

Listas de problemas para evaluación. Curso 2006-2007

Problema 1 Dados dos espacios vectoriales U y V de dimensión finita sobre un cuerpo F definimos su producto tensorial como $U \otimes V := L^2(U^*, V^*; F)$, es decir, el conjunto de todas las aplicaciones bilineales $f : U^* \times V^* \rightarrow F$ (donde U^* es el dual de U y análogamente para V^*). Comprueba que $U \otimes V$ es un F -espacio vectorial para la suma y multiplicación por escalares habituales de aplicaciones bilineales. Considérese la aplicación $\tau : U \times V \rightarrow U \otimes V$ tal que a cada pareja $(u, v) \in U \times V$ le asocia el elemento $u \otimes v : U^* \times V^* \rightarrow F$ tal que $u \otimes v(f, g) = f(u)g(v)$ para cada $(f, g) \in U^* \times V^*$. Demuéstrese que es una aplicación bilineal y para cualquier otra aplicación bilineal $f : U \times V \rightarrow X$ existe una única aplicación lineal $F : U \otimes V \rightarrow X$ tal que $F\tau = f$. Enunciar esta propiedad en términos de un objeto inicial para una categoría apropiada.

Sugerencia: puede ser útil el hecho de que si $\{u_i\}$ es una base de U y $\{v_j\}$ una base de V , entonces el conjunto de todos los elementos $u_i \otimes v_j$ es una base del producto tensorial.

Problema 2 Demuestra que el plano afín $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ satisface la propiedad de Desargues (documentétese el lector sobre el enunio de la misma). Comprueba que el plano afín $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$ no la satisface.

Problema 3 Se ha definido en clase el álgebra de cuaterniones split $\mathbb{H}_s$ como el cociente $\mathbb{H}_s := \text{Ass}_1(\{x, y\})/I$ donde I es el ideal generado por los elementos $x^2 + 1, y^2 - 1, xy + yx$. Demuéstrese que $\mathbb{H}_s \cong \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Problema 4 Sea $B = \{e_i\}_{i=1}^n$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^n$ y denotemos por $\langle x, y \rangle$ el producto escalar euclídeo de $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se define el álgebra de Clifford $\text{Cl}(n)$ como el cociente de la $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa libre con unidad $\text{Ass}_1(B)$ por el ideal I generado por los elementos $e_i e_j + e_j e_i + 2\langle e_i, e_j \rangle$. Denotemos por $\bar{x}$ la clase de equivalencia del elemento $x \in \text{Ass}_1(B)$ en el cociente $\text{Cl}(n) = \text{Ass}_1(B)/I$. Demuéstrese que:

1. $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\bar{x}^2 = -\|x\|^2 \cdot \bar{1}$.
2. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{x} = -2\langle x, y \rangle \cdot \bar{1}$.

Problema 5 En la situación del problema anterior, demuéstrese que $\dim(\text{Cl}(n)) \leq 2^n$ comprobando que el siguiente conjunto de productos es un sistema de generadores de $\text{Cl}(n)$:

$$\overline{e_{i_1}} \cdots \overline{e_{i_k}},$$

donde $i_1 < \cdots < i_k$, y $1 \leq k \leq n$.

Problema 6 Demuéstrese que $\text{Cl}(0) \cong \mathbb{R}$, $\text{Cl}(1) \cong \mathbb{C}$ y que $\text{Cl}(2) \cong \mathbb{H}$. Estúdiese $\text{Cl}(3)$ (encuentre su tabla de multiplicar y analícese la simplicidad de este álgebra. Si es posible encontrar un álgebra conocida a la que $\text{Cl}(3)$ sea isomorfa).

Problema 7 Fiejos un cuerpo F y sea C la categoría de las F -álgebras alternativas. Sea A un objeto de C sin unidad y consideremos la categoría C_A cuyos objetos son las parejas (B, f) tales que B es alternativa con unidad y $f : A \rightarrow B$ un homomorfismo de álgebras. Para dos tales objetos (B_i, f_i) (con $i = 1, 2$) definiremos

$$\text{hom}_{C_A}((B_1, f_1), (B_2, f_2)) := \{\theta \in \text{hom}_C(B_1, B_2) : \theta f_1 = f_2, \theta(1) = 1\}.$$

Compruébese que C_A es una categoría y encuéntrase un objeto inicial en C_A .

