REPRESENTACIONES DE GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

Notaciones y resultados previos:

- Sea K cuerpo y V espacio vectorial sobre K.

Consideremos $\boxed{End_K(V) = \{T: V \to V \mid T \text{ es lineal}\}}$.

Se tiene que $End_K(V)$ es un K-esp. vectorial.

$$\begin{aligned} End_K(V) \times End_K(V) &\longrightarrow End_K(V) \\ (T_1, T_2) &\longmapsto T_1 \cdot T_2 := T_1 \circ T_2 \end{aligned}$$

Con este producto, $End_K(V)$ es una K-álgebra asociativa.

Si $\dim(V) = n < \infty$. Entonces $\boxed{\begin{aligned} End_K(V) &\cong M_n(K) \\ T &\longmapsto M_B(T) \end{aligned}}$

Siendo $M_B(T)$ la matriz de T respecto a una base B previamente fijada.

Sea A una K-álgebra, una <u>representación</u> de A en un K-esp. vectorial V es

$$\rho: A \longrightarrow End_K(V)$$

homomorfismo de álgebras.

" Se trata de representar los elementos del álgebra A como matrices".

Dada una representación, se puede dotar a V de estructura de A-módulo:

$$\begin{aligned} A \times V &\longrightarrow V \\ (a, v) &\longmapsto a \cdot v := \rho(a)(v) \end{aligned}$$

Esto dota a V de estructura de A-módulo.

Recíprocamente, si V (que es un K-esp. vectorial) es un A-módulo, tenemos $A \times V \longrightarrow V$ y podemos definir
$$\rho : A \longrightarrow End_K(V)$$
$$a \longmapsto \rho(a) : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto a \cdot v$$
$$\boxed{\rho(a)(v) := a \cdot v}$$
resulta que ρ es una representación de A.
Se dice que una representación ρ es irreducible sii V es un A-módulo simple.

- Sea G grupo, K cuerpo y V esp. vectorial sobre K.

$GL(V) := End_K(V)^* = End_K(V)^{\times}$ = conjunto de los elementos inversibles de $End_K(V)$ = = automorfismos de esp. vectorial $V \to V$.

Es decir, $\boxed{GL(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ lineal y biyectiva}\}}$

Tiene estructura de grupo con la composición.

Si $\dim(V) = n < \infty$. Entonces $End_K(V) \cong M_n(K)$

Por tanto, $GL(V) \cong GL_n(K)$ = grupo de matrices $n \times n$ inversibles.

A $GL(V)$ lo llamamos grupo general lineal de V.

Una representación de G en el espacio V será un homomorfismo de grupos $\rho : G \longrightarrow GL(V)$.

Si $\dim(V) = n < \infty$, $\rho : G \longrightarrow GL_n(K)$

"Se trata de asociar a cada elemento del grupo una matriz y así identificar G con un grupo de matrices".

Dada una representación $\rho: G \to GL(U)$ del grupo G, podemos definir

$$G \times U \longrightarrow U$$
$$(g, u) \longmapsto g \cdot u := \rho(g)(u)$$

Esta acción tiene las propiedades:

- $g(u_1 + u_2) = g \cdot u_1 + g u_2 \quad \forall g \in G,\ \forall u_1, u_2 \in U.$
- $g(\lambda u) = \lambda (g u) \quad \forall g \in G,\ \forall \lambda \in K,\ \forall u \in U.$
- $g_1(g_2 u) = (g_1 g_2) u \quad \forall g_1, g_2 \in G,\ \forall u \in U.$
- $1 \cdot u = u \quad \forall u \in U.$

En este caso, se dice que U es un G-módulo.

Recíprocamente, si partimos de $G \times U \to U$ una estructura de G-módulo en U, podemos definir

$$\rho: G \longrightarrow GL(U)$$
$$g \longmapsto \rho(g): U \longrightarrow U$$
$$u \longmapsto g \cdot u$$

$$\boxed{\rho(g)(u) = g \cdot u}$$

Se tiene que ρ es una representación de G en el espacio U.

Se dice que ρ es irreducible si U es un G-módulo simple.

Ejemplo: Sea $\mathbb{H}$ = álgebra de los cuaterniones reales de división.

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$$
$$(a,b)(c,d) = (ac - \bar{b}d,\ \bar{a}d + cb)$$

Observemos que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$ y $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) = 2$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente.

Otra definición de $\mathbb{H}$ es:

$$\boxed{\mathbb{H} = \mathbb{R}\{1, i, j, k\}}$$ = espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con base canónica $\{1, i, j, k\}$

Con la siguiente tabla de multiplicación:

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Vamos a ver una representación de $\mathbb{H}$:

Los cuaterniones son de la forma

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \quad \text{con } \lambda_i \in \mathbb{R} \ \ i = 0, \dots, 3.$$

Sea A una K-álgebra asociativa, $1 \in A$.
$V = A$ como esp. vectorial subyacente de A.

En nuestro caso, $A = \mathbb{H}$ y $V = \mathbb{R}^4$.

Consideremos

$$\begin{aligned} \rho : A &\longrightarrow \mathrm{End}_K(V) \\ a &\longmapsto \rho(a) : V \longrightarrow V \\ &\qquad\qquad\quad v \longmapsto a \cdot v \end{aligned}$$

$$\rho(a)(v) = a \cdot v$$

es un homomorfismo de K-álgebras, por tanto es una representación de A en V.

Si además $\dim(A) = n$, $\dim(V) = n$, se tiene

$$\mathrm{End}_K(V) \cong M_n(K)$$

Por tanto, $\rho : A \longrightarrow M_n(K)$. Esto se llama representación adjunta.

Apliquemos lo anterior a $\mathbb{H}$: $A = \mathbb{H}$, $V = \mathbb{R}^4$.

$$\rho : \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$$

$B = \{1, i, j, k\}$ base de $\mathbb{H}$.

$$\mathbf{1} \longmapsto I_4$$

$$i \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Matriz $\rho(i)$ relativa a la base B

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(i) : V \longrightarrow V \\ \quad 1 \longmapsto i\cdot 1 = i \quad \text{coordenadas } (0\,1\,0\,0) \\ \quad i \longmapsto i \cdot i = -1 \quad \text{coordenadas } (-1\,0\,0\,0) \\ \quad j \longmapsto i \cdot j = k \quad \text{coordenadas } (0\,0\,0\,1) \\ \quad k \longmapsto i \cdot k = -j \quad \text{coordenadas } (0\,0\,-1\,0) \end{array}\right.$$

$$j \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(j) : V \longrightarrow V \\ \quad 1 \longmapsto j \cdot 1 = j \rightsquigarrow (0\,0\,1\,0) \\ \quad i \longmapsto j \cdot i = -k \rightsquigarrow (0\,0\,0\,-1) \\ \quad j \longmapsto j \cdot j = -1 \rightsquigarrow (-1\,0\,0\,0) \\ \quad k \longmapsto j \cdot k = i \rightsquigarrow (0\,1\,0\,0) \end{array}\right.$$

$$k \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho(k) : V \longrightarrow V \\ \quad 1 \longmapsto k \cdot 1 = k \rightsquigarrow (0\,0\,0\,1) \\ \quad i \longmapsto k \cdot i = j \rightsquigarrow (0\,0\,1\,0) \\ \quad j \longmapsto k \cdot j = -i \rightsquigarrow (0\,-1\,0\,0) \\ \quad k \longmapsto k \cdot k = -1 \rightsquigarrow (-1\,0\,0\,0) \end{array}\right.$$

Esta es la representación adjunta de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{R}^4$.

Podríamos definir $\mathbb{H}$ como

$$\mathbb{H} = \{ \lambda_0 I_4 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \mid \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \}$$

siendo I_4 = identidad 4×4

$$i = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right); \quad j = \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right); \quad k = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{array}\right)$$

Por tanto,

$$q = \lambda_0 I_4 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \hline \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{array}\right)$$ "modelo de cuaternion"!

El determinante de la matriz anterior es $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Por tanto, siempre será inversible salvo que se trate de la matriz nula. Esto quiere decir que

$$q \neq 0 \Rightarrow q \text{ inversible}$$

luego $\mathbb{H}$ es un álgebra de división (todo elemento no nulo tiene inverso).

Al representar un álgebra como matrices le podemos aplicar al álgebra toda la teoría del álgebra lineal.

Preliminares:

Definición. Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se dice que es <u>normado</u> si existe $\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $v \longmapsto \|v\|$ de manera que:

- $\|v+v'\| \leq \|v\| + \|v'\| \quad \forall v, v' \in V$.
- $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

  - Si V es esp. vectorial sobre $\mathbb{R}$: $|\lambda|$ = valor absoluto de $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - Si V es esp. vectorial sobre $\mathbb{C}$: $|\lambda|$ = módulo de $\lambda \in \mathbb{C}$.

A la aplicación $\|\cdot\|$ se le llama <u>norma</u>. Se tiene que la norma define una <u>topología en V</u>:

$O \subset V$ se dice abierto si para todo $x \in O$ $\exists \mathring{B}(x, \varepsilon) \subset O$ donde $\mathring{B}(x,\varepsilon) = \{y \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$

Por tanto, todo espacio normado es un espacio topológico.

Definición. Si V es un espacio normado tal que toda sucesión de Cauchy es convergente diremos que V es un espacio normado completo o espacio de <u>Banach</u>.

Definición. Un álgebra A sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se dice que es <u>normada</u> si es un espacio normado.

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Si además, es un espacio de Banach diremos que A es un álgebra de <u>Banach</u>.

Ejemplos de álgebras de Banach:

- $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$
- $\mathbb{C}$, $\|x\| = \sqrt{a^2+b^2}$ siendo $x = a+bi$
- $\mathbb{H}$, $\|x\| = \sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$ siendo $x = \lambda_0 1+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 K$
- $A = M_n(\mathbb{R})$; $x = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$

Aplicación exponencial:

- Sobre $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^{\times} = \text{inversibles de } \mathbb{R}. \\ x &\longmapsto e^x \\ 0 &\longmapsto e^0 = 1 \end{aligned}$$

Se verifica que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

Por tanto, $\exp: (\mathbb{R},+) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\times},\cdot)$ es un homomorfismo de grupos.

