# Representaciones de grupos finitos

Cándido Martín González

Universidad de Málaga

*http://agt2.cie.uma.es/TR.htm*

13 de noviembre de 2018

## Isomorfismo en categorías

Recordemos que dada una categoría $\mathcal{C}$ y dos objectos $X$, $Y$ de $\mathcal{C}$, un isomorfimo de $X$ a $Y$ es una flecha $f\colon X \to Y$ de $\mathcal{C}$ tal que existe otra flecha $g\colon Y \to X$ de $\mathcal{C}$ de modo que $fg = 1_Y$, $gf = 1_X$.

En $\mathrm{Rep}_K(G)$ dado un objecto $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$, la identidad $1\colon \rho \to \rho$ es la aplicación identidad $1\colon V \to V$.

Dos representaciones $\rho_i\colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$ son isomorfas si existen aplicaciones $K$-lineales $t\colon V_1 \to V_2$ y $s\colon V_2 \to V_1$ tales que $ts = 1_{V_2}$, $st = 1_{V_1}$ y

$$\begin{cases} \rho_2(g)t = t\rho_1(g) \\ \rho_1(g)s = s\rho_2(g) \end{cases}$$

para cada $g \in G$.

Una representación de grado uno es $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ con $\dim(V) = 1$. Por tanto $V \cong K$ y $\mathrm{GL}(V) \cong K^\times := K \setminus \{0\}$. La representación se identifica con un homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to K^\times$.

Si $\rho_i\colon G \to K^\times$ son dos representaciones de grado uno isomorfas, la condición de isomorf$\begin{cases} \rho_2(g)t = t\rho_1(g) \\ \rho_1(g)s = s\rho_2(g) \end{cases}$ $se convierte en \rho_2(g) = \rho_1(g)$ para cada $g$. Por tanto $\rho_1 = \rho_2$.

## Nota

Dos representaciones de grado uno de un mismo grupo son isomorfas si y solo si son iguales.

# Problema

## Problema

Determinar las representaciones irreducibles complejas del grupo $\Delta_3$.

$$\Delta_3 = \{1, g, g^2, g^3, s, sg, sg^2, sg^3\}.$$
$$\Delta_3 = \langle s, g : s^2 = g^3 = 1, sg = g^2 s\rangle.$$

El álgebra grupo $\mathbb{C}\Delta_3$ tiene dimensión 6 y es semisimple. Solo hay dos posibilidades:

$$\mathbb{C}^6, \quad M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$$

Como el grupo $\Delta_3$ no es abeliano llegamos a que $\mathbb{C}\Delta_3 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^2$. Por lo tanto $\Delta_3$ solo tiene tres representaciones irreducibles: las asociadas a los módulos simples: $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}$ del álgebra grupo. Vamos a intentar determinar dichas representaciones.

Supongamos una representación compleja $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ con $\dim(V) = 1$. En ese caso $V \cong \mathbb{C}$ y $\mathrm{GL}(V) \cong \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por tanto podemos identificar la representación con un homomorfismo de grupos $\rho \colon G \to \mathbb{C}^*$. En el caso del grupo dihédrico $\Delta_3$ sea $\rho \colon \Delta_3 \to \mathbb{C}^*$ y escribamos $s' = \rho(s)$, $g' = \rho(g)$. Se debe tener entonces

$$s'^2 = 1 = g'^3, s'g' = g'^2 s'$$

lo que implica $g' = 1$ y $s' = \pm 1$. Estas son entonces dos representaciones irreducibles distintas

$$\begin{array}{ccc} \Delta_3 \to \mathbb{C}^* & \qquad & \Delta_3 \to \mathbb{C}^* \\ s \mapsto 1 & & s \mapsto -1 \\ g \mapsto 1 & & g \mapsto 1 \end{array}$$

Vamos a describir la representación irreducible de grado 2.

$$\Delta_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \quad s \mapsto s', g \mapsto g'$$

$s'^2 = 1 = g'^3$ luego las dos matrices son diagonalizables. Si ponemos $s' = \pm 1$ entonces $s'g' = g'^3 s'$ implica $g' = 1$ y esta representación no es irreducible. Por tanto $s'$ es de orden dos $s' \neq \pm 1$. Como es diagonalizable podemos tomar

$$s' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si ahora escribimos

$$g' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

e imponemos la condiciones $g'^3 = 1$, $s'g' = g'^3 s'$ encontramos las soluciones:

$$x_4 = -\frac{1}{2}, \quad x_3 \neq 0, \quad x_2 = -\frac{3}{4x_3}, \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$g' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En definitiva tenemos la representación $\Delta_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tal que

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{simetría respecto al eje } X \ ,$$

$$g \mapsto \left( \begin{array}{cc} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right), \text{giro de } \tfrac{2\pi}{3} \text{ rad. entorno al origen.}$$

# Problema

## Problema

¿Cuál es el álgebra grupo del grupo $A_4$ (permutaciones pares del grupo simétrico $S_4$)?

