EJERCICIOS DEL CAPÍTULO I

1. Un grupo es una tipo particular de Ω estructura cuando Ω es el tipo $\Omega = \{*\}$ siendo $*$ una operación de aridad dos. Pero un grupo también es una Ω'-estructura siendo $\Omega' = \{e, i, *\}$ donde e es de aridad cero, i de aridad 1 y $*$ de aridad dos. Demuéstrese que cada Ω'-subálgebra de un grupo es un subgrupo pero que no toda Ω-subálgebra (no vacía) de un grupo es necesariamente un subgrupo. Sugerencia: para un tipo operacional T y una T-estructura dada A, diremos que un subconjunto B de A es una T-subestructura cuando B es una T-estructura tal que la inclusión de B en A es un homomorfismo de T-estructuras.

2. Describir el álgebra libre $F_\Omega(X)$ en los siguientes casos:
- Ω solo tiene una operación unaria y X es de cardinal uno.
- Ω es el conjunto vacío y X cualquier conjunto.
- Ω tiene solo una operación binaria y X cardinal uno.

Demuéstrese que si Ω consiste en una operación de aridad cero y otra de aridad dos y $X = \emptyset$, entonces $F_\Omega(X)$ es numerable. Demuéstrese que si Ω es finito o numerable y contiene al menos una operación de aridad cero y otra de aridad $t > 0$, y X es finito o numerable, entonces $F_\Omega(X)$ es numerable.

3. Sea $\Omega = \{e, m\}$ un tipo en el que e es de aridad 0 y m de aridad 2.Supongamos que E está formado por las ecuaciones $mex = x$ y $mxe = x$. Consideremos un conjunto A que es modelo para dos (Ω, E) estructuras $\{e^i, m^i\}$ $(i = 1, 2)$ tales que las operaciones de la segunda estructura son Ω-homomorfismos $1 \to A$ y $A \times A \to A$ para la primera. Demuéstrese que A satisface las ecuaciones $e_1 = e_2$ y $m^1m^2xzm^2yt = m^2m^1xym^1zt$. Deducir que $m^1 = m^2$ y que m^1 es asociativa y conmutativa.

Sugerencia: El hecho de que las operaciones de la segunda Ω-estructura sean homomorfismos para las de la primera hay que interpretarlo como la conmutatividad de los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
(A \times A) \times (A \times A) \arrow[r, "m^1_{A\times A}"] \arrow[d, "m^2_A \times m^2_A"'] & A \times A \arrow[d, "m^2_A"] \\
A \times A \arrow[r, "m^1_A"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times 1 \arrow[r, "1\times 1"] \arrow[d, "e^2_A \times e^2_A"'] & 1 \arrow[d, "e^2_A"] \\
A \times A \arrow[r, "m^1_A"'] & A
\end{tikzcd}.$$

Hay que tener en cuenta que $m^2_A : A^2 \to A$ solo puede homomorfismo de la Ω-álgebra A^2 a la Ω-álgebra A y análogamente para e^2_A.

4. Sea E un conjunto de igualdades en el tipo operacional Ω. La clase de todas las Ω-álgebras que satisfacen las igualdades de E se llamará la *variedad de Ω-álgebras definidas por E*. Demuéstrese que la clase de todos los grupos abelianos es una variedad. Análogamente demuéstrese que la clase de todos los espacios vectoriales sobre un cuerpo dado es una variedad. Demuéstrese que fijado un anillo conmutativo dado S (con unidad), la clase de todos anillos conmutativos R que contienen a S como subanillo forman un variedad.

5. ¿Es la clase de los grupos finitos una variedad?

6. Dada una variedad definida por un conjunto de igualdades E de un tipo operacional Ω, llamaremos *álgebra libre de la variedad con conjunto de generadores* X al al álgebra $F_{(\Omega,E)}(X)$. Demuéstrese que cada espacio vectorial sobre un cuerpo F es un álgebra libre de la variedad de todos los espacios vectoriales sobre F.

