Álgebras no asociativas

Cándido Martín González
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Málaga, 29080 Málaga

14 de septiembre de 2003

Capítulo 1

Sumas de cuatro cuadrados.

Esta relación de problemas está dedicada a las aplicaciones de los cuaterniones enteros (para ampliar conocimientos puede consultarse la referencia [1]). Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de cuaterniones reales de división y D el conjunto de todos los cuaterniones enteros, es decir, el conjunto formado por los $\lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$ tales que o bien todos los λ_i son enteros, o bien todos ellos son de la forma $\frac{2k+1}{2}$. En los problemas sucesivos se pide demostrar que $\mathbb{Z}$ se puede considerar un subanillo de D. Supondremos pues de ahora en adelante que $\mathbb{Z}$ está contenido en D.

Problema 1 *Demuéstrese que D es un anillo no conmutativo que contiene una copia de $\mathbb{Z}$ (un subanillo isomorfo a $\mathbb{Z}$).*

Problema 2 *Demuéstrese que para cada cuaternión $q \in D$, su norma $N(q)$ es un entero. Recordemos que las 'unidades' de un anillo son por definición los elementos inversibles del mismo. Demuéstrese que $\alpha \in D$ es una unidad si y sólo si $N(\alpha) = 1$. Calcúlense explícitamente las unidades de D.*

Problema 3 *Sea $\alpha \in D$ tal que sus coordenadas respecto a la base $\{1, i, j, k\}$ no son enteras, demuéstrese que $\alpha = \beta + \gamma$ donde los coeficientes de β son pares, y $\gamma = \frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$. Demuéstrese que $\alpha\overline{\gamma}$ es un asociado de α que tiene coordenadas enteras.*

Problema 4 *Supóngase conocido el resultado según el cual para todo primo $p \in \mathbb{Z}$, dicho elemento nunca es primo visto como elemento de D (véase [1]). A partir de este resultado, demuéstrese que p es suma de cuatro cuadrados (se debe entender que es suma de cuatro cuadrados en $\mathbb{Z}$):*

1. *Como $p = xy$ para dos no-unidades $x, y \in D$, se tiene $p^2 = N(p) = N(x)N(y)$. Deducir que $p = N(x) = N(y)$.*
2. *Demuéstrese que en la descomposición anterior $p = xy$, alguno de los elementos x o y pueden elegirse con coordenadas enteras.*
3. *Como $p = N(x) = N(y)$ se tiene trivialmente que p es suma de cuatro cuadrados en $\mathbb{Z}$.*
4. *Demuéstrese que en $\mathbb{Z}$, todo elemento es suma de cuatro cuadrados. Para ello se puede usar la fórmula $N(xy) = N(x)N(y)$ que se puede interpretar en D diciendo que la multiplicación es operación interna en el conjunto de todas las sumas de cuatro cuadrados.*

Un plano no pappiano.

Para esta sección puede consultarse la referencia [3]. Se define un plano afín como una pareja (Π, Δ) donde Π es un conjunto cuyos elementos llamaremos 'puntos' y Δ una familia de partes de Π (a cada una de las cuales llamaremos 'recta') tales que:

1. Para cada par de puntos $P, Q \in \Pi$ distintos, existe una única recta $r \in \Delta$ tal que $P, Q \in r$.

2. Dada una recta l y un punto P que no pertenezca a l existe una única recta que pasa por P y tiene intersección vacía con l.

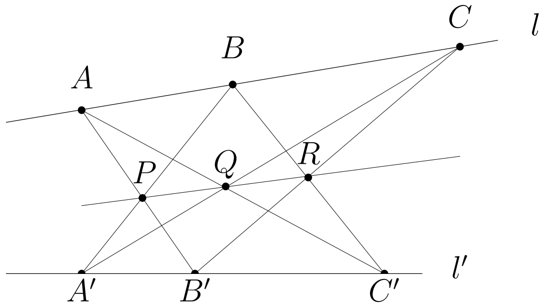
3. Existen tres puntos no alineados (es decir, no contenidos los tres en una recta).

Problema 5 *Pruébese que si D es un anillo de división, entonces definiendo $\Pi = D \times D$ y Δ como el conjunto de 'rectas'*

$$r_{abcd} := \{(x, y) \in D \times D : (x, y) = (a, b) + \lambda(c, d)\}$$

con $(a, b), (c, d) \in D \times D$,(siendo (c, d) no nulo), $\lambda \in D$, entonces la pareja (Π, Δ) es un plano afín en el sentido de la definición anterior.

Un plano afín (Π, Δ) se dice que satisface la propiedad de Pappus si dadas dos rectas $l, l' \in \Delta$ diferentes, tres puntos $A, B, C \in l - l'$, otros tres $A', B', C' \in l' - l$, entonces los puntos $P := AB' \cap A'B$, $Q = AC' \cap A'C$, y $R = BC' \cap B'C$ (en caso de existir) son colineales.



Problema 6 *Demuéstrese que el plano afín definido como en el problema anterior tomando en vez de un anillo de división, un cuerpo (por tanto conmutativo), es un plano que satisface la propiedad de Pappus.*

Problema 7 *Demuéstrese que el plano afín que se obtiene tomando $D = \mathbb{H}$ en el problema 5 es un plano afín que no satisface la propiedad de Pappus.*

Capítulo 2

Problema 8 *Compruébese que si un álgebra A es asociativa, alternativa o Jordan, entonces su unitazada A_1 lo es. ¿Qué problema hay con las álgebras de Lie?*

Problema 9 *Formalícense las definiciones de álgebra asociativa (alternativa o de Jordan) libre con unidad.*

Problema 10 *Demuéstrese que el álgebra de cuaterniones reales de división* $\mathbb{H}$ *es un cociente del álgebra asociativa libre con unidad, generada por un conjunto* X *de cardinal dos. Descríbase el ideal* I *tal que* $\mathbb{H} \cong \mathcal{A}ss_1(X)/I$.