El grupo simétrico $S_n$ siempre admite como subgrupo a $A_n$ que es el formado por todas las permutaciones pares. El orden de $A_n$ es $\frac{n!}{2}$. Por tanto $|A_4| = 12$. El álgebra grupo $\mathbb{C}A_4$ es de dimensión 12, semisimple y no conmutativa. Ademas 12 se expresa como suma de cuadrados en las siguientes formas:

## Posibilidades a priori

| Descomp. | $\mathbb{C}A_4$ | IRREPS |
|---|---|---|
| $12 = 2^2 + \overbrace{1^2 + \cdots + 1^2}^{8}$ | $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^8$ | 9 |
| $12 = 2^2 + 2^2 + \overbrace{1^2 + \cdots + 1^2}^{4}$ | $M_2(\mathbb{C})^2 \oplus \mathbb{C}^4$ | 6 |
| $12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$ | $M_2(\mathbb{C})^3$ | 3 |
| $12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ | $M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3$ | 4 |

IRREPS= no. de repr. irred. complejas

Calculamos las clases de conjugación del grupo $A_4$.
$A_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23),$
$(234), (243), (134), (143), (124), (142), (123), (132)\}$

Clases de conjugación

$[1] = 1$
$[(12)(34)] = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$
$[(123)] = \{(123), (142), (134), (243)\}$
$[(132)] = \{(132), (143), (124), (234)\}$
Hay cuatro clases de conjugación.

$$\mathbb{C}A_4 \cong M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3$$

El grupo $A_4$ tiene (salvo isomorfismo) una representación irreducible de grado 3 y tres representaciones irreducibles de grado 1.

# Reducibilidad completa

Recordemos que fijado un cuerpo $K$, la categoría $\mathrm{Rep}_K(G)$ de representaciones del grupo $G$ es isomorfa a la categoría de $G$-módulos . Esta, a su vez, es isomorfa a la categoría de $KG$-módulos . Si asumimos las hipótesis habituales de que $G$ es un grupo finito y la característica de $K$ no divide a $|G|$, sabemos que $KG$ es semisimple.

Si $A$ es un álgebra semisimple, todo $A$-módulo es semisimple. En particular todo $KG$-módulo es semisimple por tanto es suma directa de módulos simples. Usando el isomorfismo $\mathrm{Rep}_K(G) \cong KG - \mathrm{mod}$ resulta que toda representación de $G$ es suma directa de representaciones irreducibles.

Explicitemos un poco esta afirmación

Como la suma directa de $KG$-módulos es un concepto claro, podemos usar el isomorfismo de categorías para explicitar el concepto de suma directa de representaciones: tomemos dos representaciones de $G$ en sendos $K$-espacios $V_1$ y $V_2$:
Entonces $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$. La suma $\sigma := \rho_1 \oplus \rho_2$ es la nueva representación

$$\sigma \colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2), \quad \sigma(g) \colon V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$$

tal que $\sigma(g)(v_1 + v_2) = \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)$

en terminos matriciales...
Si $\rho_1 \colon G \to \mathrm{GL}_{n_1}(K)$, $\rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}_{n_2}(K)$, entonces $\sigma = \rho_1 \oplus \rho_2$ es la representación $\sigma \colon G \to \mathrm{GL}_{n_1+n_2}(K)$ tal que

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}.$$

## Teorema

Para toda representación $\tau\colon G \to \mathrm{GL}_n(K)$ existe una descomposición $n = n_1 + \ldots + n_q$ y $q$ representaciones irredudibles $\rho_i\colon G \to \mathrm{GL}_{n_i}(K)$ tal que $\tau$ es isomorfa a la representación

$$G \to \mathrm{GL}_n(K)$$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \rho_1(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho_q(q) \end{pmatrix}.$$

**Teorema**

Si $G$ es un grupo finito y $K$ un cuerpo cuya característica no divida al orden de $G$, toda representación de $G$ es suma directa de representaciones irreducibles.

### Teorema

Si $A$ es una $K$-álgebra de dimensión finita, cada $A$-módulo simple es de dimensión finita:

Sea $M$ un $A$-módulo simple. Como $M \neq 0$ (por definición) tomemos $0 \neq m \in M$. Por simplicidad $M = Am$ y la aplicación $\varphi \colon A \to Am = M$ tal que $a \mapsto am$ es un epimorfismo lo que implica que $M \cong A/\ker(\varphi)$ en particular $\dim(M)$ es finita.

