1. Notaciones y Resultados Previos

1.1. Introducción

• Sea K un cuerpo, y V un espacio vectorial sobre K. Definimos el endomorfismo de V sobre K, $End_K(V)$, como

$$End_K(V) = \{T : V \to V \ / \ T \text{ es lineal}\}$$

→ $End_K(V)$ es un K-espacio vectorial

→ $End_K(V) \times End_K(V) \longrightarrow End_K(V)$ es un endomorfismo

$$(T_1, T_2) \longmapsto T_1 \cdot T_2 = T_1 \circ T_2$$

→ $End_K(T)$ es una K-álgebra asociativa.

• OBSERVACIÓN: Si $dim(V) = n < \infty$ (es decir, finita), entonces $End_K(V) \cong M_n(K)$

$T \longmapsto M_B(T)$ matriz de T respecto a una base B previamente fijada.

• Sea A una K-álgebra. Una representación de A en un K-espacio vectorial V es una aplicación

$$\rho : A \longrightarrow End_K(V)$$

que es homomorfismos de álgebras.

→ El objetivo es tratar de representar los elementos del álgebra A como matrices.

• OBSERVACIÓN:

I) Dada una representación, se puede dotar a V de estructura de A-módulo, de la siguiente forma

$$A \times V \longrightarrow V$$
$$(a,v) \longmapsto a \cdot v := \rho(a) : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto \rho(a)(v)$$

II) Recíprocamente, dado V (un K-espacio vectorial) un A-módulo, es decir, dada una aplicación

$$A \times V \longrightarrow V,$$

podemos definir $\rho : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$
$$a \longmapsto \rho(a) : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto a \cdot v$$

donde ρ es una representación de A.

• Decimos que una representación ρ es irreducible si y sólo si V es un A-módulo simple.

• Sea G un grupo, K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K. Definimos el grupo general lineal de V, $GL(V)$, como el conjunto de los elementos inversibles del $\mathrm{End}_K(V)$, es decir, los automorfismo del espacio vectorial $V \longrightarrow V$.

$$GL(V) := \mathrm{End}_K(V)^* = \mathrm{End}_K(V)^\times = \{T : V \longrightarrow V \ / \ T \text{ es lineal y biyectiva}\}$$

→ Esto es un grupo con la composición.

• OBSERVACIÓN: Si $\dim(V) = n < \infty$, entonces

$GL(V) \cong GL_n(V)$ grupo de matrices $n \times n$ inversibles

- Sea G un grupo. Definimos la representación de G en el espacio V como el homomorfismo de grupos

$$\rho: G \longrightarrow GL(V)$$

→ El objetivo es tratar de asociar a cada elemento del grupo una matriz y así identificar G con un grupo de matrices.

- OBSERVACIÓN: Si $\dim(V) = n < \infty$, entonces

$$\rho: G \longrightarrow GL_n(V)$$

- Dada una representación $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ del grupo G, podemos definir una acción

$$\begin{aligned} G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto g \cdot v := \rho(g)(v) \end{aligned}$$

tal que

I) $g(v_1 + v_2) = g \cdot v_1 + g \cdot v_2$, $\forall g \in G$, $\forall v_1, v_2 \in V$

II) $g(\lambda v) = \lambda g(v)$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v \in V$, $\forall g \in G$.

III) $g_1(g_2 \cdot v) = (g_1 \cdot g_2)(v)$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall v \in V$

IV) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$.

En este caso, decimos que V es un G-módulo.

- OBSERVACIÓN: Recíprocamente, si partimos de una estructura de G-módulo en V, $G \times V \longrightarrow V$, entonces podemos definir una representación de G en el espacio V como sigue

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho(g): V \longrightarrow V \\ & \qquad\qquad\quad v \longmapsto g \cdot v \end{aligned}$$

• Decimos que una representación ρ de G en V es irreducible si V es un G-módulo simple.

*__Ejemplo__: Sea $\mathbb{H}$ el álgebra de los cuaterniones reales de división.

$$\mathbb{H} = \mathbb{C}\times\mathbb{C} = \{(a,b) \,/\, a,b\in\mathbb{C}\}$$

$$(a,b)(c,d) \longrightarrow (ac-d\bar{b}, \bar{a}d+cb)$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4 \qquad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}) = 2$$

Otra definición de $\mathbb{H} = \mathbb{R}\langle 1,i,j,k\rangle$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con base canónica $\{1,i,j,k\}$

La tabla de multiplicar en $\mathbb{H}$ es

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Vamos a ver una representación de $\mathbb{H}$. Sea el "cuaternion"

$$\lambda_0\cdot 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k, \quad \lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}.$$

EN GENERAL

Sea A una K-álgebra asociativa, $1\in A$.

Tomemos $V=A$ como espacio vectorial (el espacio vectorial subyacente de A.

Podemos construir el homomorfismo de K-álgebras siguiente

$$A \xrightarrow{\rho} \mathrm{End}_K(V)$$

$$a \longmapsto \rho(a): V \longrightarrow V$$

$$v \longmapsto a \cdot v$$

Luego ρ es una representación de A en V.

Si además, $\dim(A) = n = \dim(V)$ finita, entonces $\mathrm{End}_K(V) \cong M_n(K)$, y por tanto

$$A \xrightarrow{\rho} M_n(K)$$

es la representación adjunta (por la izquierda).

Vamos a aplicar lo anterior al caso $A = \mathbb{H}$ y $V = \mathbb{R}^4$. Entonces, como $\dim_{\mathbb{R}}(A) = \dim_{\mathbb{R}}(V) = 4$:

$$\rho: \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$$

Sea $B = \{1, i, j, k\}$ una base de $\mathbb{H}$. Vamos a dar las imágenes de B por ρ, y con estas tendremos definida la aplicación ρ.

Como el neutro de $\mathbb{H}$ (1) debe ir al neutro de $M_4(\mathbb{R})$ (la identidad)

$$1 \overset{\rho}{\longmapsto} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = id_4 = I_4$$

Ahora, a cada elemento i, j, k, tenemos que asociarle la matriz de $\rho(i), \rho(j), \rho(k)$ relativa a B.

Consideremos el elemento i:

$\mathbb{H} \xrightarrow{\rho} M_4(\mathbb{R})$

$i \longmapsto \rho(i): V \longrightarrow V \quad (v \longmapsto i \cdot v)$

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto i \cdot 1 = i \xrightarrow[\text{respecto de la}]{\text{en coordenadas}} (0,1,0,0) \\
i &\longmapsto i \cdot i = -1 \xrightarrow[\text{base } B]{} (-1,0,0,0) \\
j &\longmapsto i \cdot j = k \longrightarrow (0,0,0,1) \\
k &\longmapsto i \cdot k = -j \longrightarrow (0,0,-1,0)
\end{aligned}$$

Por tanto (colocando por columnas)

$$i \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Consideremos el elemento j

$\mathbb{H} \xrightarrow{\rho} M_4(\mathbb{R})$

$j \longmapsto \rho(j): V \longrightarrow V \quad (v \longmapsto j \cdot v)$

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto j \cdot 1 = j \longrightarrow (0,0,1,0) \\
i &\longmapsto j \cdot i = -k \longrightarrow (0,0,0,-1) \\
j &\longmapsto j \cdot j = -1 \longrightarrow (-1,0,0,0) \\
k &\longmapsto j \cdot k = i \longrightarrow (0,1,0,0)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$j \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por último, consideremos el elemento k

$\mathbb{H} \xrightarrow{\rho} M_4(\mathbb{R})$

$K \longmapsto \rho(K): V \longrightarrow V \quad (v \longmapsto K \cdot v)$

$$\begin{aligned}
1 &\longmapsto K\cdot 1 = K \longrightarrow (0,0,0,1)\\
i &\longmapsto K\cdot i = j \longrightarrow (0,0,1,0)\\
j &\longmapsto K\cdot j = -i \longrightarrow (0,-1,0,0)\\
K &\longmapsto K\cdot K = -1 \longrightarrow (-1,0,0,0)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$K \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

CONCLUSIÓN: la representación adjunta de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{R}^4$ es: $\rho: \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$

$$1 \longmapsto I_4$$

$$i \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{array}\right) = i'$$

$$j \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{array}\right) = j'$$

$$K \longmapsto \left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \end{array}\right) = K'$$

Ahora, podemos definir $\mathbb{H}$ como $\mathbb{H} = \{\lambda_0 I_4 + \lambda_1 i' + \lambda_2 j' + \lambda_3 K' \;/\; \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ donde

I_4, i', j' y k' son las descritas anteriormente.

Entonces:

$$q = \lambda_0 I_4 + \lambda_1 i' + \lambda_2 j' + \lambda_3 k' = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \hline \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{array}\right)$$

A esto se le llama "modelo del cuaternión".

Es fácil ver que su determinante es $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Por tanto, si $q \neq 0 \Rightarrow q$ es inversible $\Rightarrow$ $\Rightarrow \mathbb{H}$ es un álgebra de división (todo elemento distinto de 0 tiene inverso.

- OBSERVACIÓN: al representar un álgebra como matrices, le podemos aplicar al álgebra toda la teoría del algebra lineal.

1.2. PRELIMINARES

- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se dice que V es un espacio normado si hay una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \|v\| \end{aligned}$$

tal que cumple ($\forall v, v' \in V$):

i) $\|v + v'\| \leq \|v\| \cdot \|v'\|$

ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ donde $|\lambda| = \begin{cases} \text{valor absoluto}, & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{módulo}, & \text{si } \lambda \in \mathbb{C} \end{cases}$

$\rightarrow$ A esta aplicación se le llama norma.

- OBSERVACIÓN: La norma define una topología en V. ($O \in V$ se dice abierto si $\forall x \in O \ \exists \ \mathring{B}(x, \varepsilon) \subset O$)

$\mathring{B}(x,\varepsilon)=\{y \mid \|x-y\|<\varepsilon\}$

→ Todo espacio normado es un espacio topológico.

• Si V es un espacio normado tal que toda sucesión de Cauchy es convergente, diremos que V es un espacio normado completo o espacio de Banach.

• Un álgebra A sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se dice que es normado si es un espacio normado y se cumple la propiedad sub-multiplicativa, es decir,

$$\|a\cdot b\| \leq \|a\|\cdot\|b\| \quad \forall\, a,b\in A.$$

→ Si además A es un espacio de Banach, diremos que A es un álgebra de Banach.

* Ejemplos de álgebras de Banach:

1) $\mathbb{R}$ con $\|x\|=|x|$, $(\mathbb{R},|\cdot|)$

2) $\mathbb{C}$ con $\|x\|=\sqrt{a^2+b^2}$ siendo $x=a+bi$, $(\mathbb{C},\|\cdot\|)$

3) $\mathbb{H}$ con $\|x\|=\sqrt{\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}$ con $x=\lambda_0 1+\lambda_1 i+$ $+\lambda_2 j+\lambda_3 k$, $(\mathbb{H},\|\cdot\|)$

4) $A=M_n(\mathbb{R})$ con $\|x\|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$ donde $x=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $(A,\|\cdot\|)$.

Vamos a recordar ahora alguna propiedades de la aplicación exponencial, para exponer una definición de aplicación exponencial en álgebras de Banach.

• Sea $\mathbb{R}^{\times}$ los elementos inversibles de $\mathbb{R}$ (es decir, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$). Definimos la aplicación exponencial como $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\times}$

$$x \longmapsto e^x$$

$$0 \longrightarrow 1$$

→ $\exp(0) = 1 = e^0$

→ $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y)$

→ $\exp: (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\times}, \cdot)$ es un homomorfismo de grupo.

→ $\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, cuyo radio de convergencia es ∞ (es decir, es válida esta igualdad $\forall x \in \mathbb{R}$).

• Una sucesión $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall p, q \geq N: \| S_p - S_q \| < \varepsilon$.