- Sea A un álgebra de Banach real,

$$\begin{aligned} \exp: A &\longrightarrow A^{\times} = \text{inversibles de } A. \\ 0 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Recordemos que $e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$ tiene radio de convergencia ∞. Es decir, es válido $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sea ahora $x \in A$.

$$¿\, 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \text{ es convergente?}$$

Consideremos $S_n = 1+\frac{x}{1!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, queremos ver si $\{S_n\}$ es convergente, o lo que es lo mismo si $\{S_n\}$ es de Cauchy, es decir,

$$¿\, \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \,/\, \forall p,q \geq N \text{ se tiene } \|S_p - S_q\| < \varepsilon\, ?$$

- Si $p = q$, $\|S_p - S_q\| = 0 < \varepsilon$
- Sin pérdida de generalidad suponemos $p > q$.

Entonces $S_p = S_q + \frac{x^{q+1}}{(q+1)!} + \dots + \frac{x^p}{p!}$.

Por tanto, $\|S_p - S_q\| = \|\sum_{i=q+1}^{p} \frac{x^i}{i!}\| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \|\frac{x^i}{i!}\| =$

$$= \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x^i\|}{i!} \underset{\|ab\| \leq \|a\|\|b\|}{\leq} \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x\|^i}{i!}.$$

Tenemos que $\boxed{\|S_p - S_q\| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x\|^i}{i!}}$

Sea $x \in A$, $\|x\| \in \mathbb{R}$, $e^{\|x\|} = 1 + \frac{\|x\|}{1!} + \frac{\|x\|^2}{2!} + \dots$ convergente.

Es decir, $\{T_n\}$ siendo $T_n = 1 + \frac{\|x\|}{1!} + \dots + \frac{\|x\|^n}{n!}$ es convergente. Luego, $\{T_n\}$ es de Cauchy.

Esto es, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \mid \forall p, q \geq N$ se tiene $|T_p - T_q| < \varepsilon$.

$$\boxed{|T_p - T_q| = \frac{\|x\|^{q+1}}{(q+1)!} + \dots + \frac{\|x\|^p}{p!} = \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x\|^i}{i!}.}$$

Por tanto, $\|S_p - S_q\| = |T_p - T_q| < \varepsilon$.

Resultado: Para todo $x \in A$, siendo A álgebra de Banach real, se tiene que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ es } \underline{\text{convergente}}.$$

Si definimos $\exp: A \longrightarrow A$

$$x \longmapsto \exp(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

No siempre ocurre que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
Se puede comprobar que esa propiedad falla en el caso $A = M_2(\mathbb{R})$.

Teorema. Si A es álgebra de Banach y $x, y \in A$ / $\underline{xy = yx}$. Entonces $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).}$

Idea de la demostración:

$$(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 \overset{xy=yx}{=} x^2 + y^2 + 2xy.$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

$$\exp(x)\exp(y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \left(\frac{y^2}{2!} + xy + \frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{y^3}{3!} + \frac{xy^2}{2!} + \frac{x^2y}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{y^2 + 2xy + x^2}{2!} + \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{3!} + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots = \exp(x+y)$$

Corolario. Para todo $x \in A$, $\exp(x) \in A^{\times}$.

<u>Demostración:</u> Sea $x \in A$, entonces $-x \in A$ y $x(-x) = (-x)x = -x^2$. Luego $\exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$

Por tanto, $\begin{cases} 1 = \exp(x)\exp(-x) \\ 1 = \exp(-x)\exp(x) \end{cases}$

Y se tiene que $\exp(x)$ es inversible y $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$.

Definición: Traza de una aplicación lineal.

Sea U esp. vectorial sobre un cuerpo K con $\dim(U)=n<\infty$. Consideremos $T: U\to U$ lineal, y fijemos una base $\mathcal{B}$ de U.

Llamemos $M=M_{\mathcal{B}}(T)$ a la matriz de T relativa a $\mathcal{B}$.

Supongamos $M=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, se define la traza de T como

$$\boxed{tr(T)=tr(M)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

Veamos que la definición no depende de la base elegida:

1) Dada $M=(a_{ij})$, $tr(M)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

2) Dadas $M,N\in M_n(K)$, $tr(MN)=tr(NM)$.

Demostración:

Sea $M=(a_{ij})$, $N=(b_{ij})$

$MN=(c_{ij})$ donde $c_{ij}=\sum_{k} a_{ik}b_{kj}$.

$NM=(d_{ij})$ donde $d_{ij}=\sum_{k} b_{ik}a_{kj}$.

$tr(MN)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ y $tr(NM)=\sum_{i=1}^{n} d_{ii}$

$tr(MN)=\sum_{i=1}^{n} c_{ii}=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

$tr(NM)=\sum_{i=1}^{n} d_{ii}=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}=\sum_{i,q=1}^{n} b_{iq}a_{qi}=$

$=\sum_{k,q=1}^{n} b_{kq}a_{qk}=\sum_{k,i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}=tr(MN)$

3) Si P es inversible, $tr(PMP^{-1}) = tr(M)$ $\forall M$.

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } A = PM \\ \phantom{\text{Sea }} B = P^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow tr(PMP^{-1}) = tr(AB) = tr(BA) = $$
$$= tr(P^{-1}PM) = tr(M).$$

4) Veamos ahora que la traza de una aplicación lineal no depende de la base elegida.

Sea $T: V \longrightarrow V$ lineal.

Consideremos una base B y $M = M_B(T)$.

Sea B' otra base de V y $M' = M_{B'}(T)$.

Se tiene que $M' = PMP^{-1}$ donde P es la matriz del cambio de base (que es inversible).

Por tanto, $tr(M') = tr(PMP^{-1}) = tr(M)$.

Luego la definición es correcta.

Proposición. Dada $T: V \longrightarrow V$ lineal y B, B' bases de V con $M = M_B(T)$, $M' = M_{B'}(T)$, respectivamente. Se tiene que $\det(M) = \det(M')$.

<u>Demostración</u>:

Como $M' = PMP^{-1}$ para cierta P. Entonces

$\det(M') = \det(P)\det(M)\det(P^{-1}) = \det(M)$.

Por tanto, las definiciones

- $tr(T) := tr(M_B(T))$
- $\det(T) := \det(M_B(T))$

son definiciones invariantes por cambio de base.

Teorema. Para toda matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ se tiene que

$$\boxed{e^{tr(M)} = \det(e^M)}$$

<u>Demostración</u>:

<u>CASO 1)</u> Si M es diagonal. $M = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n).$

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots$$

Se tiene que $M^K = \mathrm{diag}(a_1^K, \dots, a_n^K)$, $\forall K > 0$.

Por tanto,

$$e^M = \begin{pmatrix} 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} + \cdots & & & \\ & 1 + a_2 + \frac{a_2^2}{2!} + \frac{a_2^3}{3!} + \cdots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + a_n + \frac{a_n^2}{2!} + \frac{a_n^3}{3!} + \cdots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & e^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

Luego, $\det(e^M) = e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdots e^{a_n} = e^{a_1 + \cdots + a_n} = e^{tr(M)}$

<u>CASO 2)</u> M es diagonalizable. Es decir, $M = PDP^{-1}$ siendo D matriz diagonal.

Por tanto, $\det(e^P) = e^{tr(D)}$

Observemos que $M^K = PD^KP^{-1}$ $\forall K > 0$. Luego,

$$e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \cdots = I + PDP^{-1} + \frac{PD^2P^{-1}}{2!} + \frac{PD^3P^{-1}}{3!} + \cdots =$$

$$= P\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \cdots\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1}$$

Por lo que, $\det(e^M) = \det(e^D) = e^{tr(D)} = e^{tr(M)}$

CASO 3) En general, el conjunto de las matrices diagonalizables es denso en $M_n(\mathbb{C})$. Es decir, Dado $\varepsilon > 0$ y $X \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists x' \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalizable/ $\| X - X' \| < \varepsilon$. O dicho de otro modo, $\forall x \in M_n(\mathbb{C})$

$$X = \lim_{n \to \infty} X_n \text{ siendo } X_n \text{ diagonalizable.}$$

Se tiene $e^{tr(X)} = e^{tr(\lim_{n\to\infty} X_n)} \underset{\uparrow}{=} e^{\lim_{n\to\infty} tr(X_n)} =$

$\left(\begin{array}{l} tr: M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \text{es continua porque} \\ \text{es lineal} \end{array} \right)$

$\underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} e^{tr(X_n)} =$

$\left(\begin{array}{l} \text{exp. es} \\ \text{continua} \end{array} \right) = \lim_{n\to\infty} \det(e^{X_n}) =$

$\underset{\uparrow}{=} \det\left(\lim_{n\to\infty} e^{X_n} \right) = \det\left(e^{\lim_{n\to\infty} X_n} \right) = \det(e^X)$

$\left(\begin{array}{l} \text{det. es} \\ \text{continua} \end{array} \right)$

Grupos de Lie:

Motivación histórica. En teoría de Galois $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}[x]$ es irreducible en $\mathbb{Q}$. Luego, $K = \mathbb{Q}[x]/_{(x^2-3)}$ es cuerpo. Se tiene que,

$$K \cong \{ \alpha + \beta\sqrt{3} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \}$$

Observemos que $\mathbb{Q} \subset K$. Por lo que K es extensión de $\mathbb{Q}$. Además, K es cuerpo de descomposición de $x^2 - 3$ sobre $\mathbb{Q}$.

Se define $Gal(K/\mathbb{Q}) = Aut_{\mathbb{Q}}(K)$ como los automorfismos de K que son $\mathbb{Q}$-lineales.

Sea $\sigma: K \to K$ automorfismo que sea $\mathbb{Q}$-lineal.

$\{1, \sqrt{3}\}$ es base de K como $\mathbb{Q}$ esp. vectorial

$$\begin{aligned} \sigma : K &\longrightarrow K \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \sqrt{3} &\longmapsto \varepsilon \in K \ / \ \varepsilon^2 = 3 \end{aligned}$$

En $K = \{\alpha + \beta\sqrt{3} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ solo hay dos elementos $\varepsilon \ / \ \varepsilon^2 = 3$, estos son, $\varepsilon = \pm\sqrt{3}$.

Llamemos, $\begin{aligned} \sigma_1 : K &\longrightarrow K \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \sqrt{3} &\longmapsto \sqrt{3} \end{aligned}$ $\qquad \begin{aligned} \sigma_2 : K &\longrightarrow K \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \sqrt{3} &\longmapsto -\sqrt{3} \end{aligned}$

$$\sigma_1 = Id_K \qquad \sigma_2(\alpha + \beta\sqrt{3}) = \alpha - \beta\sqrt{3}$$

Por tanto, $Aut_{\mathbb{Q}}(K) = \{Id_K, \sigma_2\} \cong \mathbb{Z}_2 = Gal(K/\mathbb{Q})$

Llamemos $G = Gal(K/\mathbb{Q})$.