## Corolario

Si $G$ es un grupo finito, cada representación irreducible de $G$ es de grado finito (la dimensión del espacio de la representación es finita).

# Producto tensorial de representaciones

Si $V$ y $W$ son espacios vectoriales sobre el cuerpo $K$, podemos definir su producto tensorial como el $K$-espacio vectorial libre generado por el producto cartesiano $V \times W$ módulo el subespacio $S$ generado por los elementos

$$(\alpha v_1 + \beta v_2, w) - \alpha(v_1, w) - \beta(v_2, w),$$

$$(v, \alpha w_1 + \beta w_2) - \alpha(v, w_1) - \beta(v, w_2),$$

para $\alpha, \beta \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$.

Por lo tanto

$$V \bigotimes W := K(V \times W)/S.$$

Normalmente la clase de equivalencia de un elemento $(v, w) \in V \times W$ en el cociente $K(V \times W)/S$ se denota por $v \bigotimes w$. Siendo así, tenemos las igualdades

$$(\alpha v_1 + \beta v_2) \otimes w = \alpha(v_1 \otimes w) + \beta(v_2 \otimes w),$$

$$v \otimes (\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha(v \otimes w_1) + \beta(v \otimes w_2),$$

para $\alpha, \beta \in K$, $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$.

Es bien sabido que si $\{v_i\}_{i\in I}$ es una base de $V$ y $\{w_j\}_{j\in J}$ una base de $W$, entonces $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ es una base de $V \otimes W$.

Como corolario, si $v \otimes w = 0$ se tiene $v = 0$ o $w = 0$.

Sea $G$ un grupo, $K$ un cuerpo fijo y $V$, $W$ dos $K$-espacios vectoriales. Supongamos dadas sendas representaciones $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $(i = 1, 2)$. Entonces el producto de dichas representaciones es la nueva representación

$$\pi := \rho_1 \otimes \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

tal que $\pi(g)(v_1 \otimes v_2) := \rho_1(v_1) \otimes \rho_2(v_2)$, para cualesquiera $v_i \in V_i$.

# Producto tensorial de matrices

Sean $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $B \in M_q(K)$. Definimos $A \otimes B \in M_{nq}(K)$ como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}$$

Ejemplo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Entonces $A \otimes B$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{array}\right)$$

Esto permite definir el producto tensorial de representaciones en términos matriciales: Si $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}_{n_i}(K)$ son representaciones de $G$, entonces podemos definir el producto tensorial $\pi = \rho_1 \otimes \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}_{n_1 n_2}(K)$ de modo que

$$\pi(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g).$$

Con anterioridad, hemos definido la suma de representaciones de un grupo. Ahora acabamos de definir un producto de representaciones. Esto sugiere la posibilidad de definir una estructura de anillo en el conjunto de las representaciones de un grupo. Para formalizar esta idea consideremos fijado un cuerpo $K$ y un grupo $G$ finito. En el conjunto de todas las clases de isomorfía de representaciones finito-dimensionales de $G$ (lo que incluye las irreducibles), definiremos una estructura de anillo.

Si $A = KG$ y $M$, un $A$-módulo . representaremos por $[M]$ la clase de isomorfía de $M$:

$$[M] := \{N \in \mathrm{Obj}(A - \mathrm{mod})\colon N \cong M \text{ en } A\text{-mod}\}.$$

Dados dos $A$-módulos $M$ y $N$ podemos definir una suma

$$[M] + [N] := [M \oplus N].$$

Esta operación está bien definida tiene neutro $[0]$ y es asociativa y conmutativa. El conjunto de clases de isomorfía de $A$-módulos (f.d.) es un monoide conmutativo.

Ahora dado un monoide conmutativo $M$ existe una forma canónica de sumergirlo en un grupo (el grupo de Grothendieck de $M$). Dicho grupo es

$$\mathcal{G} := (M \times M)/\equiv$$

donde $(x, y) \equiv (s, t)$ si y solo si existe $k \in M$ tal que

$$x + t + k = y + s + k.$$

Sea $\overline{(m, n)}$ la clase de equivalencia del elemento $(m, n)$. La operación que da estructura de grupo a $\mathcal{G}$ es

$$\overline{(m, n)} + \overline{(s, t)} := \overline{(m + s, n + t)}.$$

Podemos representar las clases de equivalencia de $(m, n)$ de la forma $m - n$. Hay un monomorfismo de monoides $M \to G$ tal que $m \mapsto [(m, 0)] = m - 0$.

