30-XI-21 T. repr. Cristina Draper.

Representaciones de S_n ; todo grupo finito es un subgrupo de algún S_n (T. de Cayley).

Resumen. "Lo importante de los objetos no son ellos mismos sino como actúan" (1) Record. de def. de representación (compleja) $G \xrightarrow{\rho} GL(m, \mathbb{C})$; (2) Todo G-módulo es complet. reducible (3) nos centramos en repr. de grado finito ; (4) objetivo: calcular las IRREPS y las veces que aparecen en la descomp. de un G-módulo ; (5) Herramienta clave: Los caracteres.

$$\mathbb{C}_{clase}(G) = \{ f : G \to V \mid f(g) = f(g'), \ g \overset{\text{cuando}}{\text{conjugado}} \text{ a } g' \}$$

$\chi_V \in \mathbb{C}_{clase}(G)$, es un esp. vectorial.

$\chi_{V_1}, \dots, \chi_{V_2}$ los caracteres de IRREPS son base de $\mathbb{C}_{clase}(G)$

En $\mathbb{C}_{clase}(G)$ definim el prod. escalar $(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_g \overline{\alpha(g)} \beta(g)$

$\{\chi_{V_i}\}$ es B.O.N de $\mathbb{C}_{clase}(G)$. Consecuencias:

V está determinado por $\chi_V = \sum_i n_i \chi_{V_i}$ si $V = \bigoplus_i n_i V_i$

$(\chi_V, \chi_{V_i}) = n_i$. Se ha visto también que $\mathbb{C}G \cong \sum_i \dim(V_i) V_i$

V irreducible $\Leftrightarrow (\chi_V, \chi_V) = 1$. También nº de irreps = = nº de clases de conj. de G.

FULTON-HARRIS
representation theory.
SPRINGER

Repr. de S_n. Revisitamos S_3; hay 3 clases de conj.

Prop. # clases de conj. de S_n = # de particiones de n

$p(n)$ = # de particiones de n (e.g. $p(5) = 7$).

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$

$\sum \lambda_i = n$

Dem.: $f: \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ f(1) & \cdots & & f(n) \end{pmatrix}$$ y se pueden escribir como productos de ciclos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2)(3\,5)(4)$$

$$\sigma(a_1 \cdots a_k)\sigma^{-1} = (\sigma(a_1) \cdots \sigma(a_k))$$

Dos permut. (elem. de S_n) son conj $\iff$ tienen la misma estructura de ciclos. ∎

En S_3 $3 = 3,\ 2+1,\ 1+1+1$ hay 3 irreps.

$\rho: G \to \mathbb{C}^\times$, G abeliano, $\rho(G') = 1$, $G/G' = \mathbb{Z}_2$

induce una repr. en $\mathbb{Z}_2$. La enseñanza es que si algo actúa trivialmente podemos hacer cociente y pasar a algo mas sencillo.

$$G/G' = \{[1], [2]\} \qquad \rho: G/G' \to \mathbb{C}^\times$$

$$[1] \longrightarrow 1$$

$$[(1,2)] \longrightarrow -1$$

Luego $\rho: G \to \mathbb{C}^\times$ Esta es la repr. signatura

$$1, (1,2,3), (1,3,1) \longmapsto 1$$

$$(1,2), (1,3), (2,3) \longmapsto -1$$

Tambien tenemos la trivial. Para ver la repr. de grado 2 veamos la acción

$$S_3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \quad (\text{y sea } \rho \text{ la repr. asociada})$$

$$(\sigma, (x_1, x_2, x_3)) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

$$S_3 \longrightarrow GL(\mathbb{C}^3) \xrightarrow{tr} \mathbb{C}^*$$

$$1 \longmapsto id \longmapsto 3$$

$$(1,2) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto 1$$

$$(1,2,3) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto 0$$

	1	(1,2)	(1,2,3)
		3	2
χ_V	3	1	0

$$(\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{6}(9+3) = 2$$

$\updownarrow$

$W = \mathbb{C}(1,1,1)$ es ρ-invariante luego ρ no es IRREP.

$$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}(1,1,1) \oplus W'$$

	1	(1,2)	(1,2,3)
χ_V	3	1	0
trivial	1	1	1
$\chi_{W'}$	2	0	-1

y se ve que es irrep $\langle \chi_{W'}, \chi_{W'} \rangle = 1$.

<u>Irreps de S_4</u>. $\quad 4, 3+1, 2+1+1, 1+1+1+1, 2+2$

24	1	6	8	6	3
	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
trivial	1	1	1	1	1
sgn	1	-1	1	-1	1
est	3	1	0	-1	-1
est⊗sgn	3	-1	0	1	-1
desc	α	β	γ	δ	ε

tabla de caract.

La que falta se puede sacar poniendo

$$\begin{cases} \alpha + 6\beta + 8\gamma + 6\delta + 3\varepsilon = 0 \\ \alpha - 6\beta + 8\gamma - 6\delta + 3\varepsilon = 0 \\ 3\alpha + 6\beta - 6\delta - 3\varepsilon = 0 \\ 3\alpha - 6\beta + 6\delta - 3\varepsilon = 0 \