Consideremos $V = \{\alpha\sqrt{3} - \beta\sqrt{3} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ el espacio generado por las soluciones de la ecuación en K.

G actúa sobre V: $G \times V \longrightarrow V$

$$Id_K \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \ ; \ Id_K \cdot (-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$
$$\sigma_2 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3} \ ; \ \sigma_2 \cdot (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$$

Se puede ver que esto define una estructura de G-módulo en V. Se tiene entonces una representación de G en el espacio V.

$$\rho : G \longrightarrow GL(V).$$

Sophus Lie pensó en aplicar la teoría de Galois para las ecuaciones diferenciales, apareciendo una teoría de Galois diferencial.

Ideas de Sophus Lie:

Consideremos la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

siendo x e y dos variables reales.
Sean s, t dos nuevas variables con

$$\begin{cases} s=a_{11}x+a_{12}y \\ t=a_{21}x+a_{22}y \end{cases}$$

Por tanto, el cambio consiste en una aplicación

$$T:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y)\longmapsto (s,t)$$

lineal y biyectiva. Luego, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ matriz inversible.

Consideremos $GL_2(\mathbb{R})$ = matrices inversibles reales 2x2.
Hagamos el cambio de variable:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=a_{11}\frac{\partial f}{\partial s}+a_{21}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=a_{12}\frac{\partial f}{\partial s}+a_{22}\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Como lo anterior es válido para toda f, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}=a_{11}\frac{\partial}{\partial s}+a_{21}\frac{\partial}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial}{\partial y}=a_{12}\frac{\partial}{\partial s}+a_{22}\frac{\partial}{\partial t}.$$

- $\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\left(a_{11}\frac{\partial}{\partial s}+a_{21}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2=a_{11}^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}+a_{21}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$
- $\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\left(a_{12}\frac{\partial}{\partial s}+a_{22}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2=a_{12}^2\frac{\partial^2}{\partial s^2}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+2a_{12}a_{22}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$

Sumando lo anterior:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=(a_{11}^2+a_{12}^2)\frac{\partial^2}{\partial s^2}+(a_{21}^2+a_{22}^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+$$
$$+2(a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22})\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}.$$

Supongamos que

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}^2+a_{12}^2=1 \\ a_{21}^2+a_{22}^2=1 \\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

Es decir, ese cambio de variable no modifica la forma de la ecuación diferencial.

El conjunto de cambios de variable que no modifican la ecuación de Laplace viene dado por todas las matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \,\middle/\, \begin{array}{l} a_{11}^2+a_{12}^2=1 \\ a_{21}^2+a_{22}^2=1 \\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0 \end{array} \right\}$$

Esto es $O(2)$ = matrices ortogonales 2×2 sobre $\mathbb{R}$.

Pues las condiciones son equivalentes a que se verifique $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En este caso, el grupo que Sophus Lie encontró es $O(2)$. De la misma manera, se puede hacer para cualquier ecuación diferencial. En concreto, Sophus Lie se dio cuenta de que para toda EDP existe un grupo de cambios de variable que no modifican la forma de la EDP. Siempre es un subgrupo del grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$. A este grupo se le suele llamar el grupo de simetrías de la EDP.

Este grupo juega un papel similar al del grupo de Galois de una ecuación algebraica. En este caso, la ecuación será integrable si el grupo es soluble.

Dada una EDP, tenemos G grupo de matrices. Veamos si G actua sobre el espacio de soluciones de la EDP.

Consideremos el operador $\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}}$

Sea V= espacio de funciones C^∞.

$$\begin{aligned} \Delta : V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$ son lineales, entonces Δ es lineal.

Resolver la ecuación de Laplace, es equivalente a encontrar $\underline{Ker(\Delta)} = \{ f \in V \mid \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \}$.

Llamemos $S := Ker(\Delta)$ = espacio de soluciones de la ecuación de Laplace.

Veamos que $O(2)$ actua en S:

Sea $f(x,y) \in S$.

Sea $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$ y consideremos

$f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$. Se demuestra que la nueva función vuelve a ser solución de la EDP.

Por tanto, $O(2) \times S \longrightarrow S$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot f(x,y) \longmapsto f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$$

Luego tenemos una representación $\rho: O(2) \to GL(S)$ del grupo de simetrías de la EDP (en nuestro caso $O(2)$) en el espacio de soluciones de la misma. De esta forma, el álgebra de Lie se aplica en la física de partículas. Pues,

dada EDP $\longrightarrow$ sus grupos de simetrías son no triviales.

Por tanto, estudiando las representaciones irreducibles de esos grupos obtenemos información sobre las soluciones.

Definición: Grupo de Lie (lineal).
Un grupo G se dice que es un grupo de Lie lineal si es un <u>subgrupo cerrado de un $GL_n(\mathbb{R})$</u>.

<u>Aclaración:</u> $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ = álgebra de Banach. Por tanto, tiene una topología (completa) y $GL_n(\mathbb{R})$ hereda una topología que le viene de $M_n(\mathbb{R})$.
El hecho de que G sea cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$ es equivalente a que:
Si $\{x_n\}$ es una sucesión de elementos de G con $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in GL_n(\mathbb{R})$. Entonces, $x \in G$.

<u>Ejemplos:</u>

1) $\boxed{G := SL_n(\mathbb{R}) = \{m \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(m) = 1\}}$
llamado grupo especial lineal.
Veamos que se trata de un grupo de Lie.
Es decir, veamos que es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$.

Consideremos la aplicación $\det: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$
$$m \longmapsto \det(M) = |M|$$

Se tiene que det es una aplicación continua pues se trata de un polinomio en los coeficientes de la matriz.

Como $SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\})$, entonces $SL_n(\mathbb{R})$ es un cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$ al ser la imagen inversa por la aplicación continua det del cerrado $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

2) $\boxed{O(2) = O_2(\mathbb{R}) = O(2:\mathbb{R}) = \{m \in GL_2(\mathbb{R}) \mid mm^t = I_2\}.}$

llamado grupo ortogonal.

(En general, $O(n) = \{m \in GL_n(\mathbb{R}) \mid mm^t = I_n\}$.)

Veamos que $O(2)$ es un grupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$.

Sea $m \in O(2)$ con $m = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Entonces $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto,
$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1, ac+bd = 0 \right\}.$$

Consideremos la aplicación
$$\Theta: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a^2+b^2-1, c^2+d^2-1, ac+bd)$$

Se tiene que Θ es continua al ser polinómicas sus componentes. Además, $O(2) = \Theta^{-1}(0,0,0)$ es la imagen inversa del cerrado $\{(0,0,0)\}$. Luego, $O(2)$ es cerrado.

Observación: En general, todo grupo formado por las matrices que satisfacen un sistema de ecuaciones algebraicas es cerrado.

Como $O(n) = \{m \mid mm^t = I_n\}$ y la condición $mm^t = I_n$ se traduce en un sistema de ecuaciones algebraicas de segundo grado, se tiene que $O(n)$ es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$ y por tanto, un grupo de Lie.

3) $\boxed{SO(n) = \{m \in O(n) \mid \det(m) = 1\}}$

llamado grupo especial ortogonal.

Se demuestra de forma análoga a los casos anteriores que es grupo de Lie.

4) $\boxed{U(n) = \{m \in M_n(\mathbb{C}) \mid mm^* = I_n\}}$

llamado grupo unitario.

Donde, si $m = (a_{ij})$ entonces $m^* = (\overline{a_{ji}})$

Veamos que se trata de un grupo de Lie.

Consideremos $\Omega : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$

$$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Omega((a+bi)(c+di)) = \Omega((ac-bd)+i(ad+bc)) =$$

$$= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} =$$

$$= \Omega(a+bi)\,\Omega(c+di)$$

Se tiene entonces que Ω es un monomorfismo de álgebras y por tanto la aplicación dada por

$$M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$$
$$(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \longmapsto (\Omega(a_{ij}))_{i,j=1}^{n}$$

es monomorfismo de álgebra. Por lo que $U(n)$ se identifica con un subgrupo de matrices (inversibles) de $M_{2n}(\mathbb{R})$, en particular se tiene que $U(n) \leq GL_{2n}(\mathbb{R})$.

Además, si traducimos la condición $mm^* = I_n$ a un sistema tenemos un sistema de ecuaciones algebraicas. Luego, $U(n)$ es grupo de Lie.

5) $\boxed{SU(n) = \{ m \in U(n) \mid \det m = 1 \}} \leq U(n)$

llamado grupo especial unitario.

Se demuestra que es grupo de Lie.

6) Grupo simpléctico.

Sea $m = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \overset{n}{\dots}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ = matriz simpléctica 2×2 (sobre $\mathbb{R}$).
- m = matriz simpléctica $2n \times 2n$ (sobre $\mathbb{R}$).

Sea $\boxed{Sp_{2n}(\mathbb{R}) = \{ X \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid X m X^t = m \}}$.

- Dados $x_1, x_2 \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ $(x_1 m x_1^t = m,\ x_2 m x_2^t = m)$

$(x_1 x_2) m (x_1 x_2)^t = x_1 \underbrace{x_2 m x_2^t}\, x_1^t = x_1 m x_1^t = m$

Luego, $x_1 x_2 \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$.

- Sea $x \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ $(xmx^t = m)$.

  Como $xmx^t = m$, entonces $x^{-1}xmx^t = x^{-1}m$

  y $x^{-1}\underbrace{xmx^t}\, x^{-t} = x^{-1}mx^{-t}$

  Por otro lado, $x^{-1}xmx^t x^{-t} = ImI = m$

  Por tanto, $x^{-1} \in Sp_2(\mathbb{R})$.

Luego, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ es cerrado para la multiplicación y el inverso, de lo que se deduce que $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ es subgrupo de $M_{2n}(\mathbb{R})$.

Además, la condición $xmx^t = m$ da luga a un sistema de ecuaciones algebraicas. Por tanto, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

Observación: Todos estos grupos de Lie que hemos visto tienen una versión de "endomorfismos".

- $\boxed{GL_n(\mathbb{R})}$

  Sea U esp. vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim(U) = n$

  $GL(U) = \{T : U \longrightarrow U \mid T$ lineal y biyectiva$\}$

  Se tiene $\begin{aligned} GL(U) &\cong GL_n(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto M_B(T) \end{aligned}$

  siendo B cualquier base prefijada.