Indicación. Un sistema de generadores de $\mathbb{H}$ como álgebra sobre los reales es el conjunto $\{i, j\}$. Consideremos entonces el conjunto $X = \{x, y\}$ y la aplicación $\varphi : X \to \mathbb{H}$ tal que $x \mapsto i$, $y \mapsto j$. La propiedad universal del álgebra asociativa libre con unidad nos proporciona la existencia de un único homomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras $F : \mathcal{A}ss_1(X) \to H$ tal que $F(x) = i$, $F(y) = j$. El lector deberá demostrar que F es un epimorfismo. En consecuencia $\mathbb{H} \cong \mathcal{A}ss_1(X)/I$ donde $I := \ker(F)$. Entre los elementos de I obviamente figuran las palabras $x^2 + 1$, $y^2 + 1$, $xy + yx$ de $\mathcal{A}ss_1(X)$. El lector deberá demostrar que de hecho I es el ideal generado por estos tres elementos. Para ello podemos definir en principio I' como el ideal generado por esos tres elementos

$$I' =< x^2 + 1, y^2 + 1, xy + yx > .$$

Obviamente $I' \subset I$. Para demostrar la igualdad observaremos que I no contiene palabras en x e y de nivel uno (es decir, elementos del tipo $\alpha x + \beta y$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Sea entonces $w(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta yx$ un elemento de nivel dos de I (como siempre las letras griegas representan escalares) . Demostraremos que $w(x, y) \in I'$ del siguiente modo: dado que

$$0 = F(w(x, y)) = \alpha i^2 + \beta j^2 + \gamma ij + \delta ji = -(\alpha + \beta) + (\gamma - \delta)k$$

tendremos $\alpha = -\beta$, $\gamma = \delta$. Por tanto

$$w(x, y) = \alpha(x^2 - y^2) + \delta(xy + yx) = \alpha[(x^2 + 1) - (y^2 + 1)] + \delta(xy + yx) \in I'.$$

Finalmente supóngase que todas las palabras de nivel menor que n de I están en I' y demuéstrese para las de nivel n.

Problema 11 (Construcción del álgebra de octoniones reales de división). *Sea* $X = \{x, y, z\}$ *y consideremos la* $\mathbb{R}$*-álgebra alternativa libre con unidad generada por* X *(denotada* $\mathcal{A}lt_1(X)$*). Consideremos el ideal* I *de* $\mathcal{A}lt(X)$ *generado por los elementos* x^2+1, y^2+1, z^2+1, $xy+yx$, $xz + xz$, $yz + zy$. *Demuéstrese que* $\mathcal{A}lt_1(X)/I$ *tiene dimensión ocho y complétese la tabla de multiplicar de este álgebra (defínase* $t := xy$, $u := zx$, $v = zy$, $w = zt$ *y compruébese que las clases de equivalencia de los elementos del conjunto* $\{1, x, y, t, z, u, v, w\}$ *son una base cuya tabla de multiplicar se pide calcular).*

Indicación. Partamos de la igualdad

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} + \alpha_3 \bar{t} = 0 + \alpha_4 \bar{z} + \alpha_5 \bar{u} + \alpha_6 \bar{v} + \alpha_7 \bar{w} = 0,$$

donde los α_i son reales. Esto quiere decir que la combinación lineal correspondiente sin clases de equivalencia es un elemento de I. Utilizando entonces la propiedad universal del álgebra alternativa libre demuéstrese que los escalares λ_i deben ser nulos. Así tenemos que las clases de equivalencia del conjunto dado son linealmente independientes. Para ver que son un sistema de generadores hay que demostrar que toda palabra de $\mathcal{A}ss_1(X)$ es combinación lineal de $1, x, y, t, z, u, v$, o w módulo I. Empecemos por las palabras de nivel dos en x, y, z. Así por ejemplo

$x^2 = -1 + (x^2 + 1) \in -1 + I$ (análogo para y^2, z^2).

$xy = t$, $yx = -t + (xy + yx) \in -t + I$.

$xz = -u + (zx + xz) \in -u + I$, $zx = u$.

$yz = -v + (zy + yz) \in -v + I$, $zy = v$.

Por lo tanto todas las palabras de nivel dos de $\mathcal{A}ss_1(X)$ se expresan (módulo I) como combinaciones lineales de los elementos indicados. Invitamos al lector a suponer que todas las palabras de nivel menor que n son (módulo I) combinaciones lineales de los elementos del conjunto $\{1, x, y, t, z, u, v, w\}$, y a demostrar que entonces toda palabra de nivel n también lo es. Dejamos al lector la nada trivial tarea de construir la tabla de multiplicar de este álgebra.

Capítulo 3

Esta sección de problemas va a estar dedicada a la descomposición de Peirce y al proceso de Cayley-Dickson.

Problema 12 *Sea A un álgebra alternativa con unidad y $1 = e_1 + \cdots + e_n$ una descomposición de la unidad como suma de idempotentes ortogonales no nulos. Demuéstrese que si se descompone A con relación al idempotente e_1 en la forma $A = A'_{11} + A'_{10} + A'_{01} + A'_{00}$ se tienen las relaciones: $A'_{11} = A_{11}$, $A'_{10} = \oplus_{i>1} A_{1i}$, $A'_{01} = \oplus_{i>1} A_{i1}$, $A'_{00} = \oplus_{i,j>1} A_{ij}$.*

Problema 13 *Bajo las mismas condiciones que en el problema anterior considérese el idempotente $e = e_2 + \cdots + e_n$. Demuéstrese que si $A = B_{11} + B_{10} + B_{01} + B_{00}$ es la descomposición de Peirce de A con relación a e, entonces $B_{11} = \oplus_{i,j=2}^{n} A_{ij}$, $B_{00} = A_{11}$. Identifíquense los subespacios B_{10} y B_{01}.*

Problema 14 *Bajo las condiciones de los dos problemas anteriores, demuéstrese que si $u = e_1 + e_i$ entonces la descomposición de Peirce de uAu con relación a e_1 es*

$$uAu = C_{11} + C_{10} + C_{01} + C_{00}$$

donde $C_{11} = A_{11}$, $C_{10} = A_{1i}$, $C_{01} = A_{i1}$, y $C_{00} = A_{ii}$.

