Representaciones de grupos finitos

Cándido Martín González

Universidad de Málaga

http://agt2.cie.uma.es/TR.htm

9 de noviembre de 2018

Representaciones

Sea K un cuerpo, V un K-espacio vectorial y A una K-álgebra. Consideremos la K-álgebra $\mathrm{End}_K(V)$ de las aplicaciones lineales $V \to V$ (con la suma de aplicaciones, la composición y el producto por escalares habitual). Si $r\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ es un homomorfismo de K-álgebras, diremos que r es una representación de A en el espacio V. La dimensión de V se llamará grado de la representación (también dimensión de la representación).

Fijada un álgebra A, podemos definir la categoría $\mathrm{Rep}(A)$ cuyos objectos son todas las posibles representaciones $r\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ y cuyos morfismos definimos a continuación.

Definición

Dadas dos representaciones $r_i\colon A \to \mathrm{End}_K(V_i)$ $(i = 1, 2)$ una aplicación lineal $f\colon V_1 \to V_2$ diremos que es un homomorfismo de r_1 a r_2 si para cada $a \in A$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "r_2(a)"] & V_2 \\ V_1 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "r_1(a)"'] & V_1 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

equivalentemente $f\ r_1(a) = r_2(a)\ f$ para cada $a \in A$. Una representación r se dice fiel si r es un monomorfismo.

Definición

Sea S un subespacio vectorial de un K-espacio V e $i\colon S \to V$ la inclusión. Sean $r'\colon A \to \mathrm{End}_K(S)$ y $r\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$ dos representaciones. Diremos que r' es una subrepresentación de r si la inclusión es un homomorfismo de r' a r en la categoría $\mathrm{Rep}(A)$.

Equivalentemente: el subespacio S es r-invariante, lo que quiere decir que $r(a)(S) \subset S$ para cada $a \in A$.

Dada una representación $r\colon A \to \mathrm{End}_K(V)$, con $V \neq 0$, diremos que es irreducible cuando los únicos subespacios r-invariantes de V son el propio V y 0. Esto es equivalente a afirmar que las únicas subrepresentaciones de r son ella misma y la trivial.

Definición

Sea A una K-álgebra (recordemos que $1 \in A$) y V un K-espacio vectorial. Diremos que V es un A-módulo (de forma más precisa un A-módulo a izquierda) si existe una aplicación $A \times V \to V$ tal que $(a, v) \mapsto av$ sujeta a:

1. La aplicación es bilineal.
2. $\forall a_1, a_2 \in A, \forall v \in V$, $a_1(a_2 v) = (a_1 a_2)v$.
3. $\forall v \in V$, $1v = v$.

Denotemos por A-mod la categoría cuyos objetos son los A-módulos y cuyos morfismos son los homomorfismos de A-módulos . Recordemos que si M y N son A-módulos una aplicación lineal $f\colon M \to N$ se dice que es un homomorfismo de A-módulos cuando

$$\forall a \in A, \forall m \in M, \quad f(am) = af(m).$$

Teorema

Existe un functor $F\colon \operatorname{Rep}(A) \to A-\operatorname{mod}$ tal que si $r \in \operatorname{Rep}(A)$ viene dada por $r\colon A \to \operatorname{End}_K(V)$, entonces $F(r) = V$ dotado de estructura de A-módulo con la operación $A \times V \to V$ dada por

$$am = r(a)(m)$$

para cada $a \in A$ y $m \in M$.

Teorema

Existe otro functor $G\colon A-\mathrm{mod} \to \mathrm{Rep}(A)$ tal que si M es un A-módulo entonces

$$G(M) = r\colon A \to \mathrm{End}_K(M)$$

viene dada por

$$r(a)(m) = am$$

para cada $a \in A$ y $m \in M$. Este G es el functor inverso de F en el sentido de que

$$GF = 1_{\mathrm{Rep}(A)}, \quad FG = 1_{A-\mathrm{mod}}.$$

Recordemos que si M y N son A-módulos con $M \subset N$, diremos que M es un submódulo de N cuando la aplicación de inclusión $i \colon M \to N$ es un homomorfismo de A-módulos . Un A-módulo $M \neq 0$ se dice simple si sus únicos A-submódulos son 0 y M.