Problema 8 Dado un functor $\mathcal{F} : C \rightarrow \mathbf{Set}$, una pareja (R, u) con $R \in \text{Obj}(C)$ y $u \in \mathcal{F}(R)$ diremos que es un elemento universal para $\mathcal{F}$ cuando para cualquiera otra pareja (R', u') con $R' \in \text{Obj}(C)$ y $u' \in \mathcal{F}(R')$, existe una única $f \in \text{hom}_C(R, R')$ tal que $\mathcal{F}(f)(u) = u'$. Demuéstrese que si (R_i, u_i) con $i = 1, 2$ son dos elementos universales para el functor $\mathcal{F}$, entonces existe un isomorfismo $\phi : R_1 \rightarrow R_2$ tal que $\mathcal{F}(\phi)(u_1) = u_2$. Demuéstrese que un elemento universal se puede ver como un objeto inicial en determinada categoría.

Problema 9 Consideremos la aplicación lineal $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Cl}(n)$ tal que $i(e_j) := \bar{e}_j$ para cada $j = 1, \dots, n$. Compruébese que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $i(x)^2 = -\|x\|^2 \bar{1}$. Demuéstrese que $\text{Cl}(n)$ tiene la siguiente propiedad universal: sea A otra $\mathbb{R}$ -álgebra asociativa con unidad, y h una aplicación lineal $h : \mathbb{R}^n \rightarrow A$ verificando $h(x)^2 = -\|x\|^2 1$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces existe un único homomorfismo de álgebras con unidad $f : \text{Cl}(n) \rightarrow A$ haciendo conmutativo el triángulo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{i} & \text{Cl}(n) \\ & \searrow h & \downarrow f \\ & & A \end{array}$$

Enunciar esta propiedad universal en términos de objetos iniciales para una categoría apropiada.

Problema 10 Denotemos por r_θ al elemento

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Demuestra que la aplicación $SO(2) \rightarrow GL(1, \mathbb{R})$ tal que $r_\theta \mapsto e^{at}$ es una representación (trivialmente irreducible) de $SO(2)$ en el espacio $\mathbb{R}$. Demuestra que la inclusión de $SO(2)$ en $GL(2, \mathbb{R})$ es una representación irreducible de $SO(2)$ en el espacio $\mathbb{R}^2$. Comprueba que toda representación de $SO(2)$ en un espacio $\mathbb{R}^n$ con n impar $n \geq 3$ no puede ser irreducible. (Para nota: comprueba que toda representación de $SO(2)$ en un espacio $\mathbb{R}^n$ con n par $n \geq 4$ no puede ser irreducible).

Problema 11 Determínese el grupo de Lie G de la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Problema 12 Demuéstrese que el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ provisto con el producto vectorial habitual, tiene estructura de álgebra de Lie.

Problema 13 Sea F un cuerpo de característica distinta de dos y consideremos el conjunto $X = \{x, y, z\}$, así como la F -álgebra alternativa libre con unidad generada por X (denotada $\text{Alt}_1(X)$). Consideremos el ideal I de $\text{Alt}_1(X)$ generado por los elementos $x^2+1, y^2+1, z^2-1, xy+yx, xz+zx, yz+zy, y(xy)z+z(xy)$. Demuéstrese que $\mathbb{O}_s := \text{Alt}_1(X)/I$ tiene dimensión ocho y complétese la tabla de multiplicar de este álgebra (defínase $t := xy, u := zx, v := zy, w := zt$ y compruébese que las clases de equivalencia de los elementos del conjunto $B = \{1, x, y, t, z, u, v, w\}$ son una base cuya tabla de multiplicar se pide calcular). El álgebra $\mathbb{O}_s$ se llama álgebra de octoniones split sobre el cuerpo F . Sugerencia: demostrar que $\mathbb{O}_s$ es isomorfa al álgebra de las matrices de Zorn sobre F .

Problema 14 Demuéstrese que para toda álgebra asociativa A sobre F , la nueva álgebra de producto $x \circ y := xy + yx$ es un álgebra de Jordan. Este álgebra de Jordan se denotará por A^+ y se llamara en lo sucesivo la simetrizada de A . Conclúyase que cualquier subespacio de A cerrado para el producto $x \circ y$ es también un álgebra de Jordan (por lo tanto una subálgebra de A^+). Como caso particular de la situación anterior, considérese en A una involución $*$: $A \rightarrow A$ (es decir, un antiautomorfismo involutivo). Demuéstrese que el espacio $H(A, *) := \{x \in A : x^* = x\}$ es una subálgebra de A .