• Sea A un álgebra de Banach real y $A^{\times}$ el grupo de inversibles de A. Vamos a definir la aplicación $\exp: A \longrightarrow A^{\times}$

$$0 \longrightarrow 1$$

de forma que $\forall x \in A$, $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ sea convergente, es decir:

Sea $S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, ¿es $\{S_n\}$ convergente? O lo que es lo mismo, ¿es $\{S_n\}$ una sucesión de Cauchy?

Tenemos que ver que $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall p, q \geq N: \| S_p - S_q \| < \varepsilon$.

$$\|S_p - S_q\| = \left\| \sum_{i=q+1}^{p} \frac{x^i}{i!} \right\| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \left\| \frac{x^i}{i!} \right\| = \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x^i\|}{i!} \leq$$

$p \neq q$

Si $p = q$: $\|S_p - S_q\| = 0 < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

sin pérdida de generalidad,

$p > q \Rightarrow S_p = S_q + \frac{x^{q+1}}{q+1!} + \dots + \frac{x^p}{p!}$

$\|a b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

$$\leq \sum_{i=q+1}^{p} \frac{\|x\|^i}{i!} = |T_p - T_q| < \varepsilon$$

$x \in A$, $\|x\| \in \mathbb{R}$. Como hemos visto antes

$e^{\|x\|} = 1 + \frac{\|x\|}{1!} + \frac{\|x\|^2}{2!} + \dots$ es convergente para todo x.

Sea $T_n = 1 + \frac{\|x\|}{1!} + \frac{\|x\|^2}{2!} + \dots + \frac{\|x\|^n}{n!} \in \mathbb{R}$.

$\{T_n\}$ es convergente $\Leftrightarrow e^{\|x\|}$ es convergente.

$\Updownarrow$

$\{T_n\}$ es de Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 / \forall p, q \geq N : |T_p - T_q| < \varepsilon$

Como $p > q$: $|T_p - T_q| = \frac{\|x\|^{q+1}}{q+1!} + \dots + \frac{\|x\|^p}{p!}$

Ahora sé que $\forall x \in A$: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ es convergente.

Por tanto, definimos la función exponencial en A como: $\exp : A \longrightarrow A^x$

$$x \longmapsto \exp(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

$\rightarrow \exp(0) = 1$

$\rightarrow \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

- OBSERVACIÓN: no siempre ocurre que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Por ejemplo, falla en $A = M_2(\mathbb{R})$.

- <u>TEOREMA</u>: Si A es álgebra de Banach, $x, y \in A$ y $xy = yx$, entonces $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Usando el Binomio de Newton

$$(x+y)^2 \overset{(*)}{=} x^2 + y^2 + xy + yx = x^2 + y^2 + 2xy$$

$$(x+y)^3 \overset{(**)}{=} x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$\exp(x)\exp(y) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots\right)\left(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \dots\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \left(\frac{y^2}{2!} + xy + \frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{y^3}{3!} + x\frac{y^2}{2!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) + \dots =$$

$$= 1 + \frac{(x+y)}{1!} + \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2!} + \frac{x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3}{3!} + \dots \underset{(*)}{\overset{(**)}{=}} 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots =$$

$$= \exp(x+y)$$

$\blacksquare$

- <u>COROLARIO</u>: $\forall x \in A$, $\exp(x) \in A^{\times}$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>:

$$\left.\begin{array}{l} x \in A, -x \in A \\ x\cdot(-x) = (-x)\cdot x = -x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underset{\exp(0) = 1}{\underset{\shortparallel}{\exp(x + (-x))}} = \exp(x)\exp(-x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exp(x)$ es inversible

$\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$

$\blacksquare$

Para terminar esta sección y capítulo, vamos a dar la definición de traza y determinante de una aplicación lineal, junto con una relación entre ellas.

- Sea V un espacio vectorial sobre K con $\dim(V) = n < \infty$. Sea $T: V \to V$ una aplicación lineal. Fijada una base B de V, denotamos con $M = M_B(T)$ a la matriz de T relativa a B ($M = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$). Definimos la traza de la aplicación lineal T como:
$$tr(T) = tr(M_B(T)) = tr(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Vamos a ver, paso a paso, como demostrar que la definición de traza no depende de la base elegida.

$\boxed{\text{Paso 1}}$ $M = (a_{ij})$, $tr(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

$\boxed{\text{Paso 2}}$ $M, N \in M_n(K) \Rightarrow tr(MN) = tr(NM)$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Supongamos $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, $N = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

$$M \cdot N = (c_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{donde} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$N \cdot M = (d_{ij})_{i,j=1}^{n} \quad \text{donde} \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$$

$$tr(MN) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

$$tr(NM) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} =$$

$\boxed{\text{Cambio de variable } q \leftrightarrow K}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} b_{iq} a_{qi} \underset{\boxed{k \leftrightarrow i}}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} b_{kq} a_{qk} \underset{\boxed{q \leftrightarrow i}}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} = tr(M \cdot N)$$

Por tanto, se tiene la propiedad conmutativa de la traza. ■

$\boxed{\text{Paso 3}}$ Si P es inversible $\Rightarrow tr(PMP^{-1}) = tr(M) \quad \forall M$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = PM$ y $B = P^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow tr(PMP^{-1}) = tr(AB) \underset{\boxed{\text{Paso 2}}}{=} tr(BA) = tr(P^{-1}PM) =$$

$= tr(M)$. ■

$\boxed{\text{Paso 4}}$ Veamos que la traza de una aplicación lineal no depende de la base elegida.

DEMOSTRACIÓN: Sea $T: V \to V$ una aplicación lineal. Tomo una base B y su matriz de T relativa a B, $M = M_B(T)$.

Sea ahora B' otra base de V y $M' = M_{B'}(T)$ la matriz de T relativa a B'.

$M' = PMP^{-1}$ donde P es la matriz del cambio de base (que es una matriz inversible).

Por el paso (3): $tr(M') = tr(PMP^{-1}) = tr(M)$. ■

Veamos otra definición que no depende de la base tomada.

• Sea $T: V \to V$ una aplicación lineal con V un espacio vectorial. Sea B una base de V y $M = M_B(T)$ su matriz de T relativa a B. Definimos el determinante de la aplicación lineal como

$$\det(T) := \det(M_B(T)).$$

DEMOSTRACIÓN: Veamos que no depende de B.

Sea B base de V y $M = M_B(T)$ matriz de T relativa a B.

Sea B' base de V y $M' = M_{B'}(T)$ matriz de T relativa a B'.

$B' = PMP^{-1}$ con P matriz de cambio de base.

$$\det(M') = \det(PMP^{-1}) = \cancel{\det(P)} \det(M) \cancel{\det(P)}^{-1} =$$

$$= \det(M) \qquad \boxed{\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}}$$

• OBSERVACIÓN: La traza y el determinante de una aplicación lineal son dos definiciones invariantes por cambio de base.

Veamos ahora la relación que hay entre la traza y el determinante.

• TEOREMA: Para toda matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ se tiene que:

$$e^{tr(M)} = \det(e^M)$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a dividir la demostración en 3 casos.

Caso 1: Si M es diagonal.

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n).$$

$$e^M := 1 + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots$$

$$M^2 = \mathrm{diag}(a_1^2, \dots, a_n^2)$$

$\vdots$

$$M^k = \mathrm{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k)$$

$\vdots$

$$\Rightarrow e^M = \begin{pmatrix} 1+a_1+\frac{a_1^2}{2!}+\frac{a_1^3}{3!}+\dots & & & \\ & 1+a_2+\frac{a_2^2}{2!}+\frac{a_2^3}{3!}+\dots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1+a_n+\frac{a_n^2}{2!}+\frac{a_n^3}{3!}+\dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{a_1} & & & \\ & e^{a_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(e^M) = e^{a_1} \cdot \dots \cdot e^{a_n} = e^{a_1 + \dots + a_n} = e^{\mathrm{tr}(M)}$$

Caso 2: M es diagonalizable

M es diagonalizable $\Leftrightarrow M = P \cdot D \cdot P^{-1}$, con D matriz diagonal.

Por el caso 1 sabemos que $\det(e^D) = e^{\mathrm{tr}(D)}$

$$\left.\begin{array}{l} M = PDP^{-1} \\ M^2 = PD^2P^{-1} \\ \vdots \\ M^k = PD^kP^{-1} \\ \vdots \end{array}\right\} \Rightarrow e^M = I + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots =$$

$$= I + PDP^{-1} + \frac{PD^2P^{-1}}{2!} + \frac{PD^3P^{-1}}{3!} + \dots =$$

$$= P\left(I + D + \frac{D^2}{2!} + \frac{D^3}{3!} + \dots\right)P^{-1} = Pe^DP^{-1}$$

$$\Rightarrow \det(e^M) = \det(Pe^DP^{-1}) = \det(P)\det(e^D) \cdot$$

$$\cdot \det(P)^{-1} = \det(e^D) = e^{tr(D)} = e^{tr(M)}$$

<u>Caso 3</u>: en general.

El conjunto de las matrices diagonalizable es denso en $M_n(\mathbb{C})$, es decir, que dado $\varepsilon > 0$, $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$, $\exists X'$ diagonalizable en $M_n(\mathbb{C})$ tal que $\|X - X'\| < \varepsilon$.

Como consecuencia: $\forall X \in M_n(\mathbb{C})$

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n$$

donde cada X_n es diagonalizable.

$$\Rightarrow e^{tr(X)} = e^{tr(\lim_{n\to\infty} X_n)} = e^{\lim_{n\to\infty}(tr(M))} =$$

$\boxed{tr: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \text{ es continua porque es lineal}}$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{tr(X_n)} = \lim_{n\to\infty} \det(e^{X_n}) =$$

$\boxed{\text{La función exponencial es continua porque es derivable}}$

$\boxed{\text{Caso 2}}$

$$= \det\left(\lim_{n\to\infty} e^{x_n}\right) = \det\left(e^{\lim_{n\to\infty} x_n}\right) =$$

El determinante es continua porque es derivable (porque es polinómica

$$= \det\left(e^{x}\right)$$

■

2. Grupos y Álgebras de Lie

2.1. Motivación histórica

En Teoría de Galois, x^2-3 en $\mathbb{Q}$ no tiene solución porque este polinomio es irreducible en $\mathbb{Q}$. Pero, nos dice que existe un cuerpo, cuerpo de descomposición (el más pequeño posible), donde el polinomio sí tiene solución. Este cuerpo de descomposición es

$$K = \frac{\mathbb{Q}[x]}{x^2-3} \cong \{ \alpha+\beta\sqrt{3} \;/\; \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \}$$

$\mathbb{Q} \subset K$, por tanto, K es extensión de $\mathbb{Q}$ ($K/\mathbb{Q}$).

Se dice que K es el cuerpo de descomposición de x^2-3 sobre $\mathbb{Q}$.

Con esto, Galois creó el grupo de Galois, que son los automorfismos de K que son $\mathbb{Q}$-lineales: $\quad Gal(K/\mathbb{Q}) = Aut_{\mathbb{Q}}(K)$.

Sea $\sigma : K \to K$ un automorfismo de cuerpo $\mathbb{Q}$-lineal, lleva

$$1 \longmapsto 1$$
$$\sqrt{3} \longmapsto z \in K \;/\; z^2 = 3$$

porque la base de K como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial es $\{1, \sqrt{3}\}$.

