Lista de problemas.

Primer cuatrimestre de Álgebras no asociativas. 2000.

Problema 1 En el álgebra $\mathbb{H}$ de los cuaterniones reales de división, encuéntrase un conjunto de generadores (como $\mathbb{R}$ -álgebra) de cardinal mínimo. Demuéstrase que $\mathbb{H}$ es un cociente del álgebra asociativa libre con conjunto de generadores X (cuyo cardinal se pide determinar).

Problema 2 Demuestra el *Teorema Generalizado de Frobenius* el cual afirma que si D es una $\mathbb{R}$ -álgebra alternativa de dimensión finita sin divisores de cero, entonces D es isomorfa a $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, o $\mathbb{O}$ (sugerencia: demuéstrase que D tiene unidad y que es un álgebra de división).

Problema 3 Sea X un conjunto no vacío y F un cuerpo cualquiera. Constrúyase la F -álgebra alternativa libre con conjunto de generadores X . Más precisamente, se deben dar los detalles de la construcción de una F -álgebra $\text{Alt}(X)$ tal que:

1. Exista una inyección $i : X \rightarrow \text{Alt}(X)$.
2. Para cualquier otra F -álgebra alternativa A , y cualquier aplicación $f : X \rightarrow A$, existe un único homomorfismo de F -álgebras $g : \text{Alt}(X) \rightarrow A$ tal que $g \circ i = f$.

Demuéstrase que $\text{Alt}(X)$ es única salvo isomorfismos. Demuéstrase que el álgebra asociativa libre con conjunto de generadores X es un cociente de $\text{Alt}(X)$.

Problema 4 Sea V un espacio vectorial (posiblemente de dimensión infinita) sobre un cuerpo F de característica distinta de dos. Sea $T : V \rightarrow V$ un F -endomorfismo tal que $T^3 - 3T^2 + T = 0$. Demuéstrase directamente que $V = V_0 \oplus V_{\frac{1}{2}} \oplus V_1$ donde $V_i := \{x \in V : T(x) = ix\}$ para $i = 0, \frac{1}{2}, 1$. ¿Conoce algún resultado de álgebra lineal que pueda proporcionar una solución directa a este problema?

Problema 5 Demuéstrase para un álgebra de Jordan J , se tiene $[L_{x^2}, L_x] = 0$ para todo $x \in J$. Linealice esta identidad para obtener $2[L_{xy}, L_x] + [L_{x^2}, L_y] = 0$. Particularizando para $x = e$ (un idempotente de J) dicha identidad se puede aplicar a e . Así se demostrará la igualdad $2L_e^3 - 3L_e^2 + L_e = 0$. Aplicando el problema 4 demuéstrase que existe una descomposición $J = J_0(e) \oplus J_{\frac{1}{2}}(e) \oplus J_1(e)$ donde $J_i(e) := \{x \in J : ex = ix\}$, $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ (esta es la llamada descomposición de Peirce de J relativa al idempotente e).

Problema 6 Si e es un idempotente de un álgebra asociativa A , dicho elemento es también un idempotente del álgebra de Jordan $J := A^+$. Tenemos entonces la descomposición de Peirce $A = A_{00} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{11}$ así como la descomposición de Peirce $J = J_0(e) \oplus J_{\frac{1}{2}}(e) \oplus J_1(e)$ introducida en el problema anterior. Relaciónense los espacios A_{ij} con los espacios $J_i(e)$.

Problema 7 Sean A y B dos F -álgebras asociativas y $f : A^+ \rightarrow B^+$ un homomorfismo entre las correspondientes álgebras de Jordan simetrizadas. Demuéstrase que:

1. Si definimos $\{xyz\} := xyz + zyx$ para cualesquiera $x, y, z \in A$ (y análogamente en B), entonces f satisface $f(\{xyz\}) = \{f(x)f(y)f(z)\}$ para cualesquiera $x, y, z \in A$.
2. Demuéstrase que para cualesquiera $x, y \in A$ se tiene $[f(xy) - f(x)f(y)][f(xy) - f(y)f(x)] = 0$.