7. Si $T = (\Omega, E)$ es la teoría algebraica de grupos, pruébese que

$$(i\ m\ x_1\ x_2\ =\ m\ i\ x_2\ i\ x_1) \in \tilde{E}$$

sin usar el corolario 1.5, esto es, obteniendo directamente tal identidad a partir de E mediante la aplicación de las reglas b) y c) de construcción de $\tilde{E}$. Indicación: dése primero una prueba de que todo grupo satisface $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, y tradúzcase el razonamiento en términos de generación de identidades derivadas a partir de las primitivas

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO II

8. Compruébese que las proposiciones
1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
2) $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$, y
3) $\neg\neg p \Rightarrow p$,

son tautologías.

9. En el conjunto $2 = \{0, 1\}$ se definen las operaciones $\neg a = 1 - a$, $a \wedge b := \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$ y $a \Rightarrow b := 0$ si y sólo si $a = 1$ y $b = 0$. Escríbanse estas operaciones en términos de la multiplicación que dota a 2 de estructura de cuerpo (isomorfo al de los enteros módulo dos).

10. Demuestrese que $\{p, \neg q \Rightarrow \neg p\} \models q$ para cualesquiera proposiciones p y q.

11. Sea $P(X)$ el álgebra de las proposiciones construida sobre el conjunto de variables X. Para cada subconjunto $A \subset P(X)$ definamos

$$\mathrm{Con}(A) := \{p \in P(X) \colon A \models p\}.$$

Demuéstrese que:
i) $A \subset \mathrm{Con}(A)$ para todo A.
ii) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \mathrm{Con}(A_1) \subset \mathrm{Con}(A_2)$ para cualesquiera A_1 y A_2.
iii) $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(A)) = \mathrm{Con}(A)$, para todo A.

12. Encuéntrese una demostración de $p \Rightarrow r$ a partir del conjunto de premisas

$$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\}.$$

13. Sea $P(X)$ el álgebra de proposiciones sobre el conjunto de variables X. Consideremos la inclusión canónica $i_X : X \to P(X)$. Demuéstrese que si $\phi : X \to Y$ es una aplicación, entonces existe un único homomorfismo de álgebras $\bar{\phi} \colon P(X) \to P(Y)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_X"] \arrow[dr, "i_Y \phi"'] & P(X) \arrow[d, dotted, "\bar{\phi}"] \\ & P(Y) \end{tikzcd}$$

Sea $A \subset P(X)$ y $\omega \in P(X)$. Demuéstrese que
1) $A \vdash \omega$ implica $\phi(A) \vdash \phi(\omega)$.
2) $A \models \omega$ implica $\phi(A) \models \phi(\omega)$.

14. Definamos para cada $A \subset P(X)$ (notaciones como en el problema anterior). Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de axiomas del cálculo proposicional, es decir, el conjunto de todas las proposiciones que aparecen en el Problema 8. Definamos $\mathrm{Ded}(A) := \{p \in P(X) \colon A \vdash p\}$. Demuéstrese que $\mathrm{Ded}(A)$ es el menor subconjunto D de $P(X)$ tal que $D \supset A \cup \mathcal{A}$ y tal que si p y $p \Rightarrow q$ son elementos de D, entonces también $q \in D$.

15. Dado un conjunto arbitrario X, compruébese que la familia P de todos los subconjuntos de X es un álgebra de Boole con las interpretaciones de las operaciones primitivas

$$\perp_P = \emptyset \quad \text{y} \quad A \Rightarrow_P B = (X - A) \cup B.$$

Así mismo, dense las interpretaciones del resto de operaciones derivadas $\top_X$, $\neg_X$, $\wedge_X$, $\vee_X$ y $\Leftrightarrow_X$.