Problema 15 *Sea e un idempotente de un álgebra alternativa y $A = A_{00} + A_{01} + A_{10} + A_{11}$ la descomposición de Peirce de A relativa a e. Demuéstrese que A es asociativa si y sólo si A_{ii} lo es (para $i = 0, 1$) y $A_{10}^2 = A_{01}^2 = 0$.*

Problema 16 *Sea A una $\mathbb{R}$-álgebra a la que se puede aplicar el proceso de Cayley-Dickson. Demuéstrese que si $\mu > 0$ entonces $CD(A,\mu) \cong CD(A,1)$ mientras que si $\mu < 0$ entonces $CD(A,\mu) \cong CD(A,-1)$ (sugerencia: búsquense isomorfismos del tipo $(x,y) \mapsto (x,ky)$ donde $x,y \in A$, $k \in \mathbb{R}$).*

Problema 17 *Sea A un álgebra compleja a la que se puede aplicar el proceso de Cayley-Dickson. Demuéstrese que para cualquier $\mu \neq 0$ se tiene $CD(A,\mu) \cong CD(A,1)$. Compruébese que lo anterior es aplicable no solo sobre los complejos, sino también para álgebras sobre cuerpos algebraicamente cerrados.*

Problema 18 *Si definimos $\mathbb{C}_s := CD(\mathbb{R},1)$, demuéstrese que existe un isomorfismo entre el álgebra de complejos 'split' $\mathbb{C}_s$ y el álgebra definida sobre $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con producto por componentes:*

$$(x,y)(x',y') := (xx',yy')$$

para $x,y,x',y' \in \mathbb{R}$.

Problema 19 *En el álgebra $CD(\mathbb{C},-1)$ definamos los elementos $1 = (1,0)$, $I = (i,0)$, $J = (0,1)$, $K = (0,-i)$. Compruébese que $\{1,I,J,K\}$ es una base de $CD(\mathbb{C},-1)$, respecto a la cual la tabla de multiplicar del álgebra es*

.	I	J	K
I	-1	K	$-J$
J	$-K$	-1	I
K	J	$-I$	-1

.

Conclúyase que $CD(\mathbb{C},-1)$ es isomorfa al álgebra $\mathbb{H}$ de cuaterniones reales de división (por tanto es un álgebra asociativa pero no conmutativa).

Problema 20 *En el álgebra $CD(\mathbb{C},1)$ definamos los elementos $1 = (1,0)$, $I = (i,0)$, $J = (0,1)$, $K = (0,-i)$. Compruébese que $\{1,I,J,K\}$ es una base de $CD(\mathbb{C},1)$, respecto a la cual la tabla de multiplicar del álgebra es*

.	I	J	K
I	-1	K	$-J$
J	$-K$	1	$-I$
K	J	I	1

.

Esta álgebra se denomina álgebra de 'cuaterniones split' y se denota por $\mathbb{H}_s$. El calificativo 'split' hace alusión a la existencia de divisores de cero, ¡compruébese!

Problema 21 *Demuéstrese que el álgebra $\mathbb{H}_s$ de cuaterniones split es isomorfa al álgebra $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de matrices cuadradas 2×2 sobre los reales. Sugerencia: en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, tomemos las matrices 1 =matriz identidad,*

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

una vez comprobado que estas matrices forman una base del álgebra , constrúyase la tabla de multiplicar relativa a dicha base.

Problema 22 *Demuéstrese que CD*$(\mathbb{C}_s, 1)$ *es isomorfa a* $\mathbb{H}_s$*, para ello tómese en CD*$(\mathbb{C}_s, 1)$ *la base* $1 = (1, 0)$*,* $I = (0, i)$*,* $J = (0, 1)$*,* $K = (-i, 0)$ *y constrúyase la tabla de multiplicar. Compruébese también que CD*$(\mathbb{C}_s, -1)$ *es isomorfa a* $\mathbb{H}_s$ *(en este caso se puede hacer* $I = (0, 1)$*,* $J = (i, 0)$*,* $K = (0, i)$*).*

Problema 23 *Generalizando el problema anterior se pide demostrar lo siguiente: sea* A *un álgebra asociativa con un elemento* v *tal que* $v\overline{v} = -1$*. Demuéstrese que entonces la aplicación* $f : CD(A, +1) \to CD(A, -1)$ *dada por* $f(x, y) := (x, yv)$ *es un isomorfismos de álgebras con involución.*

Problema 24 *Sea* B *un álgebra a la que se puede aplicar el proceso de Cayley-Dickson . Demuéstrese que:*

1. B *es asociativa y conmutativa si y sólo si CD*(B, μ) *es asociativa.*
2. B *es asociativa, conmutativa y de involución identidad si y sólo si CD*(B, μ) *es asociativa y conmutativa.*

Problema 25 *Demuéstrese que sobre un cuerpo algebraicamente cerrado* F*, cualquier álgebra de composición de dimensión mayor que uno es split. Por tanto las álgebras de composición sobre un tal cuerpo son:* F *(en caso de característica distinta de dos),* $K(0)$*,* $Q(0, 1)$ *y* $C(0, 1, 1)$*.*

Problema 26 *Sean* X *e* Y *dos* F*-espacios vectoriales de dimensión finita y* $f : X \times Y \to F$ *una aplicación bilineal. Supóngase que:*

1. $f(x, Y) = 0$ *implica* $x = 0$*.*
2. $f(X, y) = 0$ *implica* $y = 0$*.*

Demuéstrese que $\dim(X) = \dim(Y)$ *y para cada base* $\{u_i\}$ *de* X *existe una base* $\{w_j\}$ *de* Y *tal que* $f(u_i, w_j) = \delta_{ij}$ *(la delta de Kronecker).*

Problema 27 *Sea* F *un cuerpo, en el* F*-espacio vectorial tridimensional* F^3 *definimos la forma bilineal simétrica* $< \cdot | \cdot >: F \times F \to F$ *tal que si* $x = (x_1, x_2, x_3)$*,* $y = (y_1, y_2, y_3)$*, entonces* $< x|y >:= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$*. Por otra parte definamos* $\wedge : F^3 \times F^3 \to F^3$ *tal que*

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Consideremos el F*-espacio vectorial*

$$A = \begin{pmatrix} F & F^3 \\ F^3 & F \end{pmatrix}$$

es decir el conjunto formado por todas las matrices con escalares en la diagonal y vectores de F^3 en los lugares $(1,2)$ y $(2,1)$. Dicho conjunto se dota de estructura de F-espacio vectorial con operaciones por 'componentes'. Definamos el siguiente producto en A:

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & v' \\ w' & \beta' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + < v|w' > & \alpha v' + \beta' v - w \wedge w' \\ \alpha' w + \beta w' + v \wedge v' & \beta\beta' + < w|v' > . \end{pmatrix}$$

Demuéstrese que la aplicación

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix}} := \begin{pmatrix} \beta & -v \\ -w & \alpha \end{pmatrix}$$

es una involución para el producto definido en A. Este álgebra es conocida como el álgebra de matrices de Zorn. Demuéstrese que A es una F-álgebra de composición de dimensión ocho y split. Conclúyase que $A \cong C(0,1,1)$.