En $K=\{\alpha+\beta\sqrt{3} \,/\, \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ sólo hay dos elementos $z \,/\, z^2=3$, que son $z=\pm\sqrt{3}$. Por tanto, tenemos dos automorfismos:

$$\begin{aligned}\sigma_1 : K &\longrightarrow K \quad (Id_K) \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \sqrt{3} &\longmapsto \sqrt{3}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}\sigma_2 : K &\longrightarrow K \\ 1 &\longmapsto 1 \\ \sqrt{3} &\longmapsto -\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = Id_K \qquad\qquad \sigma_2(\alpha+\beta\sqrt{3}) = \alpha-\beta\sqrt{3}$$

Por tanto:

$$Aut_{\mathbb{Q}}(K) = \{Id_K, \sigma_2\} \cong \mathbb{Z}_2 = Gal(K/\mathbb{Q}) = G$$

Las soluciones de x^2-3 en K son $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

Sea $V=\{\alpha\sqrt{3}-\beta\sqrt{3} \,/\, \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ un espacio generado por las soluciones de la ecuación en K.

$$\begin{aligned} G\times V &\longrightarrow V \\ (g,v) &\longmapsto g(v) \end{aligned}$$

$$(Id_K, \sqrt{3}) \longmapsto \sqrt{3} \qquad\qquad (\sigma_2, \sqrt{3}) \longmapsto -\sqrt{3}$$
$$(Id_K, -\sqrt{3}) \longmapsto -\sqrt{3} \qquad\qquad (\sigma_2, -\sqrt{3}) \longmapsto \sqrt{3}$$

Esta aplicación nos indica que G actúa sobre el espacio V. Por tanto, se puede ver que esto define una estructura de G-módulo en V y definir una representación de G en el espacio V: $\quad \rho : G \longrightarrow GL(V)$.

El matemático analítico Sophus Lie buscaba una Teoría de Galois diferencial, es decir, aplicar la Teoría de Galois a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, llegando así a los Grupos de Lie.

Ideas de Sophus Lie

Tomamos la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

¿Cómo sacamos un grupo de aquí?

Tenemos dos variables, x, y, reales. Realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} s = a_{11} x + a_{12} y \\ t = a_{21} x + a_{22} y \end{cases}$$

El cambio de variable es una aplicación lineal biyectiva (necesario para que sea válido).

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (s,t)$$

Entonces $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ debe ser la matriz inversible, es decir

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

donde $GL_2(\mathbb{R})$ es el grupo de matrices inversibles reales 2×2.

Vamos a hacer el cambio de variable

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a_{11} \frac{\partial f}{\partial s} + a_{21} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = a_{12} \frac{\partial f}{\partial s} + a_{22} \frac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

Por tanto: $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = a_{11}\dfrac{\partial}{\partial s} + a_{21}\dfrac{\partial}{\partial t} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = a_{12}\dfrac{\partial}{\partial s} + a_{22}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x} = \left(a_{11}\frac{\partial}{\partial s} + a_{21}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \cancel{\frac{\partial}{\partial x}} =$$

Aplicamos la fórmula del Binomio de Newton porque $\frac{\partial}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}$ (Regla de Schwartz)

$$= a_{11}^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} + a_{21}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2a_{11}a_{21}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$$

Análogamente

$$\frac{\partial^2}{\partial y} = a_{22}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a_{12}^2\frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2a_{22}a_{12}\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$$

Veamos que nos da la ecuación de laplace con este cambio:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = (a_{11}^2 + a_{12}^2)\frac{\partial^2}{\partial s^2} + (a_{21}^2 + a_{22}^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2} +$$
$$+ 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$$

Lie observó que en determinadas condiciones, el cambio de variable no cambia la forma de la ecuación, es decir, si

$$\begin{cases} s = a_{11}x + a_{12}y \\ t = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \quad M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y se cumple que $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$

entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=0 \xrightarrow[\text{variable}]{\text{cambio de}} \frac{\partial^2}{\partial s^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}=0$$

El conjunto de cambios de variable que no modifican la ecuación de laplace viene dado por todas las matrices $\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}) \,/\, a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1,\ a_{21}^2+a_{22}^2=1,\ a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22}=0\right\}$, que coincide con el grupo de matrices ortogonales 2×2 sobre $\mathbb{R}$, $O(2)$.

• RECORDATORIO: $O(n)=\{M\in M_n(\mathbb{R}) \,/\, MM^t=I\}$

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$$MM^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2 & a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11}+a_{22}a_{12} & a_{21}^2+a_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_{11}^2+a_{12}^2=1,\ a_{21}^2+a_{22}^2=1,\ a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0$$

Sophus Lie encontró que el grupo es $O(2)$, y se dió cuenta de que para toda ecuación en derivadas parciales (EDP) existe un grupo de cambios de variables que no modifican la forma de la EDP. Además, vió que este grupo siempre es un subgrupo del grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$, con n el número de variables de la ecuación.

A este grupo se le suele llamar "el grupo de simetrías de la EDP".

*Ejemplo de ejercicio: Buscar el grupo de simetrías de $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 7\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = 0$.

El ejercicio nos pide encontrar las condiciones que debe cumplir la matriz de cambio de variable

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} s = a_{11}x + a_{12}y \\ t = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

para que se transforme en

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2} - 7\frac{\partial}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Esto juega un papel similar al del grupo de Galois de una ecuación algebraica.

→ Si el grupo de Lie no es soluble ⇒ la EDP nó es integrable.

Ahora, hemos pasado de una EDP a un grupo G de matrices. ¿Actúa G sobre el espacio de soluciones de la EDP? La respuesta es que sí.

Sea $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, es decir,

$$\Delta : f \longmapsto \Delta(f)$$

es una aplicación lineal.

Sea V un espacio de funciones C^∞ (infinitamente derivable).

$$\Delta : V \longrightarrow V$$
$$f \longmapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

es una aplicación lineal (porque es suma de composición de aplicaciones lineales: $\frac{\partial}{\partial x}: V \to V$ y $\frac{\partial}{\partial y}: V \to V$ son lineales).

El núcleo de Δ, $Ker(\Delta) = \{f \in V / \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\}$ es un espacio vectorial.

Queremos ver que su grupo, $O(2)$, actúa sobre el espacio de soluciones de la ecuación de Laplace, es decir, $O(2)$ actúa sobre $S := Ker(\Delta)$.

¿$O(2)$ actúa de forma natural en S? Veamos que sí.

Sea $f(x,y) \in S$. Definimos la función $f(s,t) = f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$ con $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in O(2)$.

Entonces se demuestra que la nueva función vuelve a ser solución de la EDP. Pero además

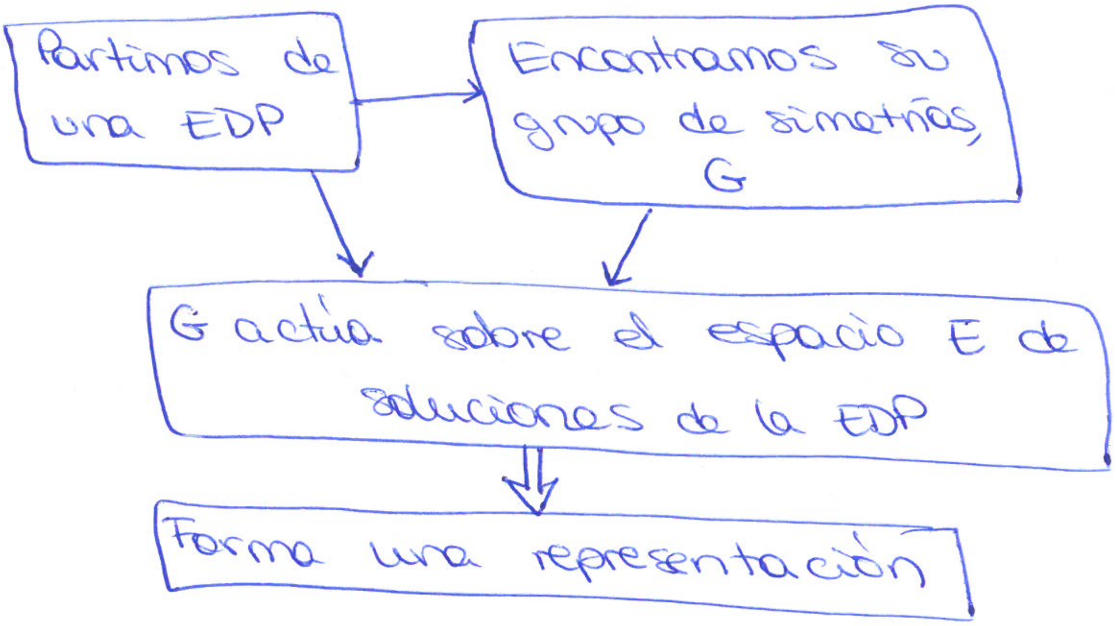
$$O(2) \times S \longrightarrow S$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot f(x,y) \longmapsto f(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x\, a_{22}y)$$

es una acción, luego tenemos una representación:

$$\rho : O(2) \longrightarrow GL(S)$$

una representación del grupo de simetrías de la EDP, en nuestro caso $O(2)$, en el espacio de soluciones de la misma.

• Esquema de lo realizado:



• APLICACIONES: El álgebra de Grupos de Lie sirve para la Física de partícula. Esta nos dan EDP donde sus grupos de simetrías no son triviales. Estudiando las representaciones irreducibles de esos grupos obtenemos información sobre las soluciones.

El primero en hacerlo fue Gell Man en 1961, trabajando con decuplete (10 partículas).

$$G \times S \longrightarrow S, \quad \dim(S) = 10.$$

Gell Mann descubrió una partícula en el modelo matemático que la Física de partículas no había descubierto aún.

2.2. GRUPOS DE LIE

- Un grupo G se dice que es un grupo de Lie lineal si es (isomorfo a) un subgrupo cerrado de un $GL_n(\mathbb{R})$.
  - → $GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$, donde $M_n(\mathbb{R})$ es un álgebra de Banach. Luego $M_n(\mathbb{R})$ tiene una topología (completa). Por tanto, $GL_n(\mathbb{R})$ hereda una topología que le viene de $M_n(\mathbb{R})$.
  - → El que G sea cerrado en $GL_n(\mathbb{R})$ quiere decir que: si $\{x_n\}$ es sucesión de elementos de G y $\{x_n\} \xrightarrow{n\to\infty} x \in GL_n(\mathbb{R})$, entonces necesariamente $x \in G$.

*Ejemplos:

1) $G := SL_n(\mathbb{R})$ "grupo especial lineal"

$$= \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$$

Veamos que G es un grupo de Lie.

$G = SL_n(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie $\Leftrightarrow$ G es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$.

Sea $GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$

$$M \longmapsto \det(M) = |M|$$

La aplicación det es una aplicación continua (es un polinomio en los coeficientes de la matriz).

$$\left.\begin{array}{l} SL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \\ \{1\} \subset \mathbb{R} \text{ es un cerrado} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ es la imagen inversa por una aplicación continua del cerrado $\{1\}$ $\underset{\uparrow}{\Longrightarrow}$ Por topología

$\Rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ es cerrado.

2) $O(2) = O_2(\mathbb{R}) = O(2:\mathbb{R}) := \{M \in GL_2(\mathbb{R}) : MM^t = I_2\}$

"grupo ortogonal".

En general: $O(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : MM^t = I_n\}$

Veamos que $O(2)$ es un grupo de Lie, es decir, un subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$.

Sea $M \in O(2)$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces $MM^t = I_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $O(2) = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : MM^t = I_2\} =$

$= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a^2+b^2 = 1,\ c^2+d^2 = 1,\ ac+bd = 0\right\}$

Sea $M_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a^2+b^2-1,\ c^2+d^2-1,\ ac+bd)$$

La aplicación θ es una aplicación continua (es polinómica).

$$\left.\begin{array}{l} O(2) = \theta^{-1}((0,0,0)) \\ \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ es cerrado} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O(2)$ es la imagen inversa por una aplicación continua del cerrado $\{(0,0,0)\}$ $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $O(2)$ es cerrado.

$\boxed{\text{Por topología}}$

- En general: todo grupo formado por las matrices que satisfacen un sistema de ecuaciones algebraicas es cerrado.

$O(n) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}) : \underbrace{MM^t = I_n}\}$

Se traduce en un sistema de ecuaciones algebraicas de 2º grado.