En los functores

$$\mathrm{Rep}(A) \xrightarrow{F} A - \mathrm{mod} \xrightarrow{G} \mathrm{Rep}(A)$$

se cumple

1. $r \in \mathrm{Rep}(A)$ es irreducible $\Leftrightarrow$ $V = F(r)$ es una A-módulo simple.
2. M es un A-módulo simple $\Leftrightarrow$ $G(M) = r$ es una representación irreducible.

Representación regular

Dada una K-álgebra A, llamamos representación regular de A (por la izquierda) al homomorfismo de álgebras $L\colon A \to \mathrm{End}_K(A)$ tal que $a \mapsto L_a$ siendo $L_a\colon A \to A$ el operador de multiplicación por a a izquierda, es decir, $L_a(x) = xa$ para todo $x \in A$. El hecho de que L es un homomorfismo de K-álgebras obedece a que

$$L_{ab} = L_a L_b$$

para cualesquiera $a, b \in A$.

Si calculamos el núcleo de la representación regular $\ker(L) = \{a \in A\colon L_a = 0\}$ resulta que si $L_a = 0$ entonces $0 = L_a(1) = a$ luego L es un monomorfismo de álgebras.

Proposición

Toda álgebra asociativa (unital) se puede indentificar con una subálgebra de $\mathrm{End}_K(A)$. Si además $\dim(A) = n$ es finita, A se puede identificar con una subálgebra de $M_n(K)$.

Proposición

Toda álgebra asociativa (unital) se puede indentificar con una subálgebra de $\mathrm{End}_K(A)$. Si además $\dim(A) = n$ es finita, A se puede identificar con una subálgebra de $M_n(K)$.

Para la segunda parte téngase en cuenta que

$$\mathrm{End}_K(A) \cong M_n(K)$$

siendo un isomorfismo el que asocia a cada aplicación lineal $T : A \to A$, su matriz relativa a una base fijada de antemano.

Por lo tanto toda algebra asociativa unital de dimensión finita es (isomorfa a) una subálgebra del álgebra de matrices. Este es uno de los aspectos de la teoría de representaciones: el poder ver las álgebras como álgebras matriciales.

Vamos a explicitar la representación regular (a izq.) del álgebra $\mathbb{H}$. Para ello fijaremos la base $\{1, i, j, k\}$ de $\mathbb{H}$ tal que

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Sea $L\colon \mathbb{H} \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ entonces $L_1 = 1$ y su matriz es la identidad 4×4.

$$L_i\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad \begin{cases} L_i(1) = i & (0,1,0,0) \\ L_i(i) = -1 & (-1,0,0,0) \\ L_i(j) = ij = k & (0,0,0,1) \\ L_i(k) = ik = -j & (0,0,-1,0) \end{cases}$$

$$L_j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad \begin{cases} L_j(1) = j & (0,0,1,0) \\ L_j(i) = ji = -k & (0,0,0,-1) \\ L_j(j) = jj = -1 & (-1,0,0,0) \\ L_j(k) = jk = i & (0,1,0,0) \end{cases}$$

$$L_k\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H} \quad \begin{cases} L_k(1) = k & (0,0,0,1) \\ L_k(i) = ki = j & (0,0,1,0) \\ L_k(j) = kj = -i & (0,-1,0,0) \\ L_k(k) = kk = -1 & (-1,0,0,0) \end{cases}$$

Por lo tanto si llamamos $\theta\colon \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \to M_4(\mathbb{R})$ al isomorfismo que envía cada aplicación lineal a su matriz en la base $\{1, i, j, k\}$, la composición $r\colon = \theta L\colon \mathbb{H} \to M_4(\mathbb{R})$ actúa en la forma:

$$1 \mapsto I_4, \qquad i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto a un quaternión genérico $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ (con $a_n \in \mathbb{R}$) le corresponde

$$r(q) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

El determinante de esta matriz es $(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$ por lo tanto si la matriz es no nula, es inversible (otra forma de ver que $\mathbb{H}$ e un álgebra de división).

