes W \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\theta} \\ \hom(V,W) & \xrightarrow[(\rho_1 \vdash \rho_2)(g)]{} & \hom(V,W) \end{array}$$

Corolario

$$\chi_{\rho_1 \vdash \rho_2} = \chi_{\rho_1^* \otimes \rho_2}$$

En particular, para representaciones complejas, $\forall g \in G$ se tiene

$$\chi_{\rho_1 \vdash \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1^*}(g)\chi_{\rho_2}(g) = \overline{\chi_{\rho_1}(g)}\chi_{\rho_2}(g).$$

Fórmula

$$\forall g \in G, \ \chi_{\rho_1 \vdash \rho_2}(g) = \overline{\chi_{\rho_1}(g)}\chi_{\rho_2}(g).$$

Recordemos que si S es un subespacio de un K-espacio vectorial V, y fijamos una descomposición $V = S \oplus S'$, una aplicación $p\colon V \to V$ tal que $p(x) = x$ para cada $x \in S$ y $p(S') = 0$ se llamará una proyección en S. En este caso si V es de dimensión finita,

$$\operatorname{tr}(p) = \dim(S).$$

Dem. En una base conveniente de V, la matriz de p es

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = \dim(S).$$

Lema

Para que una aplicación $f\colon V \to V$ sea una proyección en un subespacio S de V es suficiente que

1. $f^2 = f$, y
2. $f(x) = x$ si y solo si $x \in S$.

Dem. Si p es una proyección en S, el núcleo de p es S' y su imagen S. Por lo tanto $V = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(f)$. Además como $p(x) \in S$ se tiene $p(p(x)) = x$ para todo x.

Recíprocamente, si se cumplen las dos condiciones, es fácil comprobar que $\ker(f) \cap \mathrm{Im}(f) = 0$ (porque si $z \in \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$ se tiene $z = f(q)$ luego $0 = f(z) = f(f(q)) = f(q) = z$). Además $\forall x \in V$, $x = f(x) + (x - f(x))$ y $x - f(x) \in \ker(f)$. Por tanto

$$V = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f).$$

Además, si $x \in S$, tenemos $x = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Por otra parte si $x \in \mathrm{Im}(f)$ tenemos $x = f(y)$ luego $f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ lo que implica $x \in S$. Concluimos que

$$S = \mathrm{Im}(f).$$

y f es una proyección en S.

Sea G un grupo finito, $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ representaciones complejas de G. Definamos $F\colon \hom(V,W) \to \hom(V,W)$ por

$$F(T) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \rho_2(g)\, T \rho_1(g^{-1}).$$

Lema

La imagen de F es $\hom_G(V,W)$.

Objetivo: siendo $S := F(T)$, ¿$S \in \hom_G(V,W)$?

Sea $v \in V$, $h \in G$:

$$S(hv) = S(\rho_1(h)(v)) =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)\{T[\rho_1(g^{-1})(\rho_1(h)(v))]\} =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)\{T[\rho_1(g^{-1}h)(v))]\} =$$

$$\frac{1}{|G|}\rho_2(h)\sum_{g\in G}\rho_2(h^{-1}g)\{T[\rho_1(g^{-1}h)(v))]\} =$$

$$\frac{1}{|G|}\rho_2(h)\sum_{g\in G}\rho_2(h^{-1}g)\{T[\rho_1(g^{-1}h)(v))]\} =$$

$$\rho_2(h)\frac{1}{|G|}\sum_{k\in G}\rho_2(k)T\rho_1(k^{-1})(v) =$$

$$\rho_2(h)(S(v)) = hS(v).$$

Esto prueba que $\mathrm{Im}(F) \subset \hom_G(V, W)$.

Veamos ahora $\hom_G(V, W) \subset \mathrm{Im}(F)$. Sea $T \in \hom_G(V, W)$. Entonces $\forall g \in G$ se tiene $\rho_2(g)T = T\rho_1(g)$ por tanto

$$F(T) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_2(g)T\rho_1(g^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T\rho_1(g)\rho_1(g^{-1}) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}T = T,$$

luego $T \in \mathrm{Im}(F)$. Como corolario $F^2 = F$.

Como $F^2 = F$ se tiene

$$\operatorname{tr}(F) = \dim(\hom_G(V, W)).$$

Corolario

Si las irreps $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son isomorfas, entonces $\operatorname{tr}(F) = 1$, en caso contrario $\operatorname{tr}(F) = 0$.