Problema 28 *Dado un cuerpo F, sea $\{i,j,k\}$ la base canónica del F-espacio vectorial F^3. En la F-álgebra de las matrices de Zorn A del problema anterior, tomamos la base*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_5 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}, \; e_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ j & 0 \end{pmatrix}, \; e_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Demuéstrese que la tabla de multiplicar en la base $\{e_i : i = 1, \ldots, 8\}$ es:

$$\begin{pmatrix}
e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 & e_4 & e_5 \\
0 & e_2 & e_6 & e_7 & e_8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & e_3 & 0 & e_8 & -e_7 & e_1 & 0 & 0 \\
0 & e_4 & -e_8 & 0 & e_6 & 0 & e_1 & 0 \\
0 & e_5 & e_7 & -e_6 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\
e_6 & 0 & e_2 & 0 & 0 & 0 & -e_5 & e_4 \\
e_7 & 0 & 0 & e_2 & 0 & e_5 & 0 & -e_3 \\
e_8 & 0 & 0 & 0 & e_2 & -e_4 & e_3 & 0
\end{pmatrix},$$

donde la entrada (i,j) de la matriz anterior es precisamente el producto $e_i e_j$. Compruébese directamente que A es un álgebra simple.

Problema 29 *Sea $\mathbb{O}_s = CD(\mathbb{H}, 1)$ el álgebra de octoniones split reales. Demuéstrese directamente que $\mathbb{O}_s \cong A$ donde A es el álgebra de matrices de Zorn sobre $\mathbb{R}$.*

Problema 30 *Sea $\mathbb{O} = CD(\mathbb{H}, -1)$ el álgebra de octoniones reales de división. Si consideramos la base estandar $\{1, i, j, k\}$ de $\mathbb{H}$, podemos construir la base de $\mathbb{O}$ dada por:*

$$e_1 = (1, 0), e_2 = (i, 0), e_3 = (j, 0), e_4 = (j, 0),$$

$$e_5 = (0, 1), e_6 = (0, i), e_7 = (0, j), e_8 = (0, k).$$

Demuéstrese que la tabla de multiplicar de $\mathbb{O}$ respecto a esta base es[1]

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_2 & -e_1 & e_4 & -e_3 & -e_6 & e_5 & -e_8 & e_7 \\ e_3 & -e_4 & -e_1 & e_2 & -e_7 & e_8 & e_5 & -e_6 \\ e_4 & e_3 & -e_2 & -e_1 & -e_8 & -e_7 & e_6 & e_5 \\ e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & -e_1 & -e_2 & -e_3 & -e_4 \\ e_6 & -e_5 & -e_8 & e_7 & e_2 & -e_1 & -e_4 & e_3 \\ e_7 & e_8 & -e_5 & -e_6 & e_3 & e_4 & -e_1 & -e_2 \\ e_8 & -e_7 & e_6 & -e_5 & e_4 & -e_3 & e_2 & -e_1 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que la aplicación lineal $\mathbb{O} \to \mathbb{O}$ tal que $e_1 \mapsto e_1$, $e_i \mapsto -e_i$ $(i \neq 1)$, es una involución de $\mathbb{O}$, y que la aplicación $n : \mathbb{O} \to \mathbb{R}$ definida por $\mathfrak{n}(x) := x\overline{x}$, es una forma cuadrática definida positiva. Conclúyase a partir de este hecho, que $\mathbb{O}$ es un álgebra de división.

Problema 31 *Clasifíquense las álgebras alternativas simples de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los reales.*

Capítulo 4

Problema 32 *Estúdiense las álgebras de Lie nilpotentes de dimensiones dos y tres.*

Problema 33 *Demuéstrese que para un álgebra alternativa A sobre un cuerpo F de característica dos o tres, el álgebra antisimetrizada A^- es de Lie.*

Problema 34 *Sea V un F-espacio vectorial de dimensión finita n. ¿Bajo qué condiciones podemos afirmar que $\mathfrak{gl}(V)/F1 \cong \mathfrak{sl}(V)$?*

Problema 35 *Demuéstrese la simplicidad de las álgebras $\mathfrak{sl}(V)$ para un espacio vectorial de dimensión finita V.*

Problema 36 *Demuéstrese que si A es un álgebra y $D_1, D_2 \in Der(A)$, entonces $[D_1, D_2] \in Der(A)$.*

Problema 37 *Determínese la dimensión del álgebra $\mathfrak{o}(2l+1, F)$.*

[1] Como de costumbre el elemento (i, j) de la tabla es el producto e_ie_j.

Problema 38 *Verifíquese que:*

1. $\tau(n, F) = \mathfrak{d}(n, F) \oplus \mathfrak{n}(n, F)$.
2. $[\mathfrak{d}(n, F), \mathfrak{n}(n, F)] = \mathfrak{n}(n, F)$.
3. $[\tau(n, F), \tau(n, F)] = \mathfrak{n}(n, F)$.

Recuérdese que si K y H son subálgebras de L, entonces $[H, K]$ denota el subespacio de L generado por los conmutadores $[x, y]$ con $x \in H$, $y \in K$.

Problema 39 *Sea 1 la identidad de $\mathfrak{gl}(n, F)$. Supongamos que la característica de F es cero o un primo que no divida a n. Demuéstrese que $\mathfrak{gl}(n, F) = F \cdot 1 \oplus \mathfrak{sl}(n, F)$ (suma directa de subespacios).*

Problema 40 *Demuéstrese que el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ provisto con el producto vectorial habitual, tiene estructura de álgebra de Lie.*

Problema 41 *Cuando la característica del cuerpo base F es cero, demuéstrese que para cada una de las álgebras de Lie clásicas $L = A_l, B_l, C_l$, o D_l, se tiene la igualdad $[L, L] = L$. Conclúyase que cada una de estas álgebras está formada por matrices de traza nula.*

Problema 42 *Sea L un álgebra de Lie sobre un cuerpo algebraicamente cerrado y sea $x \in L$. Pruébese que el subespacio de L generado por los vectores propios de $\mathrm{ad}(x)$ es una subálgebra.*