- $\boxed{SL_n(\mathbb{R})}$

  $SL(U) = \{T \in GL(U) \mid \det(T) = 1\}$

  Se tiene $\begin{aligned} SL(U) &\cong SL_n(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto M_B(T). \end{aligned}$

• $\boxed{O(n)}$

Sea $U=\mathbb{R}^n$ provisto de su producto escalar euclídeo

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v,w) &\longmapsto \langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i \end{aligned}$$

siendo $u=(v_1,\dots,v_n)$ y $v=(w_1,\dots,w_n)$

$(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo.

$O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)=\{T\in GL(U) \mid \langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle \ \forall x,y\in U\}$

- Dadas $T_1,T_2\in O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$,

  $\langle T_1T_2(x),T_1T_2(y)\rangle = \langle T_2(x),T_2(y)\rangle=\langle x,y\rangle$

  Por tanto, $T_1T_2\in O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

- Sea $T\in O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$, entonces

  $\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle \quad \forall x,y\in U$.

  Llamemos $a=T(x)$, $b=T(y)$, se tiene

  $\langle a,b\rangle=\langle T^{-1}(a),T^{-1}(b)\rangle$.

  Por tanto, $T^{-1}\in O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Luego $O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es cerrado para la composición y para el inverso por lo que tiene estructura de grupo.

Sea $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canónica de $U=\mathbb{R}^n$.

Consideremos

$$\begin{aligned} O(U,\langle\cdot,\cdot\rangle) &\longrightarrow O(n) \\ T &\longmapsto M_B(T) \end{aligned}$$

Vamos a hallar la matriz de T en B:

$$\begin{cases} T(e_1)=a_{11}e_1+\cdots+a_{1n}e_n \\ \vdots \\ T(e_n)=a_{n1}e_1+\cdots+a_{nn}e_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_B(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ "Matriz de T relativa a B (por filas)"

Queremos demostrar que $M_B(T)$ es ortogonal.

Como $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in V$.

En particular $\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle \quad \forall i,j = 1,\dots,n$.

$$T(e_i) = \sum_k a_{ik} e_k \quad , T(e_j) = \sum_q a_{jq} e_q$$

$$\langle T(e_j), T(e_j)\rangle = \langle \sum_k a_{ik} e_k , \sum_q a_{jq} e_q \rangle =$$

$$= \sum_{k,q} a_{ik} a_{jq} \langle e_k, e_q\rangle = \sum_{k,q} a_{ik} a_{jq} \delta_{kq} =$$

$$= \sum_k a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$$

Es decir, $$i \to \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

lo que se traduce en $M_B(T) \cdot M_B(T)^t = I_n$.

Tenemos el isomorfismo
$$\begin{aligned} End(V) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ T &\longmapsto M_B(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GL(V) &\longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \\ SL(V) &\longrightarrow SL_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

y la restricción
$$\begin{aligned} O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) &\longrightarrow O(n) \\ T &\longmapsto M_B(T) \end{aligned}$$

Por tanto, se trata de un isomorfismo de grupos. y es la versión del grupo ortogonal para aplic. lineales.

ÁLGEBRAS DE LIE

Definición: Un álgebra de Lie L es un álgebra sobre un cuerpo K tal que la multiplicación de dos elementos $x,y \in L$ se denota $[x,y]$ y verifica que:

1) Identidad anticonmutativa: $[x,x]=0 \ \forall x \in L$.

2) Identidad de Jacobi: $\forall x,y,z \in L$

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0.$$

• Estas álgebras generalmente no son asociativas ($[[x,y],z] \neq [x,[y,z]]$)

• La identidad anticonmutativa se llama así porque dados $a,b \in L$ cualesquiera y llamando $x=a+b$ se tiene que $[x,x]=[a+b,a+b]=$

$$= \underbrace{[a,a]}_{0}+[a,b]+[b,a]+\underbrace{[b,b]}_{0}=0$$

Por tanto, $[a,b]=-[b,a]$.

Supongamos ahora que $[a,b]=-[b,a] \ \forall a,b \in L$. Si $a=b$, entonces $[a,a]=-[a,a]$, por lo que $2[a,a]=0$.

Así, si K es cuerpo base con característica distinta de 2, podemos simplificar y nos queda que $[a,a]=0 \ \forall a \in L$.

Ejemplos:

1) A un álgebra asociativa sobre K cuerpo. En V= esp. vectorial subyacente de A definimos la nueva multiplicación:

$[x,y] = xy - yx \quad \forall x, y \in V$

donde xy denota la multiplicación en A.

Veamos que $(A, [\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

1) $[x,x]=0 \quad \forall x \in A$ ya que

$[x,x] = x^2 - x^2 = 0$

2) $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] =$

$= [xy-yx, z] + [yz-zy, x] + [zx-xz, y] =$

$= (xy-yx)z - z(xy-yx) + (yz-zy)x - x(yz-zy)$

$+ (zx-xz)y - y(zx-xz) = \cancel{xyz} - \cancel{yxz} - \cancel{zxy} + \cancel{zyx}$

$+ \cancel{yzx} - \cancel{zyx} - \cancel{xyz} + \cancel{xzy} + \cancel{zxy} - \cancel{xzy} - \cancel{yzx} + \cancel{yxz} = 0$

Por tanto, $(A, [\cdot,\cdot])$ es álgebra de Lie con $[x,y] = xy - yx$ y no es asociativa.

$A^{-} = (A, [\cdot,\cdot])$ se llama álgebra antisimetrizada del álgebra asociativa A.

<u>Ejemplo</u>: Sea A K-álgebra asociativa con convolución $*: A \longrightarrow A$, esto es, aplicación K-lineal de manera que:

- $(x+y)^* = x^* + y^* \quad \forall x, y \in A$
- $(xy)^* = y^* x^* \quad \forall x, y \in A$
- $(x^*)^* = x \quad \forall x \in A$

Consideremos $K(A,*) = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ el conjunto de los elementos antiautoadjuntos de A.

Teorema. $K(A,*)$ es un subálgebra de Lie de A^-.

<u>Demostración</u>:

1) Sean $x, y \in K(A,*)$

$$\left.\begin{array}{l} x^* = -x \\ y^* = -y \end{array}\right\} \Rightarrow (x^* + y^*) = (x+y)^* = -x-y$$

Por tanto, $x+y \in K(A,*)$.

2) Sea $x \in K(A,*)$ y $\lambda \in K$

$$(\lambda x)^* = \lambda x^* = -\lambda x$$

Por tanto, $\lambda x \in K(A,*)$.

Tenemos entonces que $K(A,*)$ es subespacio vectorial de A^-.

3) Sean $x, y \in K(A,*)$

$$[x,y]^* = (xy-yx)^* = (xy)^* - (yx)^* =$$
$$= y^* x^* - x^* y^* = -xy + yx = yx - xy = [y,x] = -[x,y]$$

Por tanto, $[x,y] \in K(A,*)$ y se tiene que $K(A,*)$ es subálgebra de A^-.

2) Sea ahora $\mathcal{U}$ un álgebra sobre K cuerpo no necesariamente asociativa. Vamos a denotar el producto de dos elementos $x, y \in \mathcal{U}$ de la forma habitual $x \cdot y = xy$

Definición: Una aplicación K-lineal $d: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ se dice que es una <u>derivación</u> si cumple la regla de Leibniz, es decir,

$$\boxed{d(x,y) = d(x)y + x\,d(y)} \quad \forall x, y \in \mathcal{U}.$$

Sea $\boxed{\mathrm{Der}(\mathcal{U}) := \{ d : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \mid d \text{ es una derivación} \}.}$

- Veamos primero que $\mathrm{Der}(\mathcal{U})$ es un espacio vectorial sobre K. En particular, como
$\mathrm{Der}(\mathcal{U}) \subset \mathrm{End}(\mathcal{U}) := \{ T : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \mid T \text{ es } K\text{-lineal} \}$
se tendrá que es <u>subespacio vectorial</u> de $\mathrm{End}(\mathcal{U})$.

  - Sean $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$. Veamos que
$(d_1 + d_2)(xy) = (d_1 + d_2)(x)y + x(d_1 + d_2)(y)$

$$\begin{aligned}(d_1 + d_2)(xy) &= d_1(xy) + d_2(xy) = \\ &= d_1(x)y + xd_1(y) + d_2(x)y + xd_2(y) = \\ &= [d_1(x) + d_2(x)]y + x[d_1(y) + d_2(y)] = \\ &= (d_1 + d_2)(x)y + x(d_1 + d_2)(y).\end{aligned}$$

  Por tanto, $d_1 + d_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$.

  - Sea $d \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$ y $\lambda \in K$. Veamos que
$(\lambda d)(xy) = (\lambda d)(x)y + x(\lambda d)(y)$.

$$\begin{aligned}(\lambda d)(xy) &= \lambda d(xy) = \lambda(d(x)y + xd(y)) = \\ &= (\lambda d)(x)y + x(\lambda d)(y).\end{aligned}$$

  Por tanto, $\lambda d \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$.

  Luego $\mathrm{Der}(\mathcal{U})$ es subespacio vectorial de $\mathrm{End}(\mathcal{U})$.

- Veamos ahora que $\mathrm{Der}(\mathcal{U})$ es un <u>subálgebra de Lie</u> de $\mathrm{End}(\mathcal{U})^-$.
Sean pues $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$. Veamos que $[d_1, d_2] \in \mathrm{Der}(\mathcal{U})$.

$$\begin{aligned}&[d_1, d_2](xy) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(xy) = d_1 d_2(xy) - d_2 d_1(xy) = \\ &= d_1(d_2(x)y + xd_2(y)) - d_2(d_1(x)y + xd_1(y)) = \\ &= \underline{d_1 d_2(x)y} + \cancel{d_2(x)d_1(y)} + \cancel{d_1(x)d_2(y)} + \underline{x(d_1 d_2(y))} - \\ &- \underline{[d_2 d_1(x)y} + \cancel{d_1(x)d_2(y)} + \cancel{d_2(x)d_1(y)} + \underline{xd_2 d_1(y)}] = \\ &= [d_1, d_2](x)y + x[d_1, d_2](y).\end{aligned}$$

Relación entre Álgebra de Lie y Grupo de Lie.