Una representación de A es un homomorfismo de K-álgebras $r\colon A \to \mathrm{End}_K(A)$ pero si A es de dimensión finita n, fijando una base, tenemos un isomorfismo $\mathrm{End}_K(A) \cong M_n(K)$. Componiendo r con este isomorfismo obtenemos un homomorfismo de K - álgebras $r'\colon A \to M_n(K)$. Esto justifica que podemos definir una representaci on (matricial) de la K - álgebra A como un homomorfismo $r'\colon A \to M_n(K)$.

Sea V un K-espacio vectorial y denotemos por $\mathrm{GL}(V)$ el grupo de todas las aplicaciones lineales inversibles $T\colon V \to V$. Cuando V es dimensión finita n tenemos un isomorfimos $\theta\colon \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(K)$ siendo este ultimo el grupo de matrices inversibles $n \times n$ con coeficientes en K. Fijada una base de V, el isomorfismo actúa asociando a cada T su matriz en la base fijada.

Una representaci on de G en el espacio V no es más que un homomorfismo de grupos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. La dimensi on de V se llama el grado de la representación y V se dice que es el espacio de la representaci on. Si V es de dimensión finita, también podemos decir que una representación de G es el homomorfismo de grupos $\rho'\colon G \to \mathrm{GL}_n(K)$ donde $\rho' = \theta\rho$.

Fijado un grupo G, podemos considerar la categoría $\mathrm{Rep}_K(G)$ cuyos objetos son todas las representaciones de G en un K-espacio vectorial. Por otra parte dadas dos representaciones de $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$, $(i = 1, 2)$, diremos que $f \colon V_1 \to V_2$ es un morfismo de ρ_1 a ρ_2 cuando para todo $g \in G$, commute el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2 \\ V_1 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\rho_1(g)"'] & V_1 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

equivalentemente $f\ \rho_1(g) = \rho_2(g)\ f$.

Si S es un K-subespacio de V y tenemos dos representaciones $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho'\colon G \to \mathrm{GL}(S)$, diremos que ρ' es una subrepresentaci on de ρ cuando la inclusi on $i\colon S \to V$ sea un morfismo de ρ' a ρ. Esto equivale a afirmar que S es ρ-invariante (i.e. $\rho(g)(S) \subset S$ para todo $g \in G$). Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ con $V \neq 0$ se dice irreducible si las unicas subrepresentaciones de ρ son la trivial y la propia ρ .

Sea G un grupo y M un K-espacio vectorial. Diremos que M es un G-módulo si existe una aplicación

$$G \times M \to M, \quad (g, m) \mapsto gm,$$

verificando:

1. $g(m_1 + m_2) = gm_1 + gm_2$,
2. $g(\lambda m) = \lambda gm$,
3. $g_1(g_2 m) = (g_1 g_2)m$,
4. $1m = m$,

con $g, g_1, g_2 \in G$, $m, m_1, m_2 \in M$, $\lambda \in K$.

Si M y N son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y además son G-módulos , una aplicación $f\colon M \to N$ se dice que es un homomorfismo de G-módulos si es K-lineal y cumple

$$f(gm) = gf(m)$$

para cada $m \in M$, $g \in G$. Ahora, fijado un cuerpo base K, podemos definir la categoría G-mod$_K$ cuyos objetos son todos los G-módulos (que son K-espacios vectoriales) y cuyos morfismos son los homomorfismos de G-módulos .