Por tanto, $O(n)$ es subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$, es decir, $O(n)$ es un grupo de Lie.

3) $SO(n) := \{M \in O(n) : \det(M) = 1\}$ "grupo especial ortogonal.

$SO(n)$ es un grupo de Lie.

4) $U(n) := \{M \in M_n(\mathbb{C}) : MM^* = I_n\}$ "grupo unitario"

Si $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \Rightarrow M^* = (\overline{a}_{j,i})_{i,j=1}^{n}$ (transponer y conjugar).

$U(n)$ es un grupo de Lie.

$\rightarrow U(n) \underset{\text{subgrupo}}{\leq} GL_{2n}(\mathbb{R})$

Sea $\mathbb{C} \xrightarrow{\Omega} M_2(\mathbb{R})$ monomorfismo de álgebras.

$$a+bi \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\Omega((a+bi)(c+di)) = \Omega(a+bi)\,\Omega(c+di)$$

$$\Omega((a+bi)(c+di)) = \Omega((ac-bd)+i(ad+bc)) =$$
$$= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -ad-bc & ac-bd \end{pmatrix}$$

$$\Omega(a+bi)\,\Omega(c+di) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix}$$

Sea $M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_{2n}(\mathbb{R})$ monomorfismo de álgebras
$$(a_{ij})_{i,j=1}^{n} \longrightarrow (\Omega(a_{ij}))_{i,j=1}^{n}$$

Entonces $U(n)$ se identifica con un subgrupo de matrices (inversibles) de $M_{2n}(\mathbb{R})$. Por tanto, $U(n) \leq GL_{2n}(\mathbb{R})$.

$\rightarrow U(n)$ cerrado.

Si traducimos a un sistema la ecuación $MM^* = I_n$, tenemos un sistema de ecuaciones algebraicas. Por tanto, $U(n)$ es un subgrupo cerrado.

CONCLUSIÓN: $U(n)$ es un grupo de Lie.

5) $SU(n) := \{ M \in U(n) : \det M = 1 \} \leq U(n)$ "grupo especial unitario.

$SU(n)$ es un grupo de Lie.

6) $SP_{2n}(\mathbb{R}) := \{ X \in M_{2n}(\mathbb{R}) : X M X^t = M \}$ "grupo simpléctico"

donde $M = \mathrm{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \overset{n)}{\dots}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ = matriz simpléctica 2×2 (sobre $\mathbb{R}$)

M = matriz simpléctica $2n \times 2n$ (sobre $\mathbb{R}$).

$SP_{2n}(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie

$\rightarrow SP_{2n}(\mathbb{R}) \leq M_{2n}(\mathbb{R})$

a) Cerrado para la multiplicación

Sea $X_1, X_2 \in SP_{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \begin{array}{l} X_1 M X_1^t = M \quad (*) \\ X_2 M X_2^t = M \quad (**) \end{array}$

$(X_1 X_2) M (X_1 X_2)^t = X_1 \underbrace{X_2 M X_2^t}_{(**)} X_1^t = X_1 M X_1^t =$

$\overset{(*)}{=} M$

$\Rightarrow X_1 X_2 \in SP_{2n}(\mathbb{R})$.

b) Cerrado para el inverso.

Sea $X \in SP_{2n}(\mathbb{R}) \Rightarrow X M X^t = M$

$X^{-1} X M X^t = X^{-1} M$

$X^{-1} X M X^t (X^{-1})^t = X^{-1} M (X^{-1})^t$

$$\underbrace{X^{-1}X}_{I} M \underbrace{(X^{-1}X)}_{I}^t = X^{-1} M (X^{-1})^t$$

$$M = X^{-1} M (X^{-1})^t$$

$\Rightarrow X^{-1} \in SP_{2n}(\mathbb{R})$.

Por tanto $SP_{2n}(\mathbb{R}) \leq M_{2n}(\mathbb{R})$

$\rightarrow SP_{2n}(\mathbb{R})$ cerrado.

La ecuación $XMX^t = M$ da lugar a un sistema de ecuaciones algebraicas. Por tanto, $SP_{2n}(\mathbb{R})$ cerrado.

CONCLUSIÓN: $SP_{2n}(\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

- Todos los grupos de Lie que hemos visto tienen una versión de endomorfismo.

* Ejemplos:

0) **Versión** de endomorfismo de $GL_n(\mathbb{R})$.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con $\dim(V) = n$.

$GL(V) := \{T : V \longrightarrow V : T$ lineal y biyectiva$\}$

$GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$

$T \longmapsto M_{\mathcal{B}}(T)$ donde $\mathcal{B}$ es una base cualquiera prefijada

1') Versión de endomorfismo de $SL_n(\mathbb{R})$

$SL(V) := \{T \in GL(V) : \det(T) = 1\}$ "grupo especial lineal en versión aplicación lineal.

$SL(V) \cong SL_n(\mathbb{R})$

$T \longmapsto M_B(T)$.

2') Versión de endomorfismo de $O(n)$.

Sea $V=\mathbb{R}^n$ provisto de su producto escalar euclídeo:
$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(v,w) \longmapsto \langle v, w \rangle$$

Sea $v=(v_1,\dots,v_n)$ y $w=(w_1,\dots,w_n)$:
$$\langle v, w\rangle := \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

Por tanto, $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ es un espacio euclídeo.

Definimos $O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle) := \{T \in GL(V) : \langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x,y \in V\}$

$\rightarrow O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un grupo.

a) Cerrado para la composición

Sea $T_1, T_2 \in O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\langle T_1 \cdot T_2(x), T_1 \cdot T_2(y)\rangle = \langle T_1(T_2(x)), T_1(T_2(y))\rangle \underset{\boxed{T_1 \in O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)}}{=} \langle T_2(x), T_2(y)\rangle \underset{\boxed{T_2 \in O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)}}{=} \langle x, y\rangle$$

$\Rightarrow T_1 \cdot T_2 \in O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$

b) Cerrado para el inverso.

Sea $T \in O(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$

$\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x,y \in V$. Sea el cambio de variable $a = T(x)$, $b = T(y)$.

Entonces, nos queda la ecuación anterior como

$\langle a, b\rangle = \langle T^{-1}(a), T^{-1}(b)\rangle \quad \forall a, b \in V.$

Luego $T^{-1} \in O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

CONCLUSIÓN: $O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un grupo.

$\rightarrow O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \cong O(n)$

$$O(V, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow O(n)$$

$$T \longmapsto M_B(T)$$

donde B es la base canónica de $V = \mathbb{R}^n$, es decir, $B = \{e_1, \dots, e_n\}$.

Vamos a hallar la matriz de T en B.

$$\begin{cases} T(e_1) = a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n \\ \vdots \\ T(e_n) = a_{n1}e_1 + \dots + a_{nn}e_n \end{cases}$$

$\Rightarrow M_B(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ matriz de T relativa a la base B (por filas).

Vamos a demostrar que $M_B(T)$ es ortogonal, es decir:

$$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle \quad \forall i,j = 1, \dots, n$$

$$T(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k \qquad T(e_j) = \sum_{q=1}^{n} a_{jq}e_q$$

$$\Rightarrow \langle T(e_i), T(e_j)\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k, \sum_{q=1}^{n} a_{jq}e_q\rangle =$$

$$= \sum_{k,q=1}^{n} a_{ik} a_{jq} \langle e_k, e_q \rangle = \sum_{k,q=1}^{n} a_{ik} a_{jq} \delta_{kq} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}$$

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}}$$

$$\begin{array}{cc} i \to & \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & a_{j1} & \\ & \vdots & \\ & a_{jn} & \end{pmatrix} \\ \uparrow \\ j \end{array} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \delta_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

Por tanto, la ecuación $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ se traduce en la igualdad matricial $M_B(T) \cdot M_B(T)^t = I_n$, (como queríamos demostrar).

- Por tanto: $End(V) \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ isomorfismo

$$T \longmapsto M_B(T)$$

$GL(V) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$SL(V) \longrightarrow SL_n(\mathbb{R})$

$O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \longrightarrow O(n)$ (esta aplicación es restricción de $GL(V) \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$).

Luegos son isomorfismos de grupo.

En particular: "Todo grupo de Lie admite una versión isomorfa pero con aplicaciones lineales en vez de matrices".

2.3. ÁLGEBRAS DE LIE

• Un álgebra de Lie L es un álgebra sobre un cuerpo K tal que la multiplicación del álgebra, la cual se denota por $[\cdot,\cdot]$, cumple las siguientes identidades:

i) Identidad anticonmutativa: $[x,x]=0$ $\forall x \in L$.

ii) Identidad de Jacobi: $[[x,y],z]+$ $+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0$ $\forall x,y,z \in L$.

→ Estas álgebras, generalmente no son asociativas, es decir, $[[x,y],z] \neq [x,[y,z]]$.

• OBSERVACIÓN: la identidad anticonmutativa se llama así porque:

$[x,x]=0$ $\forall x \in L$.

Sea $x=a+b$, con a y b cualesquiera

$$[a+b,a+b]=\underbrace{[a,a]}_{0}+[a,b]+[b,a]+\underbrace{[b,b]}_{0}=0$$

$\Rightarrow [a,b]+[b,a]=0 \Rightarrow [a,b]=-[b,a]$ $\forall b,a$.

Entonces $[x,x]=0$ $\forall x \Rightarrow [a,b]=-[b,a]$ $\forall a,b$.

Supongamos ahora que $[a,b]=-[b,a]$

si $a=b$: $[a,a]=-[a,a] \Rightarrow 2[a,a]=0$.

si $\mathbb{K}$, el cuerpo base, es de característica distinta de 2, podemos simplificar y nos queda que

$$[a,a]=0 \quad \forall a.$$

*Ejemplo: Sea A un álgebra asociativa sobre $\mathbb{K}$ (cuerpo). En V (espacio vectorial) subyacente de A, definimos una nueva multiplicación: $\forall\, x,y \in V$

$$[x,y]:=xy-yx$$

donde $x\cdot y$ denota la multiplicación en A.

Veamos que $(A,[\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

1) $[x,x]=0 \quad \forall x.$

$$[x,x]=x\cdot x-x\cdot x=0 \quad \checkmark$$

2) $[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=$

$$=[xy-yx,z]+[yz-zy,x]+[zx-xz,y]=$$

$$=(xy-yx)z-z(xy-yx)+(yz-zy)x-x(yz-zy)+$$

$$+(zx-xz)y-y(zx-xz)=$$

$$=\cancel{xyz}-\cancel{yxz}-\cancel{zxy}+\cancel{zyx}+\cancel{yzx}-\cancel{zyx}-\cancel{xyz}+$$

$$+\cancel{xzy}+\cancel{zxy}-\cancel{xzy}-\cancel{yzx}+\cancel{yxz}=0$$

$\Rightarrow (A,[\cdot,\cdot])$ es un álgebra de Lie.

- Sea A un álgebra asociativa sobre $\mathbb{K}$ (cuerpo), V el espacio vectorial subyacente de A y la multiplicación: $[x,y]:=xy-yx \quad \forall\, x,y\in V$, donde $x\cdot y$ denota la multiplicación en A. Llamamos $A^{-}=(A,[\cdot,\cdot])$ al álgebra antisimétrica del álgebra asociativa A.

• Decimos que una K-álgebra ~~as~~asociativa A tiene involución si existe una aplicación K-lineal $*: A \longrightarrow A$ tal que:

i) $(x+y)^* = x^* + y^* \quad \forall x,y \in A$

ii) $(xy)^* = y^* x^* \quad \forall x,y \in A$

iii) $(x^*)^* = x \quad \forall x \in A$.

→ Denotamos a los elementos antiautoadjunto de A por $K(A,*) := \{a \in A : a^* = -a\}$.

• <u>TEOREMA</u>: $K(A,*)$ es una subálgebra de Lie de A^-.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>:

1) $x,y \in K(A,*) \Rightarrow x^* = -x \quad , y^* = -y$

$$(x+y)^* = x^* + y^* = -x + (-y) = -x - y =$$
$$= -(x+y)$$
$\Rightarrow x+y \in K(A,*)$.