16. La mayoría de los tratados elementales de matemáticas definen un álgebra de Boole como un retículo distributivo y complementario. Se recuerda que un *retículo* es un conjunto X provisto de un orden $\leq$ tal que para cada par de elementos $x, y \in X$ existen el supremo y el ínfimo, que se suelen denotar por $x \vee y$ y $x \wedge y$. Esta circunstancia permite considerar a X como provisto de las operaciones binarias $\wedge$ y $\vee$. De un retículo se dice que es *distributivo* si se satisfacen las dos propiedades distributivas de cada una de las operaciones binarias respecto de la otra. Por *retículo completo* se entiende a un retículo X con un máximo

M y un mínimo m y satisfaciendo la propiedad de que para cada elemento x de X existe un $\bar{x} \in X$ (el *complementario* de x) tal que $x \wedge \bar{x} = m$ y $x \vee \bar{x} = M$. Demuéstrese que esta definición es equivalente a la dada en el capítulo I.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO III

17. Formúlense conjuntos de axiomas en convenientes lenguajes de primer orden (especifíquense estos) para cada una de las siguientes teorías:
i) La teoría de los dominios de integridad.
ii) La teoría de los cuerpos algebraicamente cerrados de característica 0.
iii) La teoría de los conjuntos parcialmente ordenados.
iv) La teoría de los conjuntos parcialmente ordenados con elemento máximo y elemento mínimo.
v) La teoría de los cuerpos ordenados.
vi) La teoría de los cuerpos ordenados completos.
vii) La teoría de los grupos de orden 168.
viii) La teoría de los grupos simples de orden 168.
ix) La teoría de los planos afines (rudimentarios).

18. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden que contiene un predicado binario ϕ_r para cada real positivo r. El $\mathcal{L}$ se define la teoría T por medio de los axiomas:
$(\forall x, y)(\phi_0(x,\ y)\ \Leftrightarrow\ (x\ =\ y))$,
$(\forall x, y)(\phi_r(x,\ y)\ \Rightarrow\ \phi_s(y,\ x))$, para cada par de reales positivos (r, s) con $r \leq s$.
$(\forall x, y, z)((\phi_r(x,\ y)\ \wedge\ \phi_s(y,\ z))\ \Rightarrow\ \phi_{r+s}(x,\ z))$, para cada $r, s \in \mathbb{R}^+$.
Demuéstrese que cada espacio métrico (X, d) constituye un T–modelo si se interpreta $\phi_r(a,\ b)$ como $d(a,\ b) \leq r$. ¿Cada T–modelo proviene de un espacio métrico en el sentido anterior?

19. a) Defínase la noción de *subestructura* de una $\mathcal{L}$–estructura.
b) Demuéstrese que si B es una subestructura de una $\mathcal{L}$–estructura A y p es una fórmula del lenguaje sin cuantificadores en n variables libres, entonces

$$[p]_B\ =\ [p]_A\ \cap\ B^n.$$

Indicación: si no se resuelve esto con facilidad, es porque uno se ha complicado la vida en el apartado (a).
c) Considerando el centro de un grupo, o el de un álgebra, o de cualquier otra manera, pruébese que la conclusión de (b) puede fallar si p tiene cuantificadores.

20. a) Por teoría de primer orden *universal* se entiende a aquella cuyos axiomas cobran la forma $(\forall \vec{x})p$, con p una fórmula sin cuantificadores y $\vec{x}$ una cadena finita (tal vez vacía) de nombres de variables separados por comas. Pruébese que las teorías universales tienen la gracia de que cada subestructura de un T–modelo es, así mismo, un T–modelo.
b) De una teoría de primer orden T se dice que es *inductiva* si sus postulados responden al esquema $(\forall \vec{x})(\exists \vec{y})p$, con p una fórmula libre de cuantificadores. Para una teoría inductiva T, supóngase que una estructura A del lenguaje se obtiene como unión de una cadena $\{B_i\}_{i \in I}$ de subestructuras. Demuéstrese que A es un T–modelo si cada B_i es un T–modelo.
c) ¿Cuáles de las teorías del ejercicio 3.1 son universales?, ¿Cuáles inductivas?