1) Ecuación diferencial

Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{R}$, queremos encontrar una función derivable

$y: \mathbb{R} \longrightarrow A$ y que cumpla $\begin{cases} y'(t) = a\,y(t), & a \in A \\ y(0) = 1 \end{cases}$
$t \longmapsto y(t)$

Se tiene que $\exists!\, y$.

$$y'(t) = a y(t) \Rightarrow y''(t) = a y'(t) = a^2 y(t).$$
$$y'''(t) = a^2 y'(t) = a^3 y(t).$$

Suponiendo $y^{(n-1)}(t) = a^{n-1} y(t)$, entonces $y^{(n)}(t) = a^{n-1} y'(t) = a^n y(t)$. Por inducción se tiene que $\boxed{y^{(n)}(t) = a^n y(t)}$.

$$y(t) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} t + \frac{y''(0)}{2!} t^2 + \cdots$$

$$y(t) = 1 + \frac{ta}{1!} + \frac{t^2a^2}{2!} + \frac{t^3a^3}{3!} + \cdots$$

$$\boxed{y(t) = e^{ta}}$$

2) Sea A álgebra de Banach real, $a \in A$. Veamos $\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a}$. Definimos $y: \mathbb{R} \longrightarrow A$

$$y(t) := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ta}{n}\right)^n$$

$$y'(t) = \lim_{n \to \infty} \cancel{n} \left(1 + \frac{ta}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{a}{\cancel{n}} = a \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ta}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= a \lim \left[\left(1 + \frac{ta}{n} \right)^n \right]^{\frac{n-1}{n}} = a\, y(t)$$

Tenemos que $\begin{cases} y'(t) = a y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Por tanto, $y(t) = e^{at}$, es decir,

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{ta}{n} \right)^n = e^{at}}$$

3) "Los grupos de Lie son objetos curvados".
"Las álgebras de Lie son objetos lineales."

Consideremos $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid xt - yz = 1 \right\} \subset M_2(\mathbb{R}) \overset{1}{=} \mathbb{R}^4$.

$xt - yz = 1$ es una hipersuperficie pero no es un espacio vectorial (el cero no está).

$\mathbb{R}^3$. Vamos a definir vector tangente en un grupo de Lie.

Sea σ superficie en $\mathbb{R}^3$, se define $T_P(\sigma) = \{ v \mid v \text{ es vector tangente a } \sigma \text{ en } P \}$.

Vamos a definir el espacio tangente de un grupo de Lie en $1 \in G$, $T_1(G)$, donde G es un grupo de Lie y 1 es el elemento neutro.

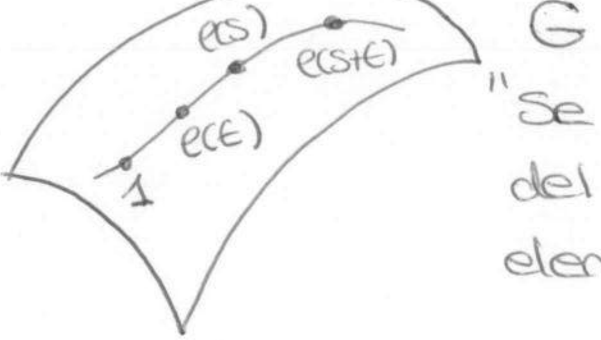
Definición: Subgrupo uniparamétrico.

Dado un grupo de Lie G, un subgrupo uniparamétrico de G es un homomorfismo de grupos

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

- $e(s+t) = e(s)\,e(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$
- $e(0) = 1$

Además, e debe ser continuo.



"Se ve como una curva dentro del grupo y además sus elementos forman un grupo".

Teorema. Todo subgrupo uniparamétrico es C^∞.

Teorema. Si $e : \mathbb{R} \to G$ es un subgrupo uniparamétrico, entonces existe una matriz a tal que

$$\boxed{e(t) = e^{ta}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

<u>Demostración</u>:

$e : \mathbb{R} \longrightarrow G \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$

$e(s+t) = e(s)e(t) \Rightarrow e'(s+t) = e'(s)e(t)$ resp. de s

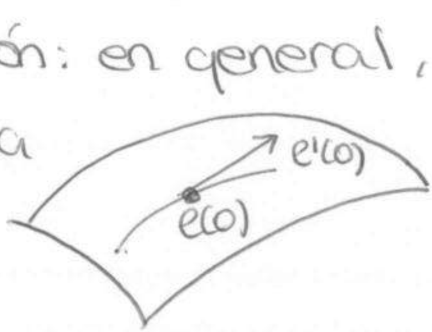
$\Rightarrow e'(t) = e'(0)e(t)$ en $s=0$

$\Rightarrow e'(t) = a\,e(t)$. siendo $a = e'(0)$.

Como $e(0) = 1$ y $e'(t) = a e(t)$, entonces $e(t) = e^{at}$.

Observación: en general, $a \notin G$, $a \in M_n(\mathbb{R})$

"a determina el grupo entero."



$\boxed{a = e'(0)}$ se llama generador infinitesimal de e.

Caracterización geométrica del tangente:

Definimos $T_1(G) = \{ \rho'(0) \mid \rho \text{ es subgrupo uniparamétrico} \}$

- Tenemos que ver que efectivamente $T_1(G)$ es espacio vectorial.

Como $\rho(t) = e^{at}$ siendo $a = \rho'(0)$. Entonces

$$T_1(G) = \{ a \mid \rho(t) = e^{at},\ \rho: \mathbb{R} \longrightarrow G \}$$

$$\boxed{T_1(G) = \{ a \mid e^{at} \in G, \forall t \in \mathbb{R} \}} \rightarrow \text{Caracterización algebraica del tangente.}$$

Haciendo uso de ella se puede demostrar que $T_1(G)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

1) Sea $a \in T_1(G)$, $s \in \mathbb{R}$. Veamos $sa \in T_1(G)$.

$a \in T_1(G) \Rightarrow e^{ta} \in G \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{tsa} \in G$

$\Rightarrow sa \in T_1(G)$.

2) Sean $a, b \in T_1(G)$. Veamos que $a+b \in T_1(G)$.

Usaremos la fórmula:

$$e^a e^b = 1 + (a+b) + \left(\frac{b^2}{2!} + ab + \frac{a^2}{2!} \right) + \cdots =$$

$$= 1 + (a+b) + \frac{1}{2!}(a^2 + 2ab + b^2) + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}} = 1 + \frac{t}{n}(a+b) + \frac{t^2}{2!n^2}(a^2 + 2ab + b^2) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{t\left[(a+b) + \frac{t}{2n} R\right]}{n}$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}} \right)^n = \left(1 + \frac{t\left[(a+b) + \frac{t}{2n} R\right]}{n} \right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}} \right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{t\left[(a+b) + \frac{t}{2n} R\right]}{n} \right)^n = e^{t(a+b)}$$

Tenemos $e^{t(a+b)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\right)^n$

luego si $a, b \in T_1(G)$, entonces $\frac{t}{n}a, \frac{t}{n}b \in T_1(G)$

Por tanto, $e^{\frac{t}{n}a} \in G$, $e^{\frac{t}{n}b} \in G$, $\forall t, \forall n$.

y $\left(e^{\frac{t}{n}a} \cdot e^{\frac{t}{n}b}\right)^n \in G$.

luego $\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\right)^n \in G$ pues G es cerrado

o sea $e^{t(a+b)} \in G$ $\forall t$. Esto quiere decir

que $a+b \in T_1(G)$.

- Veamos que además, $T_1(G)$ es un <u>álgebra de Lie</u>
  - $G \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$
  - $T_1(G)$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.
  - $M_n(\mathbb{R})$ es un álgebra asociativa.
  - $M_n(\mathbb{R})^-$ álgebra antisimetrizada de $M_n(\mathbb{R})$.

  con $[x, y] = xy - yx$.

  Veamos que $T_1(G)$ es subálgebra de $M_n(\mathbb{R})^-$

  Es decir, que $[x, y] \in T_1(G)$ $\forall x, y \in T_1(G)$.

  Necesitamos la fórmula:

$$e^a e^b = 1 + (a+b) + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + \cdots$$

$$\Rightarrow e^{-a} e^{-b} = 1 - (a+b) + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + \cdots$$

$$\Rightarrow e^a e^b e^{-a} e^{-b} = 1 - \cancel{(a+b)} + \cancel{(a+b)} + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) - (a+b)^2 + \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) \cdots =$$

$$= 1 + \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab - \cancel{a^2} - \cancel{b^2} - ab - ba + \cdots$$

$$= 1 + ab - ab + R = 1 + [a, b] + R$$

Sea $\{xy\} = xyx^{-1}y^{-1}$ el conmutador multiplicativo de x e y.

Entonces $\{e^a e^b\} = 1 + [a,b] + R$, siendo R términos de grado ≥ 3.

$$\Rightarrow \{e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\} = 1 + \left[\frac{ta}{n}, \frac{tb}{n}\right] + R =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R$$

$$\Rightarrow \{e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\}^{n^2} = \left(1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R\right)^{n^2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \{e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\}^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R\right)^{n^2} =$$

$$= e^{t^2[a,b]} \text{ usando lo anterior.}$$

Tenemos $e^{t^2[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \{e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\}^{n^2}$

Corolario. $T_1(G)$ es álgebra de Lie.

<u>Demostración</u>:

Sean $a, b \in T_1(G)$. Veamos $[a,b] \in T_1(G)$.

$$\left.\begin{array}{l} a \in T_1(G) \Rightarrow e^{t/n\, a} \in G \\ b \in T_1(G) \Rightarrow e^{t/n\, b} \in G \end{array}\right\} \Rightarrow \{e^{t/n\, a} e^{t/n\, b}\}^{n^2} \in G$$

Luego $\lim_{n\to\infty} \{e^{t/n\, a} e^{t/n\, b}\}^{n^2} = e^{t^2[a,b]} \in G$. $\forall t$

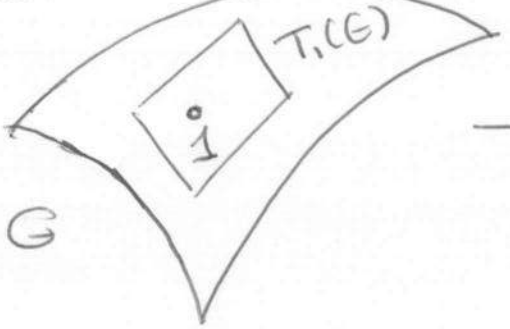
Por tanto, $e^{t[a,b]} \in G \ \forall t \geq 0$

Si $t<0$, $-t>0$ y $e^{-t[a,b]} \in G$ (inverso).

En definitiva, $e^{t[a,b]} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}$

Luego, $[a,b] \in T_1(G)$.

Observación: En muchas ocasiones es mejor pasar al álgebra de Lie y después volver al grupo.



$\longrightarrow$ linealizar un problema.