2) $x \in K(A,*)$, $\lambda \in K$

$$(\lambda x)^* = \lambda x^* = -\lambda x = -(\lambda x)$$
$\Rightarrow \lambda x \in K(A,*)$

(1) y (2) demuestran que $K(A,*)$ es subespacio vectorial de A^-.

3) $\forall x,y \in K(A,*)$

$$[x,y]^* = (xy - yx)^* \underset{(1)}{=} (xy)^* - (yx)^* =$$

$= y^* x^* - x^* y^* = (-y)(-x) - (-x)(-y) =$

$= yx - xy = -(xy - yx) = -[x,y]$

$\Rightarrow [x,y] \in K(A,*)$

CONCLUSIÓN: Por (1), (2) y (3), $K(A,*)$ es subálgebra de Lie de A^-. $\blacksquare$

$*$ Ejemplo: Sea $\mathcal{U}$ un álgebra sobre K cuerpo, no necesariamente asociativa. Vamos a denotar el producto de dos elementos $x, y \in \mathcal{U}$ de la forma habitual $x \cdot y = xy$.

Una aplicación K-lineal $d: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ se dice que es una derivación si cumple la identidad de Leibniz, es decir: $d(x,y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{U}$.

Sea $Der(\mathcal{U}) := \{d: \mathcal{U} \to \mathcal{U} : d \text{ es una derivación}\}$.

1) $Der(\mathcal{U})$ es un espacio vectorial sobre K.

$Der(\mathcal{U}) \subset End(\mathcal{U}) = \{T: \mathcal{U} \to \mathcal{U} : T \text{ es } K\text{-lineal}\}$

a) $\forall d_1, d_2 \in Der(\mathcal{U})$: $d_1 + d_2 \in Der(\mathcal{U})$

$$(d_1+d_2)(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y) =$$
$$= d_1(x)y + x d_1(y) + d_2(x)y + x d_2(y) =$$
$$= [d_1(x) + d_2(x)]y + x[d_1(y) + d_2(y)] =$$
$$= (d_1+d_2)(x)\, y + x\,(d_1+d_2)(y)$$

b) $\forall d \in Der(\mathcal{U})$, $\forall \lambda \in K$: $\lambda d \in Der(\mathcal{U})$

$$(\lambda d)(x,y) = \lambda d(x) y + x \lambda d(y) =$$
$$= \lambda (d(x)y + x d(y)) = \lambda d(x,y).$$

Por (a) y (b), Der ($\mathcal{U}$) es un subespacio vectorial del $End_K(\mathcal{U}) \Rightarrow$ Der ($\mathcal{U}$) es un espacio vectorial sobre K.

2) Der ($\mathcal{U}$) es subálgebra de Lie de $End_K(\mathcal{U})^-$

$\forall d_1, d_2 \in Der(\mathcal{U})$: $[d_1, d_2] \in Der(\mathcal{U})$

$$[d_1,d_2](x,y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(x,y) =$$
$$= d_1 d_2 (x,y) - d_2 d_1 (x,y) = d_1(d_2(x,y)) -$$
$$- d_2(d_1(x,y)) = d_1(d_2(x)\cdot y + x d_2(y)) -$$
$$- d_2 (d_1(x) \cdot y + x d_1(y)) =$$
$$= (d_1(d_2(x))y + \cancel{d_2(x) d_1(y)}) +$$
$$+ (\cancel{d_1(x) d_2(y)} + x d_1(d_2(y))) -$$
$$- d_2(d_1(x))y - \cancel{d_1(x) d_2(y)} - \cancel{d_2(x) d_1(y)} -$$
$$- x d_2(d_1(y)) =$$

$$= \underline{d_1(d_2(x))y} + \underline{x d_1(d_2(y))} -$$
$$- \underline{d_2(d_1(x))y} - \underline{x d_2(d_1(y))} =$$

$$= [d_1, d_2](x) y + x [d_1, d_2](y)$$

$\Rightarrow [d_1, d_2] \in Der(\mathcal{U})$.

2.4. RELACIÓN ENTRE ÁLGEBRA DE LIE Y GRUPO DE LIE

Para ver la relación entre álgebra de Lie y grupo de Lie necesitaremos varias cosas:

1) Una ecuación diferencial: Sea A un álgebra de Banach sobre $\mathbb{R}$, queremos encontrar una función derivable $y: \mathbb{R} \to A$, $t \mapsto y(t)$ tal que

$$(*)\begin{cases} y'(t) = a\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad a \in A.$$

Queremos ver que $\exists!$ $y(t)$ en las condiciones anteriores.

$$y''(t) = a\,y'(t) \overset{(*)}{=} a^2 y(t)$$
$$y'''(t) = a^2 y'(t) \overset{(*)}{=} a^3 y(t)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(t) = a^{n-1} y'(t) = a^n y(t)$$

Por tanto:

$$y(t) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}t + \frac{y''(0)}{2!}t^2 + \cdots$$

Desarrollo en series de Maclaurin

Entonces, la única solución del sistema es

$$\boxed{y(t) = 1 + \frac{t\,a}{1!} + \frac{t^2a^2}{2!} + \frac{t^3a^3}{3!} + \cdots = e^{ta}}$$

2) Sea A un álgebra de Banach real, $a \in A$.

Veamos que: $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$

Sea $y: \mathbb{R} \to A$, $y(t) := \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{ta}{n}\right)^n$

$$\boxed{y'(t)} = \lim_{n\to\infty} \cancel{n}\left(1+\frac{ta}{n}\right)^{n-1} \cdot \frac{a}{\cancel{n}} =$$

$$= a \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{ta}{n}\right)^{n-1} =$$

$$= a \cdot \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{ta}{n}\right)^n\right]^{\frac{n-1}{n}} =$$

$$\boxed{= a \cdot y(t)}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1}$$

$$\boxed{y(0) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{0 \cdot a}{n}\right)^n = 1}$$

Por lo visto en (1): $y(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{ta}{n}\right)^n =$
$= e^{at}$. Por tanto:

$$y(1) = \boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a}$$

3) Los grupos de Lie son objetos curvados.

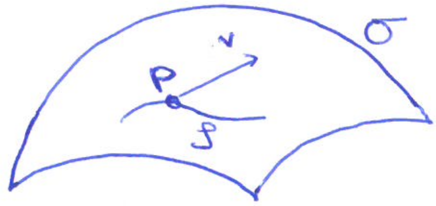
Las álgebras de Lie son objetos lineales.

*Ejemplo: $SL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} : \underbrace{xt - yz = 1}_{\text{hipersuperficie.}} \right\} \subset$

$\subset M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$

La idea es, visto en $\mathbb{R}^3$, dada una superficie σ en $\mathbb{R}^3$, tomar el conjunto

$\{v \,/\, v$ es vector tangente a σ en $P\}$.



Es decir, vamos a definir el espacio tangente de un grupo de Lie en $1 \in G$, $T_1(G)$, donde G es un grupo de Lie y 1 es el neutro de G.

- Dado un grupo de Lie G, un subgrupo uniparamétrico de G es un homomorfismo de grupo

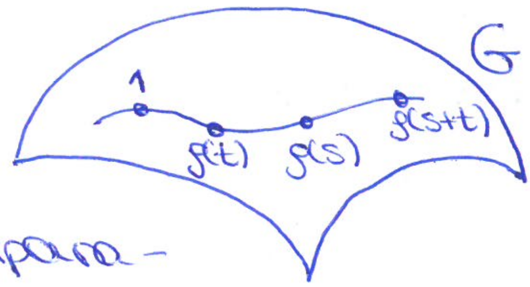
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

tal que

i) $g(t+s) = g(s)g(t) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$

ii) $g(0) = 1$

iii) g continua.



- <u>TEOREMA</u>: Todo subgrupo uniparamétrico es C^∞.

- <u>TEOREMA</u>: Si $g:\mathbb{R} \to G$ es un subgrupo uniparamétrico, entonces existe una matriz a tal que $g(t) = e^{ta}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow G \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} g(s+t) = g(s)\,g(t) \\ g(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow g'(s+t) = g'(s)\,g(t)$$

$$\Big\downarrow \boxed{s=0}$$

$$g'(t) = g'(0)\,g(t)$$

Sea $a := g'(0)$, $a \notin G$ y $a \in M_n(\mathbb{R})$.

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(t) = a e^{t} \\ g'(0) = 1 \end{cases} \qquad g(t) = e^{at}$$

- $a := g'(0)$ es una matriz a la que llamamos generador infinitesimal.

- OBSERVACIÓN:

  1) si tenemos $g: \mathbb{R} \to G$, obtengo $a = g'(0)$

  2) si tenemos $a = g'(0)$, obtengo $g = e^{at}$

- Definimos el espacio tangente de un grupo de Lie en $1 \in G$ como:

  i) $T_1(G) := \{g'(0) : g$ es subgrupo uniparamétrico$\}$ (caracterización geométrica).

  ii) $T_1(G) := \{a : g(t) = e^{at}, g: \mathbb{R} \to G$ subgrupo uniparamétrico$\} =$

  $= \{a : e^{at} \in G \ \forall t \in \mathbb{R}\}$ (caracterización algebraica).

- OBSERVACIÓN: $T_1(G)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

<u>DEMOSTRACIÓN:</u>

1) $a \in T_1(G)$, $s \in \mathbb{R}$

$$e^{ta} \in G \ \forall t \Rightarrow (e^{tas}) = e^{tas} \in G \ \forall t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sa \in T_1(G).$$

2) $a, b \in T_1(G) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots \\ e^b = 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots \end{cases}$$

$$e^a e^b = 1 + (a+b) + \left(\frac{b^2}{2!} + ab + \frac{a^2}{2!}\right) + \cdots$$

$$e^a e^b = 1 + (a+b) + \frac{1}{2!}(a^2 + 2ab + b^2) + \cdots$$

$$e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}} = 1 + \frac{t}{n}(a+b) + \frac{t^2}{2!\,n^2}(a^2+2ab+b^2) + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{t\left[(a+b) + \frac{t}{2n} R\right]}{n}$$

$$\left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right)^n = \left(1 + \left(\frac{\left[t(a+b) + \frac{t}{2n} R\right]}{n}\right)\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right)^n = e^{t(a+b)}$$

Si $a, b \in T_1(G) \Rightarrow \frac{ta}{n}, \frac{tb}{n} \in T_1(G)$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\frac{ta}{n}} \in G \quad \forall t, \forall n \\ e^{\frac{tb}{n}} \in G \quad \forall t, \forall n \end{array}\right\} \Rightarrow \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right)^n \in G$$

$x_n \in G$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \overline{G} = G$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right) \in G$, o sea, $e^{t(a+b)} \in G \ \forall t$

$\Rightarrow a+b \in T_1(G)$

Nuestro objetivo ahora será probar que $T_1(G)$ es un àlgebra de Lie.

$G \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$

$T_1(G)$ es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$.

$M_n(\mathbb{R})$ àlgebra asociativa: $M_n(\mathbb{R})^-$ antisimetrizada de $M_n(\mathbb{R})$.

$[x, y] := xy - yx$

$\Rightarrow T_1(G)$ es un subàlgebra de $M_n(\mathbb{R})^-$, es decir, $\forall x, y \in T_1(G) : [x, y] \in T_1(G)$

Necesitamos una fórmula

$e^a = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots \qquad e^b = 1 + \frac{b}{1!} + \frac{b^2}{2!} + \cdots$

$$\Rightarrow e^a e^b = 1 + (a+b) + \frac{1}{2!}(a^2+b^2+2ab) + \dots$$

$$\Rightarrow e^{-a} e^{-b} = 1 - (a+b) + \frac{1}{2}(a^2+b^2+2ab) - \dots$$

$$e^a e^b e^{-a} e^{-b} = 1 - (a+b) + (a+b) - \frac{1}{2}(a^2+b^2+a2b) -$$

$$- (a+b)^2 + \frac{1}{2}(a^2+b^2+2ab) + \dots =$$

$$= 1 + (a^2+b^2+2ab) - (a+b)^2 =$$

$$= 1 + 2ab - ab - ba + R \dots =$$

$$= 1 + ab - ba + R = 1 + [a,b] + R$$

Definimos $\{xy\} := xyx^{-1}y^{-1}$ el conmutador multiplicativo de x, y.