21. a) Dado un lenguaje de primer orden $\mathcal{L} = (\Omega, \Pi)$, denótese por $\mathcal{L}^* = (\emptyset, \Pi^*)$ el lenguaje obtenido de $\mathcal{L}$ mediante la supresión de los símbolos de operación de Ω y el añadido de un símbolo de predicado ω^* por cada $\omega \in \Omega$, haciendo $\alpha(\omega^*) = \alpha(\omega) + 1$.
Si T es una teoría de primer orden escrita en el lenguaje $\mathcal{L}$, explíquese cómo construir una teoría T^* en $\mathcal{L}^*$ equivalente a T en el sentido de tener los mismos modelos.
b) Aplíquese el método anterior a la teoría de primer orden de los grupos y a la de los conjuntos ordenados con elemento mínimo.

22. a) Demuéstrese que las sentencias $(\forall x, y)((x\ =\ y)\ \Rightarrow\ (y\ =\ x))$ y

$(\forall x, y, z)((x = y) \Rightarrow ((y = z) \Rightarrow (x = z)))$ son teoremas del cálculo de predicados con igualdades.

b) Compruébese que $s \sim t$ si y solo si $S \vdash (s = t)$ define una relación de equivalencia en el conjunto A de los términos constantes de una teoría completa, consistente y con certificados S.

23. Demuéstrese que la teoría de primer orden T cuyo único axioma consiste en

$$(\forall x)\neg(x = x)$$

es consistente si y solo si el lenguaje $\mathcal{L}$ en que está escrita no tiene constantes. Bajo la suposición de que T es consisente y $\mathcal{L}$ no contenga predicados primitivos 0–arios, pruébese que T es completa y posee certificados.

24. Sea T una teoría de primer orden en un lenguaje numerable que solo tiene modelos infinitos. Demuéstrese que T es completa si T es categórica en cardinal $\aleph_0$.

25. De un conjunto se dice que es *totalmente ordenado denso* si hay definida en él una relación binaria $<$ tal que se dan las siguientes condiciones:

i) Para todo x, y se verifica una y solo una de las relaciones $x < y$, $x = y$ o $y < x$.

ii) Si $x < y$, $y < z$, entonces $x < z$.

iii) Si $x < y$, existe un z tal que $x < z$, y $z < y$.

iv) Para cada x existen y, z con $y < x$ y $x < z$.

a) Descríbase la teoría de primer orden T de los conjuntos totalmente ordenados densos.

b) Demuéstrese que cualesquiera dos conjuntos totalmente ordenados densos de cardinal $\aleph_0$ son isomorfos. Indicación: numérense los conjuntos y establézcase entre ellos de forma inductiva una aplicación que conserve el orden. La sobreyectividad se probará usando la propiedad de que toda parte no vacía de $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento.

c) Pruébese que T es consistente. Bastará con encontrar un modelo.

d) ¿Es T completa? El ejercicio anterior puede proporcionar la respuesta.

26. Supóngase que una teoría de primer orden T en un lenguaje (Ω, Π) tiene una teoría algebraica subyacente (Ω, E), esto es, la clausura universal de cada identidad primitiva $(s = t) \in E$ es un axioma de T.

Pruébese que la clausura universal de las identidades derivadas de $\tilde{E}$ (teorema 1.4) son demostrables en la teoría T.

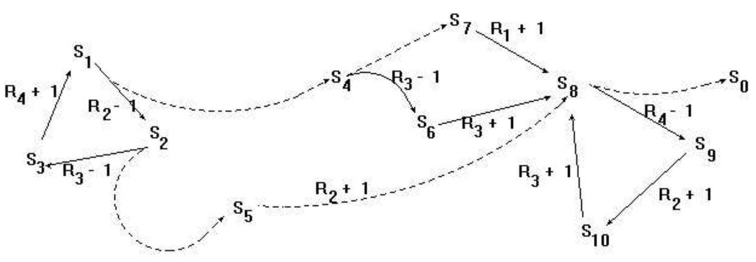
27. Demuéstrese que las sentencias $(\forall x, y, z)(a\ x\ a\ y\ z = a\ a\ x\ y\ z)$ y $(\forall x, y)(a\ x\ y = a\ y\ x)$ son deducibles de la aritmética de Peano. Indicación: la conmutatividad requiere de más trabajo que la asociatividad. Recúrrase a la conclusión del ejercicio anterior cada vez que haga falta.