Véase el Teorema dimensional

Definición

Si $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son representaciones complejas de grado finito de un grupo finito G, definimos el producto escalar de sus caracteres:

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g) \overline{\chi_{\rho_2}(g)}$$

Esta aplicación es lineal en la variable de la izquierda y conjugado-lineal en la variable de la derecha:

$$\langle \chi_1 + \chi_2, \chi_3 \rangle = \langle \chi_1, \chi_3 \rangle + \langle \chi_2, \chi_3 \rangle,$$

$$\langle \chi_1, \chi_2 + \chi_3 \rangle = \langle \chi_1, \chi_2 \rangle + \langle \chi_1, \chi_3 \rangle,$$

$$\langle k\chi_1, \chi_2 \rangle = k\langle \chi_1, \chi_2 \rangle,$$

$$\langle \chi_1, k\chi_2 \rangle = \bar{k}\langle \chi_1, \chi_2 \rangle,$$

Para cualquier $k \in \mathbb{C}$ y caracteres χ_i, $i = 1, \ldots, 4$.

Además

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \overline{\langle \chi_2, \chi_1 \rangle}$$

y

$$\forall \chi,\ \langle \chi, \chi \rangle \geq 0.$$

$$\forall \chi (\langle \chi, \chi \rangle = 0 \text{ si y solo si } \chi = 0).$$

Teorema

Si $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(W)$ son irreps complejas del grupo finito G cuyos caracteres son respectivamente χ_1 y χ_2, entonces

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho_1 \cong \rho_2 \\ 0 & \text{si } \rho_1 \ncong \rho_2 \end{cases}$$

Recordemos que $F\colon \hom(V,W) \to \hom(V,W)$ dada por

$$F(T) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g) T \rho_1(g^{-1}).$$

tiene $\operatorname{tr}(F) = 1$ si $\rho_1 \cong \rho_2$ y $\operatorname{tr}(F) = 0$ en caso contrario (véase Corolario). Además:

$$(\rho_1 \vdash \rho_2)(g)(T) = \rho_2(g) T \rho_1(g^{-1}) \Rightarrow$$

$$F = \frac{1}{|G|} \sum_{g} (\rho_1 \vdash \rho_2)(g)$$

$$F = \frac{1}{|G|}\sum_g (\rho_1 \vdash \rho_2)(g)$$

$$\mathrm{tr}(F) = \frac{1}{|G|}\sum_g \mathrm{tr}(\rho_1 \vdash \rho_2)(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_g \chi_{\rho_1 \vdash \rho_2}(g)) =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_g \overline{\chi_{\rho_1}(g)}\chi_{\rho_2}(g) = \langle \chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_1}\rangle = \overline{\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}\rangle}.$$

Luego $\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2}\rangle$ es nulo si $\rho_1 \ncong \rho_2$ y 1 si $\rho_1 \cong \rho_2$.

Teorema

Sea G un grupo finito y $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación compleja de grado finito. Descompongamos ρ como suma directa de irreps de G:

$$\rho \cong \sum_i n_i \rho_i$$

con $n_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y cada ρ_i es una irrep. ($\rho_i \not\cong \rho_j$ si $i \neq j$). Sea $\tau\colon G \to \mathrm{GL}(W)$ una irrep. compleja cualquiera de G. Entonces $\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = n_i$ siendo $\rho_i \cong \tau$.

$$\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = \sum_i n_i \langle \chi_{\rho_i}, \chi_\tau \rangle$$

el único sumando no nulo es aquel en que $\tau \cong \rho_i$.
Por tanto

$$\langle \chi_\rho, \chi_\tau \rangle = n_i$$

donde $\tau \cong \rho_i$.

Teorema

Sea G un grupo finito. Una representación compleja $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ de grado finito es irreducible si y solo si su carácter χ cumple $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Ya hemos visto que si ρ es irreducible $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. Veamos el recíproco. Sabemos $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, descompongamos ρ como suma de irreps

$$\rho = \sum_i n_i \rho_i$$

con $n_i \geq 0$ (enteros) y las ρ_i no isomorfas dos a dos.

Entonces $\chi = \sum_i n_i \chi_i$ siendo $\chi_i := \chi_{\rho_i}$.

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \langle \sum_i n_i \chi_i, \sum_j n_j \chi_j \rangle = \sum_{i,j} n_i n_j \langle \chi_i, \chi_j \rangle =$$

$$\sum_i n_i^2$$

Por lo tanto solo puede haber un n_i y vale 1. Luego ρ es irreducible.

Irreps de $\mathbb{Z}_n$

Todas las irreps complejas de un grupo abeliano finito son de grado 1: sea $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ con $\dim(V)$ finita y G abeliano finito. El conjunto $\{\rho(g)\}_{g\in G} \subset \mathrm{GL}(V)$ es un conjunto de aplicaciones diagonalizables y que conmutan dos a dos. Es sabido que existe una base de V tal que todas las $\rho(g)$ diagonalizan en dicha base. Si tomamos un elemento v de dicha base, el subespacio generado por v es por lo tanto ρ-invariante. Como ρ es irreducible, V es el subespacio generado por v luego $\dim(V) = 1$.

Por lo tanto todas las irreps complejas de $\mathbb{Z}_n$ son de grado uno, es decir, homomorfismos de grupos $\mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^\times$. Sabemos que hay tantas irreps complejas como clases de conjugación del grupo. Como el grupo es abeliano, hay tantas clases de conjugación como elementos en el grupo. Por lo tanto, salvo isomorfismo, solo hay n irreps de $\mathbb{Z}_n$.