Problema 43 *Para valores pequeños de l, pueden darse isomorfismos entre algunas álgebras de Lie clásicas. Demuéstrese que A_1, B_1 y C_1 son isomorfas, mientras que D_1 es un álgebra de Lie unidimensional. Pruébese que $B_2 \cong C_2$, $D_3 \cong A_3$. ¿Qué se puede decir de D_2?*

Problema 44 *Demuéstrese que una representación de dimensión finita V de un álgebra de Lie L es completamente reducible si y sólo si para cada L-submódulo W de V, existe un L-submódulo W' tal que $V = W \oplus W'$. Indicación. Supongamos $V = \oplus_{i=1}^{n} V_i$ completamente reducible siendo cada V_i un submódulo irreducible. Sea W submódulo distinto del total, entonces existe algún i tal que $W \cap V_i = 0$. A partir de aquí se demuestra la existencia de un submódulo W' maximal de entre los que tiene intersección nula con W. Para demostrar que $W \oplus W'$ coincide con V se puede razonar por reducción al absurdo en cuyo caso llegaremos a que existe j tal que $(W \oplus W') \cap V_j = 0$.*

Problema 45 *Demuéstrese que el álgebra $\tau(n, F)$ de las matrices triangulares superiores es soluble.*

Problema 46 *Compruébese que el álgebra tridimensional con base $\{x, y, z\}$ y tabla de multiplicar $[x, x] = [y, y] = [z, z] = 0$, $[x, y] = -[y, x] = z$, $[x, z] = -[z, x] = y$, $[y, z] = [z, y] = 0$, es un álgebra de Lie. Demuéstrese que es soluble pero no nilpotente.*

Problema 47 *Determínense salvo isomorfismos las álgebra de Lie de dimensión menor o igual a dos. Compruébese que existe solo una (salvo isomorfismo) bidimensional no abeliana. Compruébese que esta es soluble pero no nilpotente.*

Capítulo 5

Problema 48 *Sea V un espacio vectorial de dimensión arbitraria sobre un cuerpo F (sin restricción sobre su característica). Sea $f : V \times V \to F$ una forma bilineal simétrica y S un subespacio de V de dimensión finita y no degenerado (lo quiere decir que la restricción de f a $U \times U$ es no degenerada). Demuéstrese que entonces $V = S \oplus S^\perp$. Sugerencia: demuéstrese que la aplicación $S \to S^*$ tal que $s \mapsto f(s, \_)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para ver que $V = S + S^\perp$, tómese $v \in V$ y demuéstrese que existe $s \in S$ tal que $f(v, \_) = f(s, \_)$.*

Problema 49 *Certifíquese que $\forall x, y, z \in \mathfrak{gl}(V)$ se tiene $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$.*

Problema 50 *Sea F es algebraicamente cerrado y V un F-espacio de dimensión finita. Tomemos $x \in \mathfrak{gl}(V)$ semisimple. Demuéstrese que $\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ es semisimple. Sugerencia: sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V que diagonaliza a x, de modo que $x(v_i) = a_i e_i$ con $a_i \in F$. Construýase la base de $\mathfrak{gl}(V)$ definida por las relaciones $e_{ij}(v_k) = \delta_{ki} v_j$, y demuéstrese que $\mathrm{ad}(x)e_{ij} = (a_j - a_i)e_{ij}$.*

Problema 51 *Sean x, y, z endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita V. Demuéstrese que $Tr([x, y]z) = Tr(x[y, z])$.*

Problema 52 *Demuéstrese que si L es álgebra de Lie tal que $[L, L]$ es nilpotente, entonces L es soluble.*

Problema 53 *Sea V un F-espacio de dimensión finita, W un subespacio suyo y $f : V \to V$ un endomorfismo que transforma V en W. Demuéstrese que $Tr(f) = Tr(f|_W)$. Sugerencia: estúdiese la traza de f con relación a una base de V que sea el resultado de extender una base de W.*

Problema 54 *Calcúlese la forma Killing del álgebra de Lie $L := \mathfrak{sl}(2, F)$. Sugerencia: considérese la base $\{x, h, y\}$ de L formada por las matrices $x = E_{12}$, $y = E_{21}$, $h = E_{11} - E_{22}$ donde como es habitual la matriz E_{ij} es la que tiene un uno en la posición (i, j) y cero en las demás. Compruébese que entonces*

$$\mathrm{ad}(h) = diag(2, 0, -2), \mathrm{ad}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathrm{ad}(y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y determínese ahora la forma de Killing que deberá salir de matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 55 *Sea I un ideal de un álgebra de Lie de dimensión finita L. Demuéstrese que $I^\perp$ definido como el conjunto de elementos $x \in L$ tales que $k(x, I) = 0$ es un ideal de L (k es la forma Killing de L).*

Problema 56 *En el ambiente del problema anterior, aplíquese el Criterio de Cartan para demostrar que* $I \cap I^{\perp}$ *es un ideal soluble.*

Problema 57 *Sea* V *un* F*-espacio vectorial de dimensión finita y consideremos el álgebra* $L = \mathfrak{sl}(V)$. *Sea* $x \in L$ *y* $x = x_s + x_n$ *su descomposición de Jordan-Chevalley.*

1. *Demuéstrese que* $x_n \in L$ *usando el hecho de que todos sus autovalores son nulos. Conclúyase que* $x_s \in L$.

2. *Aplíquese el Lema* **??** *para concluir que* $ad(x_s) : \mathfrak{gl}(V) \to \mathfrak{gl}(V)$ *es semisimple. Demuéstrese que* $\mathrm{ad}(x_s) : L \to L$ *es semisimple.*

3. *Análogamente demuéstrese que* $\mathrm{ad}(x_n) : L \to L$ *es nilpotente.*

4. *Como* $[\mathrm{ad}(x_s), \mathrm{ad}(x_n)] = \mathrm{ad}([x_s, x_n]) = 0$, *la unicidad de la descomposición de Jordan-Chevalley abstracta implica que* $x = x_s + x_n$ *es también la descomposición abstracta de Jordan-Chevalley.*

Problema 58 *Sea* V *un módulo (de dimensión finita) del álgebra de Lie* L. *Pruébese que* V *es completamente reducible si y sólo si cada submódulo de* V *posee un complemento (es decir, para cada* W *submódulo de* V, *existe otro submódulo* W' *tal que* $V = W \oplus W'$*). Sugerencia: suponiendo* $V = \oplus_i S_i$ *para una familia* $\{S_i\}$ *de* L*-módulos irreducibles, si* W *es un submódulo propio y no nulo, no todos los* S_i *están contenidos en* W. *Aquellos* S_i *no contenidos en* W *tienen intersección nula con* W. *Consideremos pues un submódulo* X *de* V *maximal respecto a la propiedad de tener intersección nula con* W. *Si* $W \oplus X$ *no coincide con* V,*...*

Problema 59 *Sea* $L = \mathfrak{sl}(2, F)$, $V = F^2$ *y* $\phi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ *la inclusión. Consideremos la base* $\{x, h, y\}$ *de* L *dada por* $x = E_{12}$, $h = E_{11} - E_{22}$, $y = E_{21}$. *Determínese la forma traza* β *de* ϕ *así como la base dual de la anterior respecto a* β. *Calcúlese el elemento de Casimir de* ϕ.