Dado un grupo de Lie G siempre podemos asociar un algebra de Lie que es $T_1(G)$ y que denotaremos $\boxed{T_1(G) = Lie(G).}$

$$G \rightsquigarrow Lie(G)$$

Grupo Álgebra.

Ejemplos:

1) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{m \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(m) = 1\}$

$$Lie(G) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{ta} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(e^{ta}) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Recordemos que $det(e^a) = e^{tr(a)} \ \forall a \in M_n(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow Lie(G) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{t \cdot tr(a)} = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$e^{t\,tr(a)} = 1 \Rightarrow tr(a) e^{t\,tr(a)} = 0$ derivando

$$\Rightarrow tr(a) = 0.$$

$\Rightarrow Lie(G) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underline{tr(a) = 0}\} =: sl_n(\mathbb{R})$

llamado el álgebra lineal especial.

$\boxed{Lie(SL_n(\mathbb{R})) = sl_n(\mathbb{R}).}$

2) $O(n) = \{ m \in M_n(\mathbb{R}) \mid mm^t = I_n \}$.

$$\mathcal{L}ie(O(n)) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{sa} \in O(n) \ \forall s \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{sa}(e^{sa})^t = I_n, \forall s \in \mathbb{R} \}$$

- $e^{sa}(e^{sa})^t = I_n \Rightarrow a e^{sa}(e^{sa})^t + e^{sa}(ae^{sa})^t = 0$
$$\Rightarrow a + a^t = 0 \quad \text{para } s = 0.$$
$$\Rightarrow a^t = -a \quad \text{matriz antisimétrica.}$$

- $a^t = -a \Rightarrow (e^{sa})^t = e^{sa^t} = e^{-sa}$
$$\Rightarrow e^{sa}(e^{sa})^t = e^{sa} e^{-sa} = e^0 = I_n.$$

$\Rightarrow \mathcal{L}ie(O(n)) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \underline{a^t = -a} \} = o(n)$

llamada álgebra de Lie ortogonal.

$$\boxed{\mathcal{L}ie(O(n)) = o(n)}$$

3) $G = GL_n(\mathbb{R}) = \{ m \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(m) \neq 0 \}$

$$\mathcal{L}ie(G) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{ta} \in GL_n(\mathbb{R}) \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(e^{ta}) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) \mid e^{t \cdot tr(a)} \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= M_n(\mathbb{R}) =: gl_n(\mathbb{R})$$

llamada álgebra general lineal.

$$\boxed{\mathcal{L}ie(GL_n(\mathbb{R})) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{álgebra} \\ \text{asociativa}}}{M_n(\mathbb{R})} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{álgebra de Lie} \\ [x,y] = xy - yx.}}{gl_n(\mathbb{R})}}$$

4) $\boxed{\mathcal{L}ie(U(n)) = u(n)} = \{ a \in M_n(\mathbb{C}) \mid \underline{a^* = -a} \}$,
siendo $U(n) = \{ m \in M_n(\mathbb{C}) \mid mm^* = I_n \}$ (ejercicio)

Lie Grp = categoría cuyos objetos son los grupos de Lie y cuyos morfismos son $f: G_1 \longrightarrow G_2$ homomorfismo de grupos y continua, esto es, un homomorfismo de grupos de Lie.

Lie Alg = categoría cuyos objetos son álgebras de Lie y cuyos morfismos son $g: L_1 \longrightarrow L_2$ lineal y de manera que $\boxed{g([x,y]) = [g(x), g(y)]}$ $\forall x, y \in L_1$ esto es, homomorfismo de álgebra de Lie.

Consideremos:

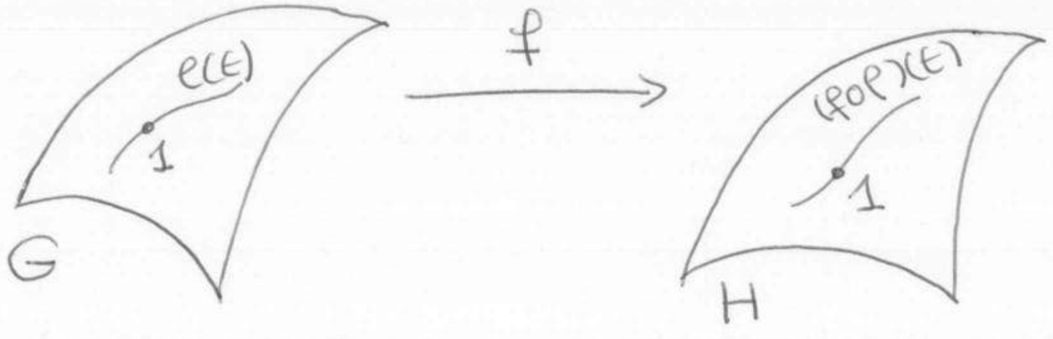
$$\begin{array}{ccc} \text{Lie Grp} & \longrightarrow & \text{Lie Alg} \\ G & \longmapsto & \text{Lie}(G) \\ f \Big\downarrow & & \Big\downarrow \text{Lie}(f) \\ H & \longmapsto & \text{Lie}(H) \end{array}$$

Se tiene que: (funtor covariante).

- $\text{Lie}(f \circ g) = \text{Lie}(f) \circ \text{Lie}(g)$
- $\text{Lie}(1_G) = 1_{\text{Lie}(G)}$

Dado $f: G \longrightarrow H$ homomorfismo de grupos de Lie construir $\text{Lie}(f): \text{Lie}(G) \longrightarrow \text{Lie}(H)$ homomorfismo de álgebras.

$\text{Lie}(G) = T_1(G) = \{\rho'(0) \mid \rho \text{ sub. uniparamet.}\}$
$\text{Lie}(H) = T_1(H) = \{\sigma'(0) \mid \sigma \text{ sub. uniparamet.}\}$



$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend right, "f\circ e"'] & G \arrow[r, "f"] & H \end{tikzcd}$$

; $f\circ e$ es homomorfismo de grupos continuo al ser la composición de funciones de este tipo.

De tal manera que podemos definir:

$$\begin{aligned} \text{Subgrupos uniparamétricos}(G) &\longrightarrow \text{Subgrupos uniparamétricos}(H) \\ e &\longmapsto f\circ e \end{aligned}$$

Definimos ahora $T_1(f): T_1(G) \longrightarrow T_1(H)$

$$e'(0) \longmapsto (f\circ e)'(0)$$

Este va a ser nuestro candidato a homomorfismo de álgebra de Lie. Veremos primero que $T_1(f)$ es lineal y a continuación que, en efecto, es homomorfismo de álgebras de Lie.

Sea $a = e'(0)$ y $b = (f\circ e)'(0)$, entonces $\boxed{T_1(f)(a) = b}$

Lema. $\boxed{f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)}}$ $\forall t\in\mathbb{R}, \forall a\in T_1(G)$.

<u>Demostración:</u>

Sea $e(t)$ subgrupo uniparamétrico cuyo generador infinitesimal es $a = e'(0)$. Se tiene que,

$$f(e^{ta}) = f(e(t)) = (f\circ e)(t) = e^{tb} = e^{tT_1(f)(a)}$$

ya que $(f\circ e)$ es un subgrupo uniparamétrico y su generador infinitesimal es $(f\circ e)'(0) = b$. Por lo que, $(f\circ e)(t) = e^{tb}$.

Como $f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)}$, para $t=1$ se tiene $f(e^a) = e^{T_1(f)(a)}$ $\forall a \in T_1(G)$.

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
e^a & G \arrow[r, "f"] & H & e^u \\
a \arrow[u, mapsto] & T_1(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "T_1(f)"] & T_1(H) \arrow[u, "\exp"'] & u \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

La igualdad $f(e^a) = e^{T_1(f)(a)}$ nos dice que el diagrama es conmutativo.

Corolario. $T_1(f)$ es aditivo, es decir,

$$\boxed{T_1(f)(x+y) = T_1(f)(x) + T_1(f)(y)} \quad \forall x,y \in T_1(G).$$

<u>Demostración</u>:

Sabemos $e^{t(x+y)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}x} e^{\frac{t}{n}y}\right)^n$

Aplicando f y usando la continuidad de f se tiene que:

- $f\left(e^{t(x+y)}\right) = \lim_{n\to\infty} f\left[\left(e^{\frac{t}{n}x} e^{\frac{t}{n}y}\right)^n\right] \overset{\text{homomorf.}}{=}$
$= \lim_{n\to\infty} \left(f\left(e^{\frac{t}{n}x}\right) f\left(e^{\frac{t}{n}y}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}T_1(f)(x)} \cdot e^{\frac{t}{n}T_1(f)(y)}\right]^n =$
$= e^{t(T_1(f)(x) + T_1(f)(y))}$
- $f\left(e^{t(x+y)}\right) = e^{tT_1(f)(x+y)}$, usando el lema.

Por tanto, $e^{t(T_1(f)(x) + T_1(f)(y))} = e^{tT_1(f)(x+y)}$ $\forall x,y \in T_1(G)$ y $\forall t \in \mathbb{R}$.

Observemos ahora que si tenemos $e^{tu} = e^{tv}$ $\forall t$, entonces $ue^{tu} = ve^{tv}$ y considerando $t=0$ se tiene que $u=v$.

Aplicando esto a nuestro caso obtenemos que $T_1(f)(x+y) = T_1(f)(x) + T_1(f)(y)$.

Corolario. $\boxed{T_1(f)(\lambda a) = \lambda T_1(f)(a)}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall a \in T_1(G)$.

<u>Demostración</u>:

Consideremos el diagrama
$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \exp} \\ T_1(G) & \longrightarrow & T_1(H) \end{array}$$
que sabemos que es conmutativo y se tiene $f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\forall a$. Entonces

Como $T_1(f)$ es aditiva se tiene
$$T_1(f)(nx) = T_1(f)(x + \overset{n}{\cdots} + x) = T_1(f)(x) + \overset{n}{\cdots} + T_1(f)(x) =$$
$$= nT_1(f)(x) \text{ siendo } n \in \mathbb{N}.$$

$T_1(f)(-nx) = -T_1(f)(nx) = (-n)T_1(f)(x)$ pues $T_1(f)(-x) = -T_1(f)(x)$ (ejercicio)

Por tanto $T_1(f)(nx) = nT_1(f)(x)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Así, $mT_1(f)\left(\frac{n}{m}x\right) = T_1(f)(nx) = nT_1(f)(x)$

Luego, $T_1(f)\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}T_1(f)(x)$.