Problema 15 Sea $Z \cong \mathbb{O}_s$ el álgebra de las matrices de Zorn o de octoniones split sobre un cuerpo F de característica distinta de dos. Denotemos por $- : \mathbb{O}_s \rightarrow \mathbb{O}_s$ su involución canónica dada por

$$\overline{\begin{pmatrix} \alpha & v \\ w & \beta \end{pmatrix}} := \begin{pmatrix} \beta & -v \\ -w & \alpha \end{pmatrix}.$$

Consideremos el F -espacio $\mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s)$ de todas las matrices 3×3 sobre $\mathbb{O}_s$. Consideremos la aplicación $*$: $\mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s)$ tal que $(a_{ij})^* = (\overline{a_{ji}})$. Consideremos entonces el F -espacio

$$H_3(\mathbb{O}_s, *) := \{x \in \mathcal{M}_3(\mathbb{O}_s) : x^* = x\}.$$

Demuéstrese que se trata de un álgebra de Jordan para el producto $x \cdot y := xy + yx$. Compruébese que su dimensión es 27.

Problema 16 Estúdiese la simplicidad del álgebra de matrices de Zorn sobre el cuerpo de los complejos.

Problema 17 Sea F un cuerpo y A y B dos F -álgebras de dimensión finita. Demostrar que existe una estructura de F -álgebra en el producto tensorial $A \otimes B$ tal que para cualesquiera $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ se tiene $(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$. Dadas las $\mathbb{R}$ -álgebras $\mathbb{C}$ y $\mathbb{H}$ estudiar la $\mathbb{R}$ -álgebra $A := \mathbb{C} \otimes \mathbb{H}$ (encontrar su tabla de multiplicar respecto a una base adecuada, ¿es un álgebra de división? ¿es simple? Encuéntrase un idempotente $e_1 \neq 0, 1$ en A . Siendo $e_2 := 1 - e_1$ determinar los subespacios $e_i A e_j$ con $i, j = 1, 2$. Comprobar que $A = \bigoplus_{i,j} e_i A e_j$ siendo $\dim(e_i A e_j) = 2$.

Problema 18 Sea X un conjunto $X = \{e, f, h\}$, F un cuerpo y $\mathcal{L}ie(X)$ la F -álgebra de Lie libre generada por el conjunto X . Sea I el ideal de $\mathcal{L}ie(X)$ generado por los elementos $[h, h]$, $[h, e] - 2e$, $[h, f] + 2f$, $[e, f] - h$. Sea ahora $L = \mathcal{L}ie(X)/I$. Calcula $\dim(L)$. Demuestra que L es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(s, F)$ de las matrices 2×2 de traza nula.

Problema 19 Sea F un cuerpo. Dada una F -álgebra A se define A^- como aquella F -álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es el mismo de A y cuyo producto viene dado por $[x, y] := xy - yx$ para cualesquiera $x, y \in A$. Demuéstrese que cuando A es asociativa A^- es de Lie. Demuéstrese también que si A es alternativa y F de característica tres entonces también A^- es de Lie.

Problema 20 Dada la R -álgebra universal $\mathcal{U}(X)$ con $X \neq \emptyset$ definimos $\mathcal{U}_1(X) := R \times \mathcal{U}(X)$ con operaciones de suma y producto por escalares por componentes. El producto viene dado por

$$(r, z)(r', z') := (rr', rz' + r'z + zz')$$

para cualesquiera $r, r' \in R$, $z, z' \in \mathcal{U}(X)$. Definamos la aplicación $J : \mathcal{U}_1(X)^3 \rightarrow \mathcal{U}_1(X)$ tal que $J(a, b, c) := (ab)c + (bc)a + (ca)b$ para cualesquiera $a, b, c \in \mathcal{U}_1(X)$. Sea I el ideal de $\mathcal{U}_1(X)$ generado por todos los elementos a^2 y $J(a, b, c)$ con $a, b, c \in \mathcal{U}_1(X)$. Demuéstrese que $I = \mathcal{U}_1(X)$.

Sugerencia el álgebra cociente $\mathcal{U}_1(X)/I$ es un álgebra de Lie con unidad.