3. Suponiendo que B es un dominio, demuéstrese que f es un homomorfismo de A en B (ahora como álgebras asociativas) o un antihomomorfismo (es decir, un homomorfismo de A en el álgebra opuesta B^{op}).

Problema 8 Sea F un cuerpo y L una F -álgebra cuyo producto $L \times L \rightarrow L$ denotaremos por $(x, y) \mapsto [x, y]$. Diremos que L es un álgebra de Lie si: (1) $[x, x] = 0$, (2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ (identidad de Leibnitz); para cualesquiera $x, y, z \in L$. Sea A una F -álgebra asociativa, en el F -espacio vectorial subyacente a A definamos la operación $A \times A \rightarrow A$ tal que $(x, y) \mapsto [x, y] := xy - yx$. Demuéstrase que A con el nuevo producto $[\]$ es un álgebra de Lie (a este álgebra se le llama *antisimetrizada de A* y se denota por A^-). En particular para cada F -espacio vectorial V , la F -álgebra de los endomorfismos $\text{End}(V)$ (con la composición como producto) induce un álgebra de Lie $\text{End}(V)^-$.

Problema 9 Sea A una F -álgebra no necesariamente asociativa. Una aplicación F -lineal $D : A \rightarrow A$ diremos que es una *derivación* cuando satisface $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ para cualesquiera $x, y \in A$. Si denotamos por $\text{Der}(A)$ al conjunto de todas las derivaciones, demuéstrese que es una subálgebra de $\text{End}_F(A)^-$ y que por tanto tiene una estructura natural de álgebra de Lie (véase el problema 8). Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de los cuaterniones reales de división. Determínese $\text{Der}(\mathbb{H})$ (constrúyase una base del álgebra con su tabla de multiplicar). ¿Hay algún isomorfismo entre $\text{Der}(\mathbb{H})$ y el álgebra de Lie $\text{so}(3)$ formada por las matrices antisimétricas reales de traza nula? (con estructura de álgebra de Lie inducida por ser ésta, una subálgebra de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})^-$).

Para el siguiente problema denotaremos por $\aleph_0$ el cardinal del conjunto de números naturales y por $\aleph_1$ el cardinal de la recta real. Convendrá utilizar el hecho establecido en teoría de cardinales según el cual $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Esto significa que el cardinal del conjunto de todas las aplicaciones de un conjunto numerable, en un conjunto de cardinal dos, coincide con el cardinal de la recta real.

Problema 10 Sea F un cuerpo de cardinal a lo sumo numerable y $F^{(\mathbb{N})}$ el F -espacio vectorial de todas las sucesiones $\phi : \mathbb{N} \rightarrow F$ de soporte finito (es decir, tales que se anulan a partir de algún término), con las operaciones ordinarias de suma y multiplicación por escalares. Sea $F^{\mathbb{N}}$ el F -espacio de todas las sucesiones de elementos de F también con las operaciones usuales, de modo que $F^{(\mathbb{N})}$ es un F -subespacio de $F^{\mathbb{N}}$.

1. Demuéstrase que $\text{hom}_F(F^{(\mathbb{N})}, F) \cong F^{\mathbb{N}}$ es decir el dual de $F^{(\mathbb{N})}$ es precisamente $F^{\mathbb{N}}$.
2. Demuéstrase que el cardinal de $F^{(\mathbb{N})}$ es a lo sumo $\aleph_0$ (donde $|\cdot|$ denota el cardinal).
3. Demuéstrase que el cardinal de $F^{\mathbb{N}}$ es estrictamente mayor que $\aleph_0$.

Conclúyase que el espacio $F^{(\mathbb{N})}$ no es isomorfo a su dual.

Problema 11 Sea F un cuerpo y K la clausura algebraica de F . Sea A una F -álgebra de octoniones generalizados. Demuéstrase que $A \otimes_F K$ es isomorfa a la K -álgebra de matrices de Zorn.

Problema 12 Sea Z el álgebra de matrices de Zorn sobre el cuerpo F y sean

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demuestra que $\{e_1, e_2\}$ es un conjunto de idempotentes ortogonales cuya suma es la unidad. Obténgase la descomposición de Peirce de Z respecto a dicho conjunto.