28. Sea T la teoría de primer orden de los cuerpos ordenados completos (ejercicio 3.1.vi)). Demuéstrese que cada T–modelo es un cuerpo cerrado real, esto es, un cuerpo ordenado en el que cada elemento positivo tiene raíz cuadrada.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO IV

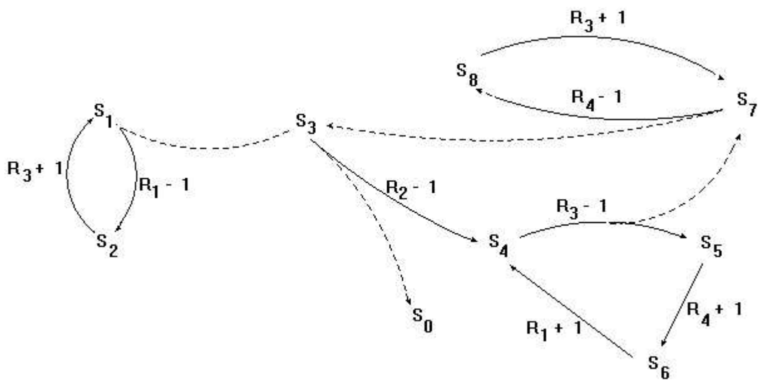
29. Descríbase el funcionamiento de los siguientes programas:

(a)



con datos de entrada $(0, n_2, n_3, 0, 0, \ldots)$.

(b)



con datos de entrada $(n_1, n_2, 0, 0, \ldots)$.
(c) (1, -, 2, 4), (3, +, 3), (4, +, 1), (2 ,- ,5, 7), (5, +, 6), (6, +, 4),
(3, -, 8, 9), (5, -, 7, 16), (5, -, 10, 18), (5, +, 11), (4, -, 12, 14),
(7, +, 13), (3, +, 11), (7, -, 15, 17), (4, +, 14), (6, -, 17, 0), (2, +, 16),
(4, -, 19, 20), (1, +, 18), (1, +, 16),
con datos de entrada $(n_1, n_2, 0, 0, \ldots)$.

30. Escríbanse sendos programas para máquina de registros los cuales, dada la entrada $(n, 0, 0, \ldots)$, devuelvan los siguientes resultados:
(a) $n^2 - 5n + 2$ si este polinomio toma un valor no negativo. El programa debe no finalizar en otro caso.
(b) El $(n+1)$–ésimo número primo p_n.

31. Demuéstrese sucesivamente que las siguientes funciones son recursivas primitivas:
(a) $f_1(n) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
(b) $f_2(n) \;=\;$ resto de dividir n entre 2.
(c) $f_3(n) \;=\;$ parte entera de $n/2$.
(d) $f_4(n) \;=\; \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
(e) $f_5(n, m) \;=\; \begin{cases} n/2^m & \text{si este valor es un entero} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
(f) $f_6(n) \;=\;$ exponente de la mayor potencia de 2 que divide a n, si $n > 0$, y $f_6(0) \;=\; 0$.
Recuérdese que este ejercicio se dio por válido a fin de apoyar la demostración del teorema 4.2, por lo que está prohibido recurrir a tal resultado para resolverlo.

32. Si $E \subset \mathbb{N}$ es un conjunto no vaco recursivamente enumerable, pruébese que existe una función recursiva globalmente definida con E como rango de valores. Indicación: Es crucial la hipótesis de que E contenga al menos un elemento.

33. Demuéstrese que un subconjunto infinito E de $\mathbb{N}$ es recursivo si y solo si existe una función recursiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ globalmente definida y estrictamente creciente que tiene a E como conjunto de valores.

34. Pruébese que la inversa f^{-1} de una biyección $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ recursiva es también recursiva.

EJERCICIOS DEL CAPÍTULO V

35. Pruébese que la suma y el producto de números naturales de von-Neumann son funciones ZF–definibles en un modelo V de ZF.