Capítulo 6

Problema 60 *Demuéstrese que bajo las hipótesis habituales (*L *álgebra de Lie semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero), se tiene* $k(t_\lambda, t_\mu) = \sum_\alpha k(t_\lambda, t_\alpha) k(t_\alpha, t_\mu)$ *donde la suma está extendida a las* $\alpha \in \Phi$. *Sugerencia: encuéntrese la matriz de* $\mathrm{ad}(t_\gamma)$ *teniendo en cuenta la descomposición de Cartan de* L *respecto a su subálgebra toral maximal* H*).*

Problema 61 *Encuéntrese una subálgebra toral maximal* H *de* $L = \mathfrak{sl}(n, F)$ *y realícese la descomposición de Cartan de* L *respecto a* H. *Sugerencia: hágase primero para* $n = 3$.

Problema 62 *Encontrar una subálgebra toral maximal de $L = so(3,1,\mathbb{C})$ (álgebra de Lie del grupo de Lorentz) que llamaremos H y de hacer la descomposición de Cartan de L respecto a H. Después se pide estudiar la simplicidad de L. Se recuerda al lector que el álgebra L es la formada por todas las matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & a \\ -x & 0 & z & b \\ -y & -z & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 63 *Sea $\mathfrak{g}_2$ el álgebra de derivaciones del álgebra de octoniones complejos (isomorfa al álgebra de matrices de Zorn sobre los complejos). Demuéstrese que es semisimple, calcúlese una subálgebra toral maximal y hágase la descomposición de Cartan de $\mathfrak{g}_2$ respecto a dicha subálgebra toral. Demuéstrese que $\mathfrak{g}_2$ es simple y de dimensión catorce.*

Problema 64 *En el espacio complejo $V = \mathbb{C}^4$ se considera la forma bilineal alternada $f : V \times V \to \mathbb{C}$ tal que $f(x,y) = xFy^t$ donde F es la matriz diagonal por bloques $F = diag(S,S)$ siendo S la matriz simpléctica dos por dos ($S = e_{12} - e_{21}$). Sea L el álgebra de Lie formada por todas las $T \in \mathfrak{gl}(V)$ tales que $f(T(x),y) + f(x,T(y)) = 0$ para cualesquiera $x,y \in V$. Encuéntrese una forma matricial de L, una subálgebra toral maximal H, así como la descomposición de Cartan de L respecto de H (justificando su existencia). ¿Es L simple?*

Problema 65 *Demostrar que $so(4,\mathbb{C})$ es semisimple y encuéntrese una descomposición de Cartan para este álgebra. ¿Es simple?*

Problema 66 *Sea L un álgebra de Lie semisimple y de dimensión finita sobre un cuerpo F algebraicamente cerrado de característica cero. Supongamos que $L = I \oplus J$ donde $0 \neq I, J \lhd L$. Sabemos que entonces, tanto I como J son álgebras semisimples. Existen entonces subálgebras torales maximales H_I y H_J de I y J respectivamente. Supongamos dadas las descomposiciones en espacios raíces de I y J:*

$$I = H_I \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi_I} I_\alpha), \quad J = H_J \oplus (\oplus_{\beta \in \Phi_J} J_\beta).$$

Demuéstrese que entonces $H := H_I \oplus H_J$ es una subálgebra toral maximal de L y que la descomposición en espacios raíces de L con relación a H es

$$L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi_I} I_\alpha) \oplus (\oplus_{\beta \in \Phi_J} J_\beta),$$

por lo tanto el sistema de raíces de L respecto de H es $\Phi = \Phi_I \dot\cup \Phi_J$. Compruébese que entonces $\alpha \perp \beta$ para cualesquiera $\alpha \in \Phi_I$, $\beta \in \Phi_J$.

Problema 67 *Sea L como en el problema anterior y H una subálgebra toral maximal de modo que la descomposición en espacios raíces de L respecto de H es $L = H \oplus (\oplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha)$. Supongamos que hay una partición no trivial del sistema de raíces Φ de la forma $\Phi = \Phi_1 \dot\cup \Phi_2$*

donde cada raíz de Φ_1 es ortogonal a todas las de Φ_2. Definamos $H_i = \sum_{\alpha\in\Phi_i} Ft_\alpha$ para $i = 1, 2$. Compruébese que entonces

$$L_i := H_i \oplus (\oplus_{\alpha\in\Phi_i} L_\alpha) \tag{1}$$

($i = 1, 2$) son dos ideales propios de L, tales que $L = L_1 \oplus L_2$. Compruébese que H_i es una subálgebra toral maximal de L_i induciendo la descomposición en espacios raíces dada por (1).

Capítulo 7

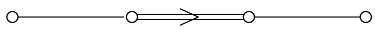
Problema 68 *Sea E' un subespacio del espacio euclídeo E. Demuéstrese que si una reflexión σ_α deja E' invariante, entonces o bien $\alpha \in E'$ o de lo contrario $E' \in P_\alpha$.*

Problema 69 *Demuéstrese que la reflexión σ_α invierte el orden de la α-cadena que contiene a β. Sugerencia: se ha visto antes que la reflexión deja a la tal cadena invariante. Por lo tanto permuta sus elementos. Demuéstrese que esa permutación de elementos invierte el orden,*

Problema 70 *Pruébese que dada una base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ de un espacio euclídeo E, la intersección de los semiespacios $S_i := \{x \in E : (x, \gamma_i) > 0\}$ es no vacía. Sugerencia: considérese el elemento $\gamma = \sum r_i\delta_i$ donde los r_i son positivos y cada δ_i es la proyección de γ_i en la recta ortogonal al hiperplano generado por $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_l\}$.*