Tomemos pues el grupo de Grothendieck $\mathcal{G}$ del monoide de las clases de isomorfía de todos los $KG$-módulos de dimensión finita.

El lector de estas notas puede demostrar que el conjunto de clases de isomorfía de $A = KG$-módulos simples (equivalentemente, representaciones irreducibles de $G$) es una base como $\mathbb{Z}$-módulo de $\mathcal{G}$: dicho de otro modo $\mathcal{G}$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre con base las clases de isomorfía de representaciones irreducibles del grupo $G$.

## El anillo de representaciones de un grupo

Dado un grupo $G$ finito, el $\mathbb{Z}$-módulo libre $\mathcal{G}$ que tiene como base las clases de isomorfía de representaciones irreducibles se puede dotar de estructura de anillo. Para ello basta definir el producto de elementos de la base. Si $[\rho_1]$ y $[\rho_2]$ son dos clases siendo $\rho_1$ y $\rho_2$ irreducibles definimos

$$[\rho_1] \cdot [\rho_2] := [\rho_1 \otimes \rho_2].$$

Como $\rho_1 \otimes \rho_2$ es de grado finito, es suma directa (finita) de representaciones irreducibles.

El resto de comprobaciones de que $\mathcal{G}$ con este producto es un anillo (conmutativo) son consecuencia de las propiedades del producto tensorial.

## Problema

Determinar el anillo de representaciones del grupo $\Delta_3$.

$$\begin{aligned} 1\colon \Delta_3 &\to \mathbb{C}^* \\ s &\mapsto 1 \\ g &\mapsto 1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} u\colon \Delta_3 &\to \mathbb{C}^* \\ s &\mapsto -1 \\ g &\mapsto 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d\colon \Delta_3 &\to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\
s &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\
g &\mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$$1 \otimes 1 = 1 \qquad 1 \otimes u = u$$
$$u \otimes u = 1 \qquad 1 \otimes d = d$$

Calculamos $u \otimes d$.

$$(u \otimes d)(s) = -1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(u \otimes d)(g) = 1 \otimes \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$u \otimes d \colon \Delta_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

$$s \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Esta representación es isomorfa a $d$: la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ cumple

$$M\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}M^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$u\otimes d\cong d$$

Finalmente calculamos $d \otimes d$:

$$(d \otimes d)(s) = d(s) \otimes d(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d \otimes d)(g) = d(g) \otimes d(g) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Luego $d \otimes d$ viene dada por

$$s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := S$$

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =: G$$

Vamos a demostrar que

$$d \otimes d \cong 1 \oplus u \oplus d.$$

Definamos

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$Sv_1 = v_1, Gv_1 = v_1$, luego $\mathbb{C}v_1$ es $d \otimes d$-invariante.

$Sv_1 = v_1, Gv_1 = v_1$, luego $\mathbb{C}v_1$ es $d \otimes d$-invariante.
La restricción $d \otimes d \colon \Delta_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}v_1)$ es una irrep. isomorfa a 1.
$Sv_2 = -v_2, Gv_2 = v_2$, luego $\mathbb{C}v_2$ es $d \otimes d$-invariante.
La restricción $d \otimes d \colon \Delta_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}v_2)$ es una irrep. isomorfa a $u$.

$$Sv_3 = v_3, \quad Gv_3 = -\frac{1}{2}v_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_4$$

$$Sv_4 = -v_4, \quad Gv_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4.$$

El subespacio $\mathbb{C}v_3 \oplus \mathbb{C}v_4$ es $d \otimes d$-invariante.

La restricción $d \otimes d \colon \Delta_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{C}v_3 \oplus \mathbb{C}v_4)$ es isomorfa a $d$. Por lo tanto $d \otimes d \cong 1 \oplus u \oplus d$. En resumen, la tabla de multiplicar del anillo de representaciones de $\Delta_3$ es

| $\otimes$ | $[1]$ | $[u]$ | $[d]$ |
|---|---|---|---|
| $[1]$ | $[1]$ | $[u]$ | $[d]$ |
| $[u]$ | $[u]$ | $[1]$ | $[d]$ |
| $[d]$ | $[d]$ | $[d]$ | $[1]+[u]+[d]$ |

Este anillo es isomorfo al subanillo de $\mathbb{Z}^3$ dado por

$$\mathbb{Z}(1,1,1) \oplus \mathbb{Z}(-1,1,1) \oplus \mathbb{Z}(0,-1,2).$$

El isomorfismo es el inducido por

$$\begin{aligned} [1] &\mapsto (1,1,1) \\ [u] &\mapsto (-1,1,1) \\ [d] &\mapsto (0,-1,2). \end{aligned}$$