$\Rightarrow \{e^a e^b\} = 1 + [a,b] + R$ $\forall a,b$; $R =$ términos de grado ≥ 3.

$$\{e^{\frac{t}{n}a} e^{\frac{t}{n}b}\} = 1 + [\tfrac{ta}{n}, \tfrac{tb}{n}] + R =$$

$$= 1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R$$

$$\{e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\}^{n^2} = \left(1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \{e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\}^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t^2}{n^2}[a,b] + R\right)^{n^2} =$$

$$= e^{t^2[a,b]}$$

- <u>COROLARIO</u>: $T_1(G)$ es un álgebra de Lie.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Tomamos $a, b \in T_1(G)$

$$\left.\begin{array}{l} a \in T_1(G) \Rightarrow e^{\frac{ta}{n}} \in G \\ b \in T_1(G) \Rightarrow e^{\frac{tb}{n}} \in G \end{array}\right\} \Rightarrow e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}} \in G \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right)^{n^2} \in G \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{ta}{n}} e^{\frac{tb}{n}}\right)^{n^2} = e^{t^2[a,b]} \in G \quad \forall t$$

$\Rightarrow e^{t[a,b]} \in G \quad \forall t \geq 0$

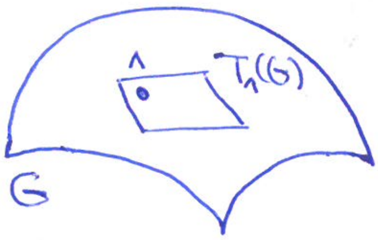
si $t<0 \Rightarrow -t>0: \; e^{-t[a,b]} \in G.$

Como G es un grupo cerrado por inversión: $\left(e^{-t[a,b]}\right)^{-1} =$

$= e^{t[a,b]} \in G.$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: e^{t[a,b]} \in G \overset{\text{Por definición}}{\Rightarrow} [a,b] \in T_1(G)$$

$\Rightarrow T_1(G)$ es un álgebra de Lie.



linealizar un problema es resolver el problema en el álgebra de Lie pasando el grupo al tangente, y luego volviendo al grupo.

Dado un grupo de Lie G, siempre podemos asociar un álgebra de Lie que es $T_1(G) := \text{lie}(G)$.

$$G \rightsquigarrow \text{lie}(G)$$
$$\text{grupo} \rightsquigarrow \text{álgebra}$$

* Ejemplos

1) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{ m \in M_n(\mathbb{R}) : \det(m) = 1 \}$

$$\text{lie}(G) := \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : e^{ta} \in G \;\; \forall t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : \det(e^{ta}) = 1 \;\; \forall t \in \mathbb{R} \} =$$
$$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : \underbrace{e^{t \cdot tr(a)} = 1}_{} \;\; \forall t \in \mathbb{R} \}$$

$\downarrow$ derivando

$$tr(a)\, e^{t \cdot tr(a)} = 0 \Rightarrow tr(a) = 0$$

$\Rightarrow \text{lie}(G) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : tr(a) = 0 \} =: s\ell_n(\mathbb{R})$
álgebra lineal especial.

$$\text{lie}(SL_n(\mathbb{R})) = s\ell_n(\mathbb{R})$$

2) $O(n) = \{ m \in M_n(\mathbb{R}) : m \cdot m^t = I_n \}$

$lie(O(n)) := \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : e^{sa} \in G \ \forall s \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : e^{sa}(e^{sa})^t = I_n \ \forall s \in \mathbb{R} \} =$

$$\Big\downarrow \text{derivando}$$

$$a e^{sa}(e^{sa})^t + e^{sa}(a e^{sa})^t = 0$$

$$\Big\downarrow s=0$$

$$a + a^t = 0 \Rightarrow \boxed{a^t = -a}$$

si $a^t = -a$: $(e^{sa})^t = e^{sa^t} = e^{-sa}$

$$e^{sa}(e^{sa})^t = e^{sa} e^{-sa} = e^0 = I_n$$

$\Rightarrow lie(O(n)) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : a^t = -a \} = o(n)$
álgebra de lie ortogonal o álgebra de matrices antisimétricas.

3) $G = GL_n(\mathbb{R}) = \{ m \in M_n(\mathbb{R}) \ / \ \det(m) \neq 0 \}$.

$lie(G) = \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : e^{ta} \in GL_n(\mathbb{R}) \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : \det(e^{ta}) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$

$= \{ a \in M_n(\mathbb{R}) : \underbrace{e^{t \cdot tr(a)} \neq 0}_{\text{se cumple siempre}} \ \forall t \in \mathbb{R} \} =$

$= M_n(\mathbb{R})$

$lie(GL_n(\mathbb{R})) = gl_n(\mathbb{R})$ álgebra general lineal.

$$\underset{\text{algebra de lie}}{gl_n(\mathbb{R})} = \underset{\text{álgebra asociativa}}{M_n(\mathbb{R})}$$

*EJERCICIO: $U(n) = \{ m \in M_n(\mathbb{C}) : mm^* = I_n \}$

$$m = (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \longrightarrow m^* = (\overline{a_{ji}})_{i,j=1}^{n}$$

Demostrar que $Lie(U(n)) = u(n) = \{ a \in M_n(\mathbb{C}) : a^* = -a \}$.

$$-\overline{a_{ji}} = a_{ij} \quad \forall i,j = 1, \dots, n$$

$$-\overline{a_{ii}} = a_{ii}, \quad a_{ii} \in i\mathbb{R}.$$

$$u(3) = \left\{ \begin{pmatrix} ia & z_1 & z_2 \\ -z_1 & ib & z_3 \\ -z_2 & -z_3 & ic \end{pmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R},\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}$$

álgebra de Lie unitaria 3x3.

Para finalizar este capítulo, vamos a definir las categorías de grupos de Lie y álgebras de Lie, dando el funtor que las relacionan.

- LieGrp es la categoría cuyos objetos son los grupos de Lie y cuyos morfismos son

$$f : G_1 \longrightarrow G_2$$

homomorfismos de grupos de Lie.

- Lie Alg es la categoría cuyos objetos son las álgebras de Lie y cuyos morfismos son

$$g : L_1 \longrightarrow L_2$$

donde L_1 y L_2 son álgebras de Lie.

→ Si g es lineal y $g([x,y]) = [g(x), g(y)]$ $\forall\, x, y \in L_1$, llamamos a g el homomorfismo de álgebra de Lie.

- Dado $f: G \to H$ un homomorfismo de grupos de Lie, queremos construir un homomorfismo de álgebra $\mathrm{Lie}(f): \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(H)$

tal que:

$$\mathrm{LieGrp} \longrightarrow \mathrm{LieAlg}$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)"] \\
H \arrow[r] & \mathrm{Lie}(H)
\end{tikzcd}$$

sea un funtor, es decir:

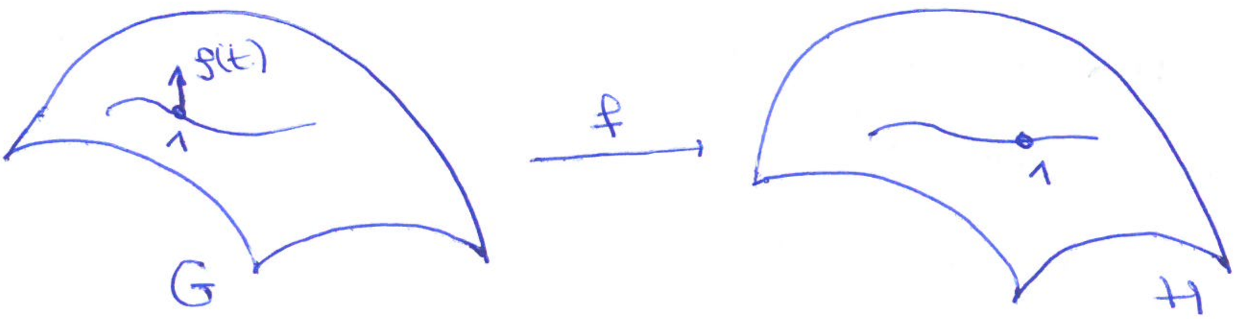
i) $\mathrm{Lie}(f \circ g) = \mathrm{Lie}(f) \circ \mathrm{Lie}(g)$

ii) $\mathrm{Lie}(1_G) = 1_{\mathrm{Lie}(G)}$

Tenemos $f: G \to H$ homomorfismo de grupos de Lie.

$\mathrm{Lie}(G) = T_1(G) = \{\varsigma'(0) : \varsigma \text{ subgrupo uniparamétrico}\}$.

$\mathrm{Lie}(H) = T_1(H) = \{\sigma'(0) : \sigma \text{ subgrupo uniparamétrico}\}$.



$$\mathbb{R} \xrightarrow{\varsigma} G \xrightarrow{f} H \Longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{f \circ \varsigma} H$$

homomorfismo de grupos continuo

homomorfismo de grupos continuo

$$\begin{array}{ccc} \text{Subgrupos uniparamétricos de } G & \longrightarrow & \text{Subgrupos uniparamétricos de } H \\ g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

$T_1(G) = \{ g'(0) : g \text{ subgrupo uniparamétrico de } G \}$

$T_1(H) = \{ \sigma'(0) : \sigma \text{ subgrupo uniparamétrico de } H \}$

$$\begin{array}{ccc} T_1(G) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(H) \\ g'(0) & \longmapsto & (f \circ g')(0) \end{array}$$

Esta aplicación $T_1(f)(g'(0)) := (f \circ g')(0)$ va a ser nuestra candidata a homomorfismo de álgebra de Lie.

Para ello, tenemos que comprobar dos cosas:

1) $T_1(f)$ es lineal

2) $T_1(f)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

1 Sea $a := g'(0)$ y $b := (f \circ g')(0)$

$\Rightarrow \boxed{T_1(f)(a) = b}$ (*)

$\boxed{T_1(f)(g'(0)) = (f \circ g')(0)}$

• <u>LEMA</u>: $f(e^{ta}) = e^{t\, T_1(f)(a)} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall a \in T_1(G)$

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: $f(e^{ta}) = f(g(t)) = (f \circ g)(t) =$

$\boxed{\begin{array}{l} g(t) = e^{ta} \text{ es un subgrupo uniparamétrico} \\ \text{cuyo generador infinitesimal es } a = g'(0) \end{array}}$

$= e^{tb} \overset{(*)}{=} e^{tT_1(f)(a)}$

$\boxed{\begin{array}{l}(f\circ g)(t) \text{ es un subgrupo uniparamétrico cuyo generador infinitesimal es } (f\circ g)'(0) = b. \\ (f\circ g)(t) = e^{tb}\end{array}}$

■

• OBSERVACIÓN: Para $t=1$, el lema nos dice que $f(e^a) = e^{T_1(f)(a)}$ $\forall a \in T_1(G)$. Esto nos permite decir que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] & H \\ T_1(G) \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "T_1(f)"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & T_1(H) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{porque } T_1(G) = \{a : \\ e^{ta} \in G\ \forall t\} \Rightarrow \text{si } a \in \\ \in T_1(G) : e^a \in G\end{array}}$

• COROLARIO: $T_1(f)$ es aditiva, es decir, $T_1(f)(x+y) = T_1(f)(x) + T_1(f)(y)$ $\forall x, y$.