Problema 71 *Determinar en cada uno de los sistemas de raíces de rango dos una base. ¿Cuál es la cámara de Weyl fundamental en cada caso?*

Problema 72 *Dado el diagrama de Dynkin de la figura de abajo, determínese su matriz de Cartan (el correspondiente sistema de raíces se llama F_4).*



Capítulo 8

Problema 73 *Sea A un álgebra de Banach asociativa con unidad $1 \in A$. tomemos una sucesión convergente en A con límite $a \in A$, es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Demuéstrese que entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{a_n}{n}\Big)^n = \exp(a).$$

Problema 74 *Supongamos dado un grupo uniparamétrico $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \to G$, ($\epsilon \in \mathbb{R}$) en un grupo de Lie lineal, tal que $\varphi(t) = \exp(ta)$, para una cierta matriz a y todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Demuéstrese que para todo $t \in \mathbb{R}$, la matriz $\exp(ta) \in G$ lo que permitiría extender φ a un grupo uniparamétrico global $\mathbb{R} \to G$.*

Problema 75 *Demuestrese que la descomposición en unión disjunta $O(n) = O^+(n) \cup O^-(n)$ es de hecho la descomposición del espacio topológico $O(n)$ en sus dos componentes conexas $O^\pm(n)$.*

Prácticas con Mathematica

Para los dos primeros problemas de esta sección no es necesario el uso de *Mathematica*. Sea F un cuerpo de cáracterística distinta de dos y J una F-álgebra que satisface las identidades:

1. $xy = yx$, es decir se trata de un álgebra conmutativa.

2. $x^2(yx) = (x^2y)x$,

para cualesquiera $x, y \in J$. Entonces diremos que J es un álgebra de Jordan.

Problema 76 *Demuéstrese que para toda álgebra asociativa A sobre F, la nueva álgebra de producto $x \circ y := xy + yx$ es un álgebra de Jordan. Este álgebra de Jordan se denotará por A^+ y se llamara en lo sucesivo la* simetrizada de A. *Conclúyase que cualquier subespacio de A cerrado para el producto $x \circ y$ es también un álgebra de Jordan (por lo tanto una subálgebra de A^+). Como caso particular de la situación anterior, considérese en A una involución $* : A \to A$ (es decir, un antiautomorfismo involutivo). Demuéstrese que el espacio $H(A, *) := \{x \in A : x^* = x\}$ es una subálgebra de A.*

Problema 77 *Sea $Z \cong \mathbb{O}_2$ el álgebra de las matrices de Zorn o de octoniones split sobre un cuerpo F de característica distinta de dos. Denotemos por $- : \mathbb{O}_s \to O_s$ su involución canónica dada en el enunciado del Problema 27. Consideremos el F-espacio $\mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s)$ de todas las matrices 3×3 sobre $\mathbb{O}_s$. Consideremos la aplicación $* : \mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s)$ tal que $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$. Consideremos entonces el F-espacio*

$$H_3(\mathbb{O}_s, *) := \{x \in \mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s) : x^* = x\}.$$

Demuéstrese que se trata de un álgebra de Jordan para el producto $x \cdot y := xy + yx$. Compruébese que su dimensión es 27.

Problema 78 *Sea $L = Der(H_3(\mathbb{O}_s, *))$. Compruébese que L es un álgebra de Lie de dimensión 52 semisimple. Determínese una subálgebra toral maximal H de L y hágase la descomposición en espacios raíces de L relativa a H. Calcúlense las raíces de L relativas a H y compruébese que el diagrama de Dynkin de L es f_4.*

Recordemos que un álgebra de composición U sobre un cuerpo F es un álgebra no necesariamente asociativa pero con unidad $1 \in U$, provista de una forma cuadrática $n : U \to F$ no degenerada y multiplicativa en el sentido de que $n(xy) = n(x)n(y)$ para cualesquiera $x, y \in U$. En un álgebra de este tipo, podemos definir la aplicación *traza* como aquella aplicación lineal $\tau : U \to F$ dada por $\tau(x) := f(x, 1)$ donde $f : U \times U \to F$ es la forma polar de n, es decir, $f(x, y) := n(x + y) - n(x) - n(y)$, $(x, y \in U)$. En el Capítulo tercero de estos apuntes, se tratan exhaustivamente estas álgebras, obteniéndose una clasificación completa. Si el cuerpo base F es de característica distinta de dos, podemos descomponer el álgebra en una suma directa de subespacios $U = F1 \oplus U_0$, donde $U_0 := \{x \in U : \tau(x) = 0\}$.

En efecto para cada $x \in U$, podemos escribir[2] $x = \tau(x) + x - \tau(x)$, siendo $\tau(x) \in F$, y $x - \tau(x) \in U_0$. Por otra parte si $\lambda \in F \cap U_0$, entonces $\lambda = \tau(\lambda) = 0$.

La descomposición anterior $U = F1 \oplus U_0$, garantiza que cada elemento $x \in U$ se descompone de la forma $x = \lambda + x_0$, $\lambda \in F$, $x_0 \in U_0$. Llamaremos *parte escalar de* x a λ (que coincide con $\tau(x)$), y *parte vectorial de* x a x_0. Por otra parte para cada par de elementos $x, y \in U_0$ denotaremos al opuesto de la parte escalar de xy por $-(x, y)$, y a su parte vectorial, por $x * y$. Se tiene entonces que:

$$xy = -(x, y) + x * y, \ \forall x, y \in U_0.$$

Finalmente añadamos que como consecuencia de la clasificación de las álgebras de composición estudiada en el tercer capítulo, podemos afirmar que sobre un cuerpo F algebraicamente cerrado y de característica distinta de dos, las álgebras de composición son (salvo isomorfismos):

$$F, C_s, H_s, O_s,$$

donde C_s es isomorfa a $F \times F$ con operaciones por componentes e involución de intercambio, H_s es isomorfa a $\mathcal{M}_2(F)$ con involución

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

y O_s es isomorfa al álgebra de matrices de Zorn (véase el Problema 27).