Por lo que $T_1(f)(qx) = qT_1(f)(x)$ $\forall q \in \mathbb{Q}$.

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y por continuidad se deduce que $T_1(f)(rx) = rT_1(f)(x)$ $\forall r \in \mathbb{R}$.

Otra forma de hacerlo:

$$f(e^{ta}) = e^{t T_1(f)(a)} \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \forall a \in T_1(G)$$

Luego, $f(e^{t(\lambda a)}) = e^{t T_1(f)(\lambda a)} = e^{t\lambda T_1(f)(a)}$

De esto se deduce que $T_1(f)(\lambda a) = \lambda T_1(f)(a)$

Tenemos por tanto que $T_1(f): T_1(G) \longrightarrow T_1(H)$ es lineal.

Teorema. $T_1(f): T_1(G) \longrightarrow T_1(G)$ es homomorfismo de algebras de Lie.

Demostración:

Para ello, veamos que

$$\boxed{T_1(f)([x,y]) = [T_1(f)(x), T_1(f)(y)]}$$

Recordemos que:

- $e^{t^2[x,y]} = \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\frac{t}{n}x} e^{\frac{t}{n}y} \right\}^{n^2}$ (I)
- $f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)}$ (II)

Aplicando f en (I):

- $$f(e^{t^2[x,y]}) = \lim_{n\to\infty} \left\{ f(e^{\frac{t}{n}x}) f(e^{\frac{t}{n}y}) \right\}^{n^2} \overset{(II)}{=} \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\frac{t}{n}T_1(f)(x)} e^{\frac{t}{n}T_1(f)(y)} \right\}^{n^2} \overset{(I)}{=} e^{t^2 [T_1(f)(x), T_1(f)(y)]}$$

Por otro lado, usando (II)

- $f(e^{t^2[x,y]}) = e^{t^2 T_1(f)([x,y])}$

Por tanto, $e^{t^2[T_1(f)(x),T_1(f)(y)]} = e^{t^2 T_1(f)([x,y])}$

Observemos que si $e^{t^2u} = e^{t^2v}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $\cancel{2t}ue^{t^2u} = \cancel{2t}ve^{t^2v}$. Por lo que $ue^{t^2u} = ve^{t^2v}$ $\forall t \neq 0$.
Haciendo límite cuando $t \to 0$, se tiene
$u = \lim_{t \to 0} ue^{t^2u} = \lim_{t\to 0} ve^{t^2v} = v$. Luego $u = v$.

Aplicando esto en nuestro caso, se deduce que
$T_1(f)([x,y]) = [T_1(f)(x), T_1(f)(y)]$.
Luego $T_1(f)$ es homomorfismo de álgebras de Lie y llamaremos $\boxed{Lie(f) := T_1(f).}$

Tenemos:

$LieGrp$ = categoría de grupos de Lie.

$LieAlg$ = categoría de álgebras de Lie.

Se tiene que

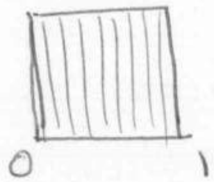
$$\begin{tikzcd}
Lie: LieGrp \arrow[r] & LieAlg \\
G \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & Lie(G) \arrow[d, "Lie(f)"] \\
H \arrow[r, mapsto] & Lie(H)
\end{tikzcd}$$

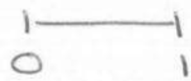
es un funtor covariante. Pues (ejercicio)

- $Lie(t \circ f) = Lie(t) \circ Lie(f)$, $\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "t\circ f"'] & H \arrow[r, "t"] & K \end{tikzcd}$
- $Lie(1_G) = 1_{Lie(G)}$

<u>Observación</u>: Si tenemos un funtor $\mathcal{F}: C_1 \to C_2$ y $X \cong Y$ en C_1, entonces $\mathcal{F}(X) \cong \mathcal{F}(Y)$ en C_2.

Ejemplo:

X 

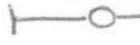
Y 

¿$X \cong Y$ en Top?

Consideremos
$$\begin{array}{rcl} \text{Top} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\text{-mod} \\ T & \longmapsto & \mathbb{Z}\text{-módulo libre generado por el conjunto de las componentes conexas de } T. \end{array}$$

Se demuestra que es un funtor.

Supongamos que $X \cong Y$ en Top.

En ese caso  $\cong$  en Top.

Aplicando el funtor se tendría $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lo cual es contradicción. Luego $X \not\cong Y$.

Grupos de Lie y representaciones.

- Dado un <u>grupo</u> G, una representación de G es un homomorfismo de grupos $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ siendo V el espacio vectorial de la representación. Cuando $\dim(V) = n < \infty$, $GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$.

- Una representación finito-dimensional de un <u>grupo de Lie</u> G es un homomorfismo de grupos de Lie $\rho: G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ (ρ es continua).

Sea $\rho: G \longrightarrow GL_n(V)$ representación de un grupo de Lie. La acción $G \times V \longrightarrow V$, $g \cdot v := \rho(g)(v)$ dota a V de estructura de G-módulo (y recíprocamente).

Definición: Representación de un álgebra de Lie.

Sea L un <u>álgebra de Lie</u>, entonces una representación (finito-dimensional) de L es un homomorfismo de álgebras de Lie $\sigma: L \longrightarrow gl(V)$ donde V es un espacio vectorial real de dimensión finita. y

$$gl(V) = \{T: V \longrightarrow V \mid T \text{ lineal}\}$$
$$[T, T'] = TT' - T'T.$$

Si $\dim(V) = n < \infty$, entonces $gl(V) \cong gl_n(\mathbb{R})$

Recordemos que $Lie(GL_n(\mathbb{R})) = gl_n(\mathbb{R})$

$$Lie(GL(V)) = gl(V).$$

Relación entre las representaciones de grupos de Lie y de álgebras de Lie.

Supongamos que tenemos una representación $\rho: G \longrightarrow GL(V)$. ρ es homomorfismo de grupos de Lie.

Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & GL(V) \\ {\scriptstyle exp}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle exp} \\ Lie(G) & \xrightarrow[\sigma]{} & gl(V) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Lie(GL(V)) = gl(V) \\ \sigma := Lie(\rho) \end{array}}$$

σ es un homomorfismo de álgebra de Lie, luego σ es una representación del álgebra $Lie(G)$ en V inducida por la representación ρ de G.

"Toda representación de un grupo de Lie en un espacio V, induce una representación de su álgebra de Lie en el mismo espacio V."

Una de las tareas de la Teoría de representaciones es determinar todas las representaciones irreducibles de un grupo dado.

En la práctica, lo que se hace es pasar de la representación $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ a $\sigma: Lie(G) \longrightarrow gl(V)$ donde $\sigma = Lie(\rho)$. Pues es mucho mas sencillos determinar las representaciones irreducibles de su álgebra que las del grupo.

Ejemplo: $G = SL_3(\mathbb{R})$, si queremos calcular sus representaciones irreducibles es mucho más sencillo considerar

$$\mathcal{L}ie(G) = sl_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x & y \\ x' & \beta & \varepsilon \\ y' & \varepsilon' & -\alpha-\beta \end{pmatrix} : \begin{matrix} x, y, \varepsilon \\ x', y', \varepsilon' \\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

cuya base del álgebra es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y calcular sus representaciones.

Ejemplo: $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\} =$
$= \{(\cos t, \operatorname{sen} t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$

$$S^1 \longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\} \subset GL_2(\mathbb{R})$$

$$(\cos t, \operatorname{sen} t) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \mid t \in [0, 2\pi) \right\}$ es subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ pues sus elementos son giros en el plano.

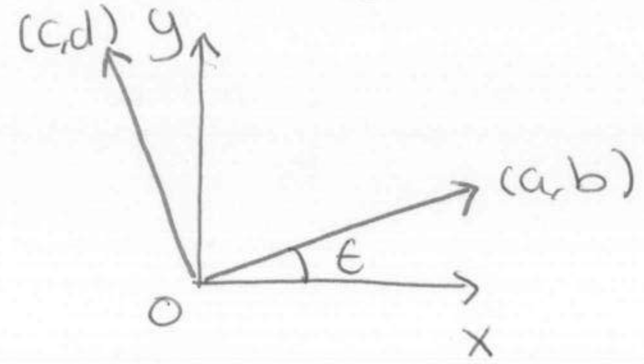
Además, sus elementos verifican:

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos $O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

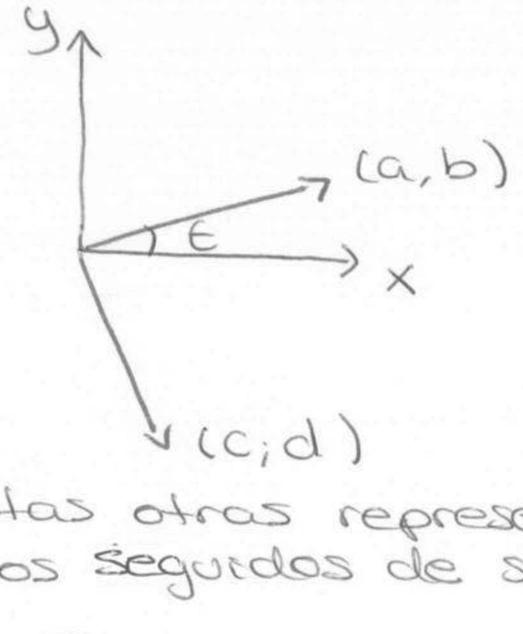
$$O(2)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a^2+b^2=c^2+d^2=1,\ ac+bd=0\right\}$$

Por lo que, (a,b) y (c,d) son vectores unitarios y ortogonales de $\mathbb{R}^2$.



En este caso
$a=\cos\epsilon$, $b=\operatorname{sen}\epsilon$
$c=-\operatorname{sen}\epsilon$, $d=\cos\epsilon$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ -\operatorname{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}$$



En este caso
$a=\cos\epsilon$, $b=\operatorname{sen}\epsilon$
$c=\operatorname{sen}\epsilon$, $d=-\cos\epsilon$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ \operatorname{sen}\epsilon & -\cos\epsilon \end{pmatrix}$$

Estas otras representaciones se tratan de giros seguidos de simetrías.

En resumen:

$$O(2)=\left\{\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ -\operatorname{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} \mid \epsilon\in[0,2\pi)\right\}\ \dot{\cup}\ \left\{\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ \operatorname{sen}\epsilon & -\cos\epsilon \end{pmatrix} \mid \epsilon\in[0,2\pi)\right\}$$

Sea $O(2)^+=\{x\in O(2) \mid |x|=1\}$

$O(2)^-=\{x\in O(2) \mid |x|=-1\}$

Se tiene $O(2)=O(2)^+\ \dot{\cup}\ O(2)^-$, siendo $O(2)^+$ subgrupo.