Si M y N son objetos de G-mod$_K$ y $M \subset N$, diremos que M es un G-submódulo de N si la inclusión de M en N es un homomorfismo de G-módulos . Un G-módulo no nulo M diremos que es simple si sus únicos submódulos son el trivial y él mismo. Por otra parte si M_1 y M_2 son elementos de G-mod$_K$ se define su suma directa como el K-espacio vectorial $M_1 \oplus M_2$ con estructura de G-módulo :

$$g(m_1 + m_2) := gm_1 + gm_2$$

para $g \in G$, $m_i \in M_i$, $(i = 1, 2)$.

Teorema

Existe un functor $F\colon \operatorname{Rep}_K(G) \to G-\operatorname{mod}_K$ tal que dada $\rho\colon G \to GL(V)$ se tiene $F(\rho) = V$ dotado de estructura de G-módulo con la aplicación $G \times V \to V$ tal que $gv = \rho(g)(v)$. Existe un functor $H\colon G-\operatorname{mod}_K \to \operatorname{Rep}_K(G)$ tal que a cada G-módulo M le corresponde la representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(M)$ tal que $\rho(g)(m) = gm$. Además

$$FH = 1_{G-\operatorname{mod}_K}, HF = 1_{\operatorname{Rep}_K(G)}.$$

En el anterior isomorfismo de categorías, las representaciones irreducibles se corresponden con los G-módulos simples. Dadas dos representaciones de $\mathrm{Rep}_K(G)$:

$$\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i), (i = 1, 2),$$

podemos definir su suma directa

$$\rho_1 \oplus \rho_2 \colon G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2)$$

como la representación tal que $(\rho_1 \oplus \rho_2)(g)(v_1 + v_2) := \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)v_2$ para cada $g \in G$, $v_i \in V_i$, $i = 1, 2$.

Sean $\rho_i \colon G \to \mathrm{GL}(V_i)$, con $i = 1, 2$ dos representaciones de $\mathrm{Rep}_K(G)$. El functor $F \colon \mathrm{Rep}_K(G) \to G-\mathrm{mod}_K$ verifica

$$F(\rho_1 \oplus \rho_2) = V_1 \oplus V_2$$

es decir, transforma suma directa de representaciones en suma directa de G-módulos . El functor H inverso de F actúa transformando sumas directas de G-módulos en sumas directas de representaciones.

Recordatorio de algunas consecuencias de la teoría de Wederburn-Artin:
(1) Si D es una K - álgebra de división de dimensión finita y $A = M_n(D)$, el único A-módulo simple (salvo isomorfismos) es D^n y la estructura de A-módulo es la can onica $A \times D^n \to D^n$, $(M, v) \mapsto Mv$ donde $\forall M \in A$, $\forall v \in D^n$ (representado como vector columna), Mv es la multiplicación matricial considerando a v como una matriz $n \times 1$.

(2) Si $A = M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(D_q)$, donde las D_i son K-álgebras de división finito-dimensionales, entonces salvo isomorfismo, los unicos A-módulos simples son los correspondientes $D_i^{n_i}$ y dos cualesquiera de ellos son no isomorfos como A-módulos .

$$\dim(A) = n_1^2 + \cdots + n_q^2.$$

Por lo tanto las representaciones irreducibles de un álgebra semisimple A, son las asociadas a los A-módulos simples (todo salvo isomorfismo). Esto quiere decir que todas ellas aparecen en la descomposición de A como suma de álgebras simples.

Recordemos que un conjunto completo de representaciones irreducibles S de un álgebra A, se define como un conjunto de representaciones irreducibles no isomorfas dos a dos y tales que cualquier representación irreducible de A es isomorfa a alguna de S. Si seleccionamos un conjunto completo de representaciones irreducibles de un álgebra semisimple finito-dimensional A, la dimensión de A coincide con la suma de los cuadrados de los grados de dichas representaciones irreducibles.