DEMOSTRACIÓN: $\boxed{e^{t(x+y)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{tx}{n}} e^{\frac{ty}{n}}\right)^n}$ $**$

$$f(e^{t(x+y)}) \underset{\boxed{f \text{ continua}}}{=} \lim_{n\to\infty} f\left[\left(e^{\frac{tx}{n}} e^{\frac{ty}{n}}\right)^n\right] \underset{\boxed{f \text{ homomorfismo de grupos}}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(e^{\frac{tx}{n}}) f(e^{\frac{ty}{n}}) \underset{\boxed{\text{Por el lema anterior}}}{=} \lim_{n\to\infty} \left[e^{\frac{t}{n}T_1(f)(x)} \cdot e^{\frac{t}{n}T_1(f)(y)}\right]^n \underset{(**)}{=} e^{t(T_1(f)(x) + T_1(f)(y))}$$

Aplicando el lema anterior a $f(e^{t(x+y)})$ obtenemos que $f(e^{t(x+y)}) = e^{t\,T_1(f)(x+y)}$

Uniendo las dos ecuaciones:

$$e^{t(T_1(f)(x)+T_1(f)(y))} = e^{t\,T_1(f)(x+y)}$$

$$e^{tu} = e^{tv} \quad \forall t \underset{\boxed{\text{derivando}}}{\Rightarrow} u\,e^{tu} = v\,e^{tv} \underset{\boxed{t=0}}{\Rightarrow} u=v$$

Aplicando esto a la última ecuación obtenida, tenemos que: $T_1(f)(x+y) = T_1(f)(x) + T_1(f)(y)$. ■

• <u>COROLARIO</u>: $T_1(f)(\lambda a) = \lambda\, T_1(f)(a) \;\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in T_1(G)$.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>:

→ $n \in \mathbb{Z}$: $T_1(f)(nx) = T_1(f)(x + \overset{n)}{\ldots} + x) \overset{\boxed{\text{COROLARIO}}}{=}$

$$= T_1(f)(x) + \overset{n)}{\ldots} + T_1(f)(x) = n\,T_1(f)(x).$$

→ $-n \in \mathbb{Z}$: $T_1(f)(-nx) = -T_1(f)(nx) = -n\,T_1(f)(x)$

$$\boxed{\text{EJERCICIO: } T_1(f)(-x) = -T_1(f)(x)}$$

→ $n/m \in \mathbb{Q}$: $T_1(f)(\frac{n}{m}x)$

$$m\,T_1(f)(\tfrac{n}{m}x) = T_1(f)(\tfrac{n\cancel{m}}{\cancel{m}}x) = T_1(f)(nx) = n\,T_1(f)(x)$$

$$\Rightarrow T_1(f)(\tfrac{n}{m}x) = \frac{n}{m}\,T_1(f)(x)$$

Por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y por continuidad, sale para todo real: $T_1(f)(rx) = r\,T_1(f)(x)$ $\forall r \in \mathbb{R}$ ■

<u>OTRA DEMOSTRACIÓN</u>: $f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall a \in T_1(G)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(e^{t\lambda a}) = e^{tT_1(f)(\lambda a)} \\ \qquad = e^{t\lambda T_1(f)(a)} \end{array}\right\} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} T_1(f)(\lambda a) = \lambda T_1(f)(a)$$

$$\boxed{e^{tu} = e^{tv}\ \forall t \Rightarrow u = v}$$

- Con los dos corolarios, obtenemos que:

$$T_1(f) : T_1(G) \longrightarrow T_1(H) \text{ es lineal.}$$

(2)

- <u>TEOREMA</u>: $T_1(f) : T_1(G) \longrightarrow T_1(H)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie.

<u>DEMOSTRACIÓN</u>: Tenemos que ver que

$$T_1(f)([x,y]) = [T_1(f)(x), T_1(f)(y)]$$

Sabemos que

$$\left\{\begin{array}{l} \text{I)}\ e^{t^2[x,y]} = \lim\limits_{n\to\infty} \{ e^{\frac{tx}{n}} e^{\frac{ty}{n}} \}^{n^2} \\ \text{II)}\ f(e^{ta}) = e^{tT_1(f)(a)} \end{array}\right.$$

Aplicamo f a (I)

$$f(e^{t^2[x,y]}) \underset{\uparrow}{=} \lim_{n\to\infty} \{ f(e^{\frac{tx}{n}}) f(e^{\frac{ty}{n}}) \}^{n^2} =$$

f continua

$\{x y\} = x y x^{-1} y^{-1}$ $\quad \boxed{f \text{ homomorfismo}}$

$$f(\{x y\}) = f(x y x^{-1} y^{-1}) \underset{\downarrow}{=} f(x) f(y) f(x)^{-1} f(y)^{-1} = \{ f(x) f(y) \}$$

$$\overset{(II)}{=} \lim_{n\to\infty} \left\{ e^{\frac{t}{n}T_1(f)(x)}\, e^{\frac{t}{n}T_1(f)(y)} \right\}^{n^2} \underset{(I)}{=}$$

$$= e^{t^2[T_1(f)(x),\,T_1(f)(y)]} = e^{t^2 T_1(f)([x,y])}$$

$\boxed{\text{Aplicando (II) a } f(e^{t^2[x,y]})}$

$$\Longrightarrow [T_1(f)(x),\,T_1(f)(y)] = T_1(f)([x,y])$$

$\boxed{e^{tu}=e^{tv}\ \forall t \Rightarrow u=v}$

Luego $T_1(f)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie ∎

- Llamamos $\mathrm{Lie}(f) := T_1(f)$ al homomorfismo de álgebras de Lie.

Por tanto:

LieGrp := categoría de grupos de Lie

LieAlg := categoría de álgebras de Lie

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lie} : \mathrm{LieGrp} \arrow[rr] & & \mathrm{LieAlg} \\
G \arrow[rr, mapsto] \arrow[d, "f"'] & & \mathrm{Lie}(G) \arrow[d, "\mathrm{Lie}(f)"] \\
H \arrow[rr, mapsto] & & \mathrm{Lie}(H)
\end{tikzcd}$$

Para poder decir que Lie es un funtor, nos falta ver que: si
$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "t\circ f"'] & H \arrow[r, "t"] & K
\end{tikzcd}$$
, entonces:

i) $Lie(t \circ f) = Lie(t) \circ Lie(f)$

ii) $Lie(1_G) = 1_{Lie(G)}$

Esto se deja como ejercicio.

• OBSERVACIÓN: El funtor de Lie linealiza las curvaturas.

3. REPRESENTACIONES DE LIE

3.1. DEFINICIONES

Sea $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$ donde V es un espacio de la representación y ρ es un homomorfismo de grupos.

→ Cuando V es de dimensión finita $(\dim(V)=n)$
$\Rightarrow GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$ y
$\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ es un homomorfismo de grupos.

• Una representación finito-dimensional de un grupo de lie G no es más que un homomorfismo de grupos de lie, $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ (por tanto, ρ es continua).

$\rho: G \to GL(V)$ representación del grupo de lie G.
$G \times V \longrightarrow V$ → Esto dota a V de estructura
$g \circ v := \rho(g)(v)$ de G-módulo, y viceversa.

• Sea L una $\mathbb{R}$-álgebra de lie, entonces una representación (finito-dimensional) de L es un homomorfismo de álgebra de lie $r: L \to gl(V)$ donde V es espacio vectorial real de dimensión finita: $gl(V) := \{T: V \to V : T \text{ lineal}\}$
álgebra general lineal.

$[T,T'] := TT' - T'T$

→ si $\dim(V) = n < \infty \Rightarrow \mathfrak{gl}(V) \cong \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, donde $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ son todas las matrices reales $n \times n$

*Ejemplos:

- $\mathrm{Lie}(GL_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$
- $\mathrm{Lie}(SL_n(\mathbb{R})) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ → matrices de traza 0.
- $\mathrm{Lie}(O(n)) = \mathfrak{o}(n)$ → matrices antisimétricas
- $\mathrm{Lie}(U(n)) = \mathfrak{u}(n)$ → matrices antihermítica.
- $\mathrm{Lie}(GL(V)) = \mathfrak{gl}(V)$
- $\mathrm{Lie}(SL(V)) = \mathfrak{sl}(V)$

3.2.- RELACIÓN ENTRE LAS REPRESENTACIONES DE GRUPOS Y ÁLGEBRAS DE LIE

• Supongamos que tenemos una representación $\rho: G \to GL(V)$ donde ρ es un homomorfismo de grupos de Lie.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho"] & GL(V) \\ \mathrm{Lie}(G) \arrow[u, "\exp."] \arrow[r, "r := \mathrm{Lie}(\rho)"'] & \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{Lie}(GL(V)) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow r$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, luego r es una representación del álgebra $\mathrm{Lie}(G)$ en V.

Toda representación de un grupo de Lie de un espacio V induce una representación de su álgebra de Lie en el mismo espacio V por el diagrama anterior, y viceversa.

· Una de las tareas de la Teoría de representaciones es determinar todas las representaciones irreducibles de un grupo dado. En la práctica, lo que se hace es pasar de la representación $\rho: G \to GL(V)$ a $r = lie(\rho): lie(G) \to$
$\to gl(V)$.

Es mucho más sencillo determinar todas las representaciones de un álgebra de Lie que las de su grupo.

*Ejemplo: $G = SL_3(\mathbb{R})$. Si quiero calcular sus representaciones irreducibles, es mucho más sencillo considerar $lie(G) = sl_3(\mathbb{R}) =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & x & y \\ x' & \beta & z \\ y' & z' & -\alpha-\beta \end{pmatrix} : x, y, z, x', y', z', \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{B} = Base(lie(G)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$ y calcular sus representaciones.

Vamos a ver, a través de un ejemplo, cómo relacionar un grupo con un grupo de Lie.

*Ejemplo:

$S^1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} = \{(\cos t, \operatorname{sen} t) : t\in[0,2\pi)\}$

$$S^1 \longrightarrow \left\{\begin{pmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{pmatrix} : t\in[0,2\pi)\right\} \subset GL_2(\mathbb{R}).$$

$$(\cos t, \operatorname{sen} t) \longmapsto \begin{pmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{pmatrix}$$

Denotamos $G := \left\{\begin{pmatrix}\cos t & \operatorname{sen} t\\ -\operatorname{sen} t & \cos t\end{pmatrix} : t\in[0,2\pi)\right\}$, que es un subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$.

Observamos que los elementos en G satisfacen que $x x^t = 1$.

En general: $O(n) = O_n(\mathbb{R}) = \{x\in M_n(\mathbb{R}) : xx^t = 1\} \subset GL_n(\mathbb{R})$. Este es llamado el grupo ortogonal.

$O(n)$ es un subgrupo de $GL_n(\mathbb{R})$, pero es cerrado $\Rightarrow$ $O(n)$ es un grupo de Lie.

Por tanto, $O(2)$ es un grupo de Lie.

$$O(2) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} =$$

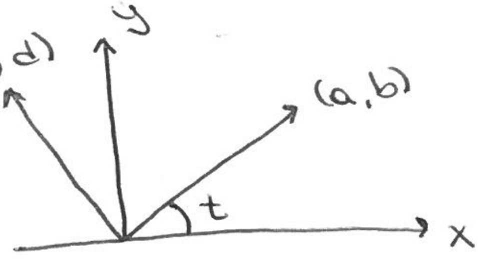
$$= \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} : a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1,\ ac+bd = 0\right\}$$

Así, (a,b) y (c,d) son vectores unitarios ortogonales de $\mathbb{R}^2$. Podemos diferenciar dos casos:

<u>Caso 1</u>

$a = \cos t \qquad b = \operatorname{sen} t$

$c = -\operatorname{sen} t \qquad d = \cos t$



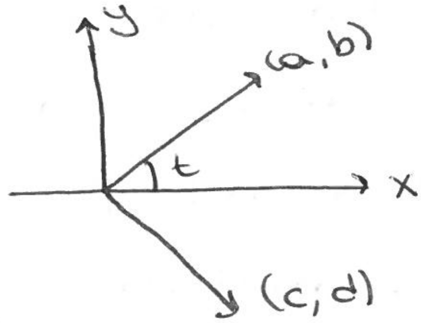
Giros en el plano

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \longrightarrow \text{su determinante es } 1.$$

<u>Caso 2</u>

$a = \cos t \qquad b = \operatorname{sen} t$

$c = \operatorname{sen} t \qquad d = -\cos t$



Giro seguido de una isometría.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} \longrightarrow \text{su determinante es } -1$$

Por tanto:

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} : t \in [0, 2\pi) \right\}$$

Sea $O(2)^+ := \{ x \in O(2) : |x| = 1 \}$

$O(2)^- := \{ x \in O(2) : |x| = -1 \}$

$O(2)^+$ es un subgrupo normal de $O(2)$ denotado $SO(2)$ (grupo especial ortonormal). $O(2)^-$ no.