Observemos que
$$\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ \operatorname{sen}\epsilon & -\cos\epsilon \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{simetría}\\ \text{respecto al}\\ \text{eje } x.}}\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\epsilon & \operatorname{sen}\epsilon \\ -\operatorname{sen}\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}}_{\substack{\text{giro de}\\ \text{ángulo } \epsilon.}}$$

En general, en todo $O(n)$

$$O(n)^+ = \{x \in O(n) \mid \det(x) = 1\}$$
$$O(n)^- = \{x \in O(n) \mid \det(x) = -1\}$$

$O(n) = O(n)^+ \dot{\cup} O(n)^-$

ya que $xx^t = 1 \Rightarrow \det(x)\det(x^t) = \det(x)^2 = 1$
$\Rightarrow \det(x) = \pm 1$

Además, se tiene que $O(n)$ es abeliano solo para $n=2$.

- $SO(n) := O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{x \in O(n) \mid \det(x) = 1\} = O(n)^+$
llamado grupo especial ortogonal.
- $SU(n) = \{x \in U(n) \mid \det(x) = 1\}$
llamado grupo especial unitario.

Se tiene que $G = O(2)^+ = SO(2) =$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1 \\ ac+db = 0 \quad ad-bc = 1 \end{matrix} \right\}$$

Sea $\phi : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a^2+b^2-1, c^2+d^2-1, ac+bd, ad-bc-1)$$
que es continua.

Como $SO(2) = \phi^{-1}\{(0,0,0,0)\} \Rightarrow SO(2)$ es cerrado.

$$S^1 \longrightarrow G \subset GL_2(\mathbb{R})$$
$$(\cos t, \operatorname{sen} t) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

luego S^1 es isomorfo a $G = SO(2)$ que es subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$

luego, S^1 es un grupo de Lie y $S^1 \cong SO(2)$.

- $SO(2)$ es abeliano

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t' & \operatorname{sen} t' \\ -\operatorname{sen} t' & \cos t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+t') & \operatorname{sen}(t+t') \\ -\operatorname{sen}(t+t') & \cos(t+t') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t' & \operatorname{sen} t' \\ -\operatorname{sen} t' & \cos t' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Por tanto $SO(2) \cong S^1$ es un grupo de Lie abeliano. Además, S^1 es compacto y conexo.

Observación: un grupo de Lie posee una <u>estructura algebraica</u> pero además se trata de un <u>espacio topológico</u>. Por lo general, las "buenas" propiedades ~~c~~topológicas se traducen en "buenas" propiedades algebraicas.

- $O(2)^+$ y $O(2)^-$ son espacios topológicos conexos.

$$\begin{aligned} [0,2\pi) &\longrightarrow O(2)^+ \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es continua y $[0,2\pi)$ es conexo. Luego su imagen que es $O(2)^+$ es conexo.

De manera similar se prueba que $O(2)^-$ es conexo. Se tiene que $O(2)^+$ y $O(2)^-$ son las componetes conexas de $O(2)$.

- En general, sea $G = GL_n(\mathbb{R}) = \{m \mid \det(m) \neq 0\}$

y $G^+ = \{m \in G \mid \det(m) > 0\}$

$G^- = \{m \in G \mid \det(m) < 0\}$

Se tiene que $G = G^+ \dot{\cup} G^-$ y G^+ y G^- son conexos. Por lo que G^+ y G^- son las componentes conexas de $GL_n(\mathbb{R})$. Además, G^+ es subgrupo normal de G.

Sea $G = \cup X_i$ un grupo de Lie G, siendo X_i sus componentes conexas. Se tiene que $1 \in X_i$ para algún i. Se demuestra que esta componente es un subgrupo normal de G. Normalmente se denota a esta componente G_0 y el grupo cociente G/G_0 se llama el grupo de componentes de G.

En el caso de $O(2)$, su componente conexa con unidad es $O(2)^+$ y el cociente $O(2)/O(2)^+$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

$$\begin{aligned} O(2) &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ x &\longmapsto 0 \text{ si } x \in O(2)^+ \\ x &\longmapsto 1 \text{ si } x \in O(2)^- \end{aligned}$$

Esta aplicación es un epimorfismo con $\operatorname{Ker} = O(2)^+$ por lo que $O(2)/O(2)^+ \cong \mathbb{Z}_2$.

En general, para $GL_n(\mathbb{R}) = GL_n(\mathbb{R})^+ \dot{\cup} GL_n(\mathbb{R})^-$ se tiene que $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})^+ \cong \mathbb{Z}_2$ pues la aplicación

$$\begin{aligned} GL_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{Z}_2 \\ x &\longmapsto 0 \text{ si } x \in GL_n(\mathbb{R})^+ \\ x &\longmapsto 1 \text{ si } x \in GL_n(\mathbb{R})^- \end{aligned}$$

es epimorfismo con $\operatorname{Ker} = GL_n(\mathbb{R})^+$.

Teorema. Toda representación irreducible compleja de un grupo abeliano es 1-dimensional.

Demostración:

Sea $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ representación de G
Sea $S \subseteq V$ subespacio vectorial. Se dice que S es ρ-invariante si $\forall g \in G$, $\rho(g)(S) \subset S$.

Consecuencia. ρ es irreducible sii los únicos subespacios de V que son ρ-invariantes son $\{0\}, V$.
Es decir, V es un G-módulo simple.

Sea ahora G un grupo abeliano y $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ representación irreducible de G.
Se $g \in G \setminus \{1\}$ y consideramos $\rho(g): V \longrightarrow V$.
Existe una cierta base B de V tal que la matriz de $\rho(g)$ respecto de esa base es diagonal por bloques, $M_B(\rho(g)) = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_k)$.

$$J_i = \text{bloque de Jordan} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Luego $\rho(g)(v) = \lambda v$ para un cierto vector propio v de autovalor λ, $(v \neq 0)$.
Por tanto, $V_\lambda = \{x \in V \mid \rho(g)(x) = \lambda x\}$ es subespacio vectorial no nulo. Se tiene, $\rho(g)\big|_{V_\lambda} = \lambda\, Id$.
Veamos ahora que $\rho(h)(V_\lambda) \subset V_\lambda$ para todo $\lambda \in G$. Sea $v \in V_\lambda$, entonces

$$\rho(g)\underline{\rho(h)(v)} = \rho(h)\rho(g)(v) = \rho(h)(\lambda v) = \lambda \underline{\rho(h)(v)}$$

Luego, $\rho(h)(v) \in V_\lambda$. Así, $\rho(h)(V_\lambda) \subset V_\lambda\ \forall h \in G$.
Como $V_\lambda \neq 0$ y V_λ es ρ-invariante $\Rightarrow \boxed{V_\lambda = V.}$
Por tanto, $\rho(g) = \lambda_g \cdot 1\ \forall g \in G$, y cierto $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

Sea $w \in V$ un vector no nulo y consideremos $\mathbb{C}w$.

$\mathbb{C}w$ is ρ-invariante ya que $\rho(g)(w) = \lambda_g w \in \mathbb{C}w$.

Como V es irreducible, $\mathbb{C}w = V$ y por tanto $\dim V = 1$. ▨

- Recordemos la <u>ecuación de Laplace</u>:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Sea V espacio de soluciones.

Consideramos $SO(2) \times V \longrightarrow V$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot f(x,y) \longmapsto f(ax+by, cx+dy)$$

Si $f(x,y)$ es solución entonces $f(ax+by, cx+dy)$ también lo es. Luego V es un $SO(2)$-módulo, siendo V espacio de soluciones, y tenemos $\rho : SO(2) \longrightarrow GL(V)$ representación.

Si la representación ρ es irreducible $\Rightarrow \dim(V) = 1$.

Hay un espacio de soluciones 1-dimensional.

Buscamos $\mathbb{R}f(x,y) = \{c\, f(x,y) \mid c \in \mathbb{R}\}$.

$SO(2)$ actúa sobre el espacio anterior:

$$SO(2) \times \mathbb{R}f(x,y) \longrightarrow \mathbb{R}f(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \cdot f(x,y) \longmapsto f(x\cos t - y \operatorname{sen} t,\ x \operatorname{sen} t + y \cos t)$$

$$f(x\cos t - y\operatorname{sen} t, x\operatorname{sen} t + y\cos t) = K_t f(x,y)$$

Para $y = 0 \Rightarrow f(x\cos t, x\operatorname{sen} t) = K_t f(x,0)$

Sea $x = r \Rightarrow f(r\cos t, r\operatorname{sen} t) = K_t f(r,0)$

Sea $\left.\begin{matrix} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{f(x,y) = K_t f(r,0)} \rightarrow$ <u>separación de variables</u>.

Tenemos $\boxed{f(x,y)=\alpha(r)\beta(t)}$

siendo $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$ y $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ t=\arctan y/x \end{cases}$

Cambiando el operador $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=0$ a r,t queda:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}=0$$

luego, $\frac{1}{r}\alpha'(r)\beta(t)+\frac{1}{r^2}\alpha(r)\beta''(t)+\alpha''(r)\beta(t)=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\alpha'(r)+\frac{1}{r^2}\alpha(r)\frac{\beta''(t)}{\beta(t)}+\alpha''(r)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}+\frac{1}{r^2}\frac{\beta''(t)}{\beta(t)}+\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)}=0$$

$$\Rightarrow r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}+\frac{\beta''(t)}{\beta(t)}+r^2\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)}=0$$

$$\Rightarrow r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}+r^2\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)}=-\frac{\beta''(t)}{\beta(t)}.$$

$$\Rightarrow \frac{\beta''(t)}{\beta(t)}=k_1 \quad y \quad r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}+r^2\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)}=k_2 \text{ constantes.}$$

Por tanto, nos queda un sistema de EDO.

- $\beta''(t)-k_1\beta(t)=0$

  $\beta(t)=C_1\cos(\sqrt{k_1}\,t)+C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{k_1}\,t)$.

- $r^2\alpha''(r)+r\alpha'(r)+k_1\alpha(r)=0$

  $\alpha(r)=C_1\cos(\sqrt{k_2}\log r)+C_2\,\mathrm{sen}(\sqrt{k_2}\log r)$

$f(x,y)=\alpha(r)\beta(t)=\alpha(\sqrt{x^2+y^2})\,\beta(\arctan y/x)$.