Vamos a calcularlas. Si ponemos $\mathbb{Z}_n = \langle \pi \colon \pi^n = 1 \rangle$ todo homomorfismo $\rho \colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}^\times$ queda determinado por $\rho(\pi)$ que es una raíz n-ésima de la unidad. Escribiendo $\omega = \exp(\frac{2\pi}{n} i)$ tenemos las representaciones $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{n-1}$ definidas por

$$\rho_k(\pi) = \omega^k.$$

Como son todas distintas, son todas ellas no isomorfas.

Ejemplos

$\mathbb{Z}_2$	1	π
ρ_0	1	1
ρ_1	1	-1

$\mathbb{Z}_3$	1	π	π^2
ρ_0	1	1	1
ρ_1	1	ω	ω^2
ρ_2	1	ω^2	ω

$$\omega = \exp 2\pi i/3$$

$\mathbb{Z}_4$	1	π	π^2	π^3
ρ_0	1	1	1	1
ρ_1	1	i	-1	$-i$
ρ_2	1	-1	1	-1
ρ_3	1	$-i$	-1	i

Teorema

En un grupo abeliano finito G por cada irrep ρ de G tenemos un idempotente

$$e_\rho := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)g$$

en el álgebra grupo $\mathbb{C}G$. Si ρ y τ son irreps no isomorfas $e_\rho e_\tau = 0$. Además

$$\sum_\rho e_\rho = 1.$$

$$e_\rho e_\tau = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h}\chi_\rho(g)\chi_\tau(h)gh =$$

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h}\chi_\rho(g)\chi_\tau(g^{-1}gh)gh =$$

$$\frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h}\chi_\rho(g)\chi_\tau(g^{-1})\chi_\tau(gh)gh =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi_\rho(g)\chi_\tau(g^{-1})\frac{1}{|G|}\sum_{h}\chi_\tau(gh)gh =$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g}\chi_\rho(g)\chi_\tau(g^{-1})\frac{1}{|G|}\sum_{h}\chi_\tau(gh)gh = \langle\chi_\rho,\chi_\tau\rangle e_\tau$$

$$e_\rho e_\tau = \langle\chi_\rho,\chi_\tau\rangle e_\tau$$

luego

$$e_\rho^2 = e_\rho, \qquad e_\rho e_\tau = 0, \text{ si } \rho \neq \tau.$$

Veamos que $\sum_\rho e_\rho = 1$.

Para demostrar

$$\sum_{\rho} e_{\rho} = 1$$

tengamos que cuenta que las representaciones son $\rho_0, \ldots, \rho_{n-1}$ y que $\rho_k(\pi) = \omega^k$.

$$e_{\rho_k} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_k(\pi^j)\pi^j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}\pi^j$$

$$\sum_{\rho} e_{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}\pi^j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{jk})\pi^j =$$

$$\sum_{\rho} e_\rho = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk})\pi^j.$$

$$\text{Para } j \neq 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk} = \frac{1-\omega^{jn}}{1-\omega^j} = 0 \text{ pues } \omega^n = 1$$

$$\text{Para } j = 0, \quad \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk} = n$$

$$\sum_{\rho} e_\rho = 1.$$

Por lo tanto el álgebra grupo compleja de $\mathbb{Z}_n$ se descompone como

$$\mathbb{C}\mathbb{Z}_n = \bigoplus_{\rho} \mathbb{C}e_\rho$$

donce ρ varía en el conjunto de representaciones irreducibles (dos a dos no isomorfas) de $\mathbb{Z}_n$. Sabemos además que hay exactamente n de tales representaciones.

Ejemplos

$\mathbb{Z}_2$	1	π
ρ_0	1	1
ρ_1	1	-1

$$e_{\rho_0} = \frac{1}{2}(1+\pi),$$
$$e_{\rho_1} = \frac{1}{2}(1-\pi)$$

$$\mathbb{C}\mathbb{Z}_2 = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1$$

donde $e_i := e_{\rho_i}$, $i = 0, 1$.

Siendo $\omega = \exp 2\pi i/3$,

$\mathbb{Z}_3$	1	π	π^2
ρ_0	1	1	1
ρ_1	1	ω	ω^2
ρ_2	1	ω^2	ω

$$\begin{aligned} e_{\rho_0} &= \tfrac{1}{3}(1 + \pi + \pi^2) \\ e_{\rho_1} &= \tfrac{1}{3}(1 + \omega\pi + \omega^2\pi^2) \\ e_{\rho_2} &= \tfrac{1}{3}(1 + \omega^2\pi + \omega\pi^2) \end{aligned}$$

$$\mathbb{C}\mathbb{Z}_3 = \mathbb{C}e_0 \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2,$$

$$e_i := e_{\rho_i}, i = 1, 2, 3.$$