Dada un álgebra de composición[3] U con involución $u \mapsto \overline{u}$. Podemos considerar el álgebra $H_3(U)$ formada por las matrices $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(U)$, tales que $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$. Ésta, es un álgebra de Jordan para la multiplicación $x \circ y = xy + yx$. Recordemos que un álgebra de Jordan sobre un cuerpo de característica distinta de dos, es un álgebra J, cuyo producto (que podemos provisionalmente denotar por $x \circ y$), satisface las identidades:

$$x \circ y = y \circ x, \quad x^2 \circ (y \circ x) = (x^2 \circ y) \circ x, \quad (x^2 := x \circ x).$$

Consideremos entonces un álgebra de Jordan $J = F$, o bien, $J = H_3(U)$ donde U es como en el párrafo anterior. Veníamos denotando al producto de J mediante $\circ$, pero vamos ahora a cambiar de nuevo a la notación habitual en cualquier álgebra: la simple yuxtaposición de elementos de J denotará su producto. En el resto de este apéndice, vamos a exigir al cuerpo base F, el ser algebraicamente cerrado y de característica cero. En cada una de las álgebras J definidas arriba, podemos considerar la aplicación $T : J \to F$ dada por

$$T(x) := \frac{3}{\dim(J)} \operatorname{traza}(R_x).$$

Entonces, se tiene una descomposición en suma directa $J = F1 \oplus J_0$ donde $J_0 = 0$ si $J = F$, y en los otros casos $J_0 = \{x \in J : T(x) = 0\}$. En efecto: si $J \neq F$, la aplicación T aplicada

[2]Como es habitual, identificamos $F1$ con F.

[3]Seguimos suponiendo que la característica del cuerpo base es distinta de dos.

a escalares actúa de la forma $T(\lambda 1) = 3\lambda$, para cada $\lambda \in F$. Entonces, si $\lambda \in F1 \cap J_0$, se tiene $0 = T(\lambda 1) = 3\lambda$ lo que implica $\lambda = 0$. Por otra parte cada elemento $x \in J$ se puede escribir de la forma

$$x = \frac{1}{3}T(x) + (x - \frac{1}{3}T(x)),$$

donde $T(x) \in F$ y $x - \frac{1}{3}T(x) \in J_0$. En forma parecida a como hicimos en U, llamaremos *parte escalar de* x al elemento $T(x) \in F$, y *parte vectorial de* x al sumando $x - \frac{1}{3}T(x)$. Una vez establecido este hecho, para cada pareja de elementos $x, y \in J$, denotaremos por $\langle x, y\rangle$ al triple de la parte escalar de xy; y por $x * y$ a la parte vectorial del producto xy. Por lo tanto podremos escribir

$$xy = \frac{1}{3}\langle x, y\rangle + x * y, \ \forall x, y \in J.$$

Vamos ahora a describir un construcción muy peculiar, que nos proporcionará la definición de todas las álgebras de Lie excepcionales. Si U es cualquiera de las álgebras alternativas F, C_s, H_s, O_s y J cualquiera de las álgebras de Jordan F, $H_3(F)$, $H_3(C_s)$, $H_3(H_s)$, o $H_3(O_s)$, podemos construir el F-espacio vectorial

$$\mathcal{L} = \mathrm{Der}(U) \oplus U_0 \otimes J_0 \oplus \mathrm{Der}(J).$$

El espacio $\mathcal{L}$ se convierte en un álgebra de Lie con el producto $[\ ,\ ]$ que actúa conforma a las siguientes cláusulas:

$$[\mathrm{Der}(U), \mathrm{Der}(J)] := 0,$$
$$[a \otimes x, D] := D(a) \otimes x, \ a \in U_0, \ x \in J_0, \ D \in \mathrm{Der}(U),$$
$$[a \otimes x, E] := a \otimes E(x), \ a \in U_0, \ x \in J_0, \ E \in \mathrm{Der}(J),$$
$$[a \otimes x, b \otimes y] := \frac{1}{12}\langle x, y\rangle D_{a,b} + (a * b) \otimes (x * y) - (a, b)[R_x, R_y],$$

Donde $D_{x,z} := R_{[x,z]} - L_{[x,z]} - 3[L_x, R_z]$ para cualesquiera $x, z \in U$. El hecho de que $D_{a,b} \in \mathrm{Der}(U)$ se puede ver en [6, p.77], por otra parte $[R_x, R_y] \in \mathrm{Der}(J)$ por [6, p. 92].

Con las definiciones que hemos introducido podemos definir las álgebras de Lie excepcionales. Para ello, tomaremos U como el álgebra O_s de las matrices de Zorn, y dejaremos que J varíe en el conjunto de álgebras de Jordan:

$$\{F, H_3(F), H_3(C_s), H_3(H_s), H_3(O_s)\}.$$

Así, podemos escribir:

$$\begin{array}{llll} g_2 := \mathcal{L}, & \text{para} & U = O_s, & J = F, \\ f_4 := \mathcal{L}, & \text{para} & U = O_s, & J = H_3(F), \\ e_6 := \mathcal{L}, & \text{para} & U = O_s, & J = H_3(C_s), \ . \\ e_7 := \mathcal{L}, & \text{para} & U = O_s, & J = H_3(H_s), \\ e_8 := \mathcal{L}, & \text{para} & U = O_s, & J = H_3(O_s), \end{array}$$

Problema 79 *Demuéstrese que el álgebra* f_4 *definida arriba realmente tiene diagrama de Dynkin* f_4.

Problema 80 *Demuéstrese que el álgebra bautizada como* e_6 *en el párrafo de arriba tiene ciertamente como diagráma de Dynkin, el que hemos llamado* e_6.

Problema 81 *Demuéstrese que el álgebra* e_7 *del párrafo de arriba tiene ciertamente como diagráma de Dynkin, a* e_7.

Problema 82 *Demuéstrese que el álgebra* e_8 *del párrafo de arriba tiene ciertamente como diagráma de Dynkin, a* e_8.

Bibliografía

[1] G.H. Hardy y E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers. Fith Edition.* Oxford Science Publications. Claredon Press, Oxford, 1979.

[2] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory.* Springer-Verlag. New York Heidelberg Berlin. 1972.

[3] L. Kadison y M. T. Kromann, *Projective Geometry and Modern Algebra.* Birkhäuser. Boston-Basel-Berlin, 1996.

[4] G. Pichon, *Groupes de Lie, Représentations linéaires et applications.* Hermann Paris, Collection Méthodes.

[5] A. A. Sagle y R. E. Walde. *Introduction to Lie groups and Lie algebras.* Academic Press. New York and London. 1973.

[6] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras.* Academic Press, NY-San Francisco-London, 1966.

[7] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov. *Rings that are nearly associative.* Academic Press, NY-San Francisco-London, 1982.