$O(2) = O(2)^+ \cup O(2)^-$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & -\cos t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Simetría respecto al eje } x.} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}}_{\text{Giro de ángulo } t}$$

En general: en todo grupo $O(n)$

$O(n)^+ := \{x \in O(n) : \det(x) = 1\}$

$O(n)^- := \{x \in O(n) : \det(x) = -1\}$

$xx^t = 1 \rightarrow \det(x)\det(x^t) = 1 \Rightarrow \det(x)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(x) = \pm 1$ $\quad \boxed{\det(x^t) = \det(x)}$

$O(n) = O(n)^+ \cup O(n)^-$

$O(n)$ es abeliano sólo cuando $n=2$.

$SO(n) := O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{x \in O(n) : \det(x) = 1\} =$

$= O(n)^+$

$SU(n) := \{x \in U(n) : \det(x) = 1\}$ grupo especial unitario.

$O(2)$ es un grupo abeliano

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t' & \operatorname{sen} t' \\ -\operatorname{sen} t' & \cos t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t+t') & \operatorname{sen}(t+t') \\ -\operatorname{sen}(t+t') & \cos(t+t') \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t' & \operatorname{sen} t' \\ -\operatorname{sen} t' & \cos t' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

Veamos que $G = O(2)^+ = SO(2) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a^2+b^2 = 1, c^2+d^2 = 1, ac+bd = 0, ad+bc = 1\}$ es subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$.

$$\Phi: M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4 \text{ continua}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a^2+b^2-1,\ c^2+d^2-1,\ ac+bd,\ ad-bc-1).$$

$$SO(2) = \Phi^{-1}(\underbrace{(0,0,0,0)}_{\text{cerrado}}) \Rightarrow SO(2) \text{ es cerrado.}$$

$$S^1 \longrightarrow G \subset GL_2(\mathbb{R})$$

$$(\cos t, \operatorname{sen} t) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S^1$ es isomorfo a $G = SO(2)$, que es subgrupo cerrado de $GL_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow S^1 \cong SO(2)$ es un grupo de Lie.

Como $SO(2) \cong S^1$, $SO(2)$ es compacto y conexo.

- Un grupo de Lie se puede ver como una estructura algebraica o como un espacio topológico.

Por lo general, las "buenas" propiedades topológicas se traduces en "buenas" propiedades algebraicas.

Veamos que $O(2)^+$ y $O(2)^-$ son subespacios topológicos conexos.

$$[0, 2\pi) \longrightarrow O(2)^+$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}$$

es una aplicación continua y $[0,2\pi)$ es conexo. Así, la imagen ($O(2)^+$) es conexo.

Análogamente, $O(2)^-$ es conexo.

En particular: $O(2)^+$ y $O(2)^-$ son las componentes conexas de $O(2)$.

*Ejemplo:

$$G = Gl_n(\mathbb{R}) = \{m : \det(m) \neq 0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} G^+ = \{m \in G : \det(m) > 0\} \\ G^- = \{m \in G : \det(m) < 0\} \end{array}\right\} \Rightarrow G = \underset{\substack{\cup\!\shortmid \\ 1}}{G^+} \cup G^-$$

Si demostramos que G^+ y G^- son conexos (cosa que es cierta pero no vamo a entrar en detalles) $\Rightarrow$ G^+ y G^- son las componentes conexas de $Gl_n(\mathbb{R})$.

$G^+ \triangle G$ (G^+ es subgrupo normal de G).

- Sea $G = \bigcup_{i\in I} X_i$ donde G es un grupo de Lie y X_i son las componentes conexas de él. Entonces $1 \in X_i$ para un solo $i \in I$.

En general, esta componente es un subgrupo normal de G.

Normalmente, la componente conexa de la unidad es denotada por G_0. El grupo cociente G/G_0 es llamado el grupo de componentes de G.

* En el caso $O(2)$: la componente conexa de la unidad es $O(2)^+$ y el cociente $O(2)/O(2)^+$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2=\{0,1\}$.

Definimos: $O(2) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$

$x \longmapsto 0$, si $x\in O(2)^+$

$x \longmapsto 1$, si $x\in O(2)^-$

Este es un epimorfismo de grupo con núcleo $O(2)^+$, por tanto se tiene el isomorfismo

$$O(2)/O(2)^+ \cong \mathbb{Z}_2$$

* Ejemplo:

$$GL_n(\mathbb{R}) = \underset{\substack{\psi\\ 1}}{GL_n(\mathbb{R})^+} \cup GL_n(\mathbb{R})^-$$

$$GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})^+ \cong \mathbb{Z}_2$$

$$GL_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\Omega} \mathbb{Z}_2$$

$x \longmapsto 0$, si $\det(x)>0$

$x \longmapsto 1$, si $\det(x)<0$

es un epimorfismo de grupo; $Ker(\Omega)=GL_n(\mathbb{R})^+$.

Por el teorema de isomorfía: $GL_n(\mathbb{R})/GL_n(\mathbb{R})^+ \cong \mathbb{Z}_2$.

• TEOREMA: Toda representación irreducible compleja de un grupo abeliano es 1-dimensional.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\rho: G \to GL(V)$ una representación, sea $S\leq V$ subespacio vectorial de V.

se dice que S es ρ-invariante si $\forall g \in G$: $\rho(g)(S) \subset S$ ($\rho(g): V \longrightarrow V$).

Como consecuencia, ρ es irreducible si y sólo si los únicos subespacios de V que son ρ-invariantes son $\{0\}$ y V, es decir, los únicos G-módulos de V son $\{0\}$ y V.

Sea G un grupo abeliano y $\rho: G \to GL(V)$ una representación irreducible. Fijado $g \in G \setminus \{1\}$ y considerando $\rho(g): V \to V$ un isomorfismo. Existe una cierta base B de V tal que la matriz de $\rho(g)$ es diagonal por bloques.

$M_B(\rho(a)) = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$ con J_i bloques de Jordan $\left(\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}\right)$.

$\rho(g)(v) = \lambda v \to \exists$ un vector propio de autovalor λ, con $v \neq 0$.

Entonces existe un subespacio $V_\lambda = \{x \in V : \rho(g)(x) = \lambda x\}$ no nulo tal que $\rho(g)|_{V_\lambda} = \lambda \cdot id$.

Para cualquier $h \in G$, tenemos que $\rho(h)(V_\lambda) \subset V_\lambda$. Tomemos $v \in V_\lambda$ arbitrario. Entonces

$$\rho(g)\,\rho(h)(v) \underset{\uparrow}{=} \rho(h)\,\rho(g)(v) = \rho(h)(\lambda v) =$$

grupo abeliano
ρ homomorfismo de grupo

$= \lambda \rho(h) v \Rightarrow \rho(h) \in V_\lambda$

$\Rightarrow \rho(h)(V_\lambda) \subset V_\lambda \ \forall h \in G$

$\Rightarrow V_\lambda$ es un subespacio de V ρ-invariante (y $V_\lambda \neq 0$). Como V_λ es irreducible y $V_\lambda \neq 0 \Rightarrow V = V_\lambda \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall g \in G$: $\rho(g)$ es un escalar multiplicado por la identidad: $\rho(g) := \lambda_g \cdot 1$.

Fijamos un $w \in V$, $w \neq 0$ y consideramos el subespacio $\mathbb{C}w \Rightarrow \mathbb{C}w$ es ρ-invariante, ya que $\rho(g)(w) = \lambda_g w \in \mathbb{C}w$.

Como V es irreducible: $\mathbb{C}w = V$, y así $\dim(V) = 1$, cqd. ∎

3.3. APLICACIÓN

Sea $f(x,y)$ una función y tomemos la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$SO(2) \times V \longrightarrow V$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f(x,y) := f(ax+by, cx+dy)$$

Si $f(x,y)$ es solución $\Rightarrow f(ax+by, cx+dy)$ es solución.

V es un $SO(2)$-módulo, espacio de soluciones.

$$\rho: SO(2) \longrightarrow GL(V)$$

Si la representación ρ es irreducible $\Rightarrow \dim(V) = 1$, es decir, hay un espacio de soluciones 1-dimensional.

Busco $\mathbb{R} f(x,y) = \{c f(x,y) : c \in \mathbb{R}\}$

$$SO(2) \times \mathbb{R} f(x,y) \longrightarrow \mathbb{R} f(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} f(x,y) \longmapsto f(x\cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y\cos t)$$

$\Rightarrow f(x\cos t - y\operatorname{sen} t, x\operatorname{sen} t + y\cos t) = K_t \cdot f(x,y) \Rightarrow$

$\boxed{y=0}$

$\Rightarrow f(x\cos t, x\operatorname{sen} t) = K_t f(x,0) \Rightarrow$

$\boxed{x=r}$

$\Rightarrow f(r\cos t, r\operatorname{sen} t) = K_t f(r,0) \Rightarrow$

$\boxed{x = r\cos t,\ y = r\operatorname{sen} t}$

$\Rightarrow f(x,y) = K_t f(r,0)$ separación de variables.

$\Rightarrow f(x,y) \underset{(*)}{=} \alpha(r)\beta(t)$ donde

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\operatorname{sen} t \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ t = \arctan y/x \end{cases}$$

La solución es producto de una función de r por una función de t.

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \xrightarrow[\boxed{\text{Cambiando a } r \text{ y } t}]{} \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} = 0$$

(*) $\Rightarrow \frac{1}{r}\alpha'(r)\beta(t) + \frac{1}{r^2}\alpha(r)\beta''(t) + \alpha''(r)\beta(t) = 0$

$$\frac{1}{r}\alpha'(r) + \frac{1}{r^2}\alpha(r)\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} + \alpha''(r) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\beta''(t)}{\beta(t)} + \frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)} = 0$$

$$r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} + \frac{\beta''(t)}{\beta(t)} + r^2\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)} = 0$$

$$r\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} + r^2\frac{\alpha''(r)}{\alpha(r)} = -\frac{\beta''(t)}{\beta(t)}$$

$\Rightarrow$ Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} \dfrac{\beta''(t)}{\beta(t)} = K_1 \text{ constante} & \text{(E.D. lineal de coeficientes constantes).} \\[2ex] r\dfrac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} + r^2\dfrac{\alpha''(r)}{\alpha(r)} = -K_1 \text{ constante} & \text{(E.D. lineal de coeficientes constantes).} \end{cases}$$

cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} \beta(t) = C_1\cdot\cos(\sqrt{K_1}\cdot t) + C_2\cdot\operatorname{sen}(\sqrt{K_1}\cdot t) \\ \alpha(r) = C_1\cdot\cos(\sqrt{K_1}\cdot\log r) + C_2\cdot\operatorname{sen}(\sqrt{K_1}\cdot\log r) \end{cases}$$

donde $f(x,y) = \alpha(r)\beta(t) = \alpha(\sqrt{x^2+y^2})\cdot$
$\cdot\beta(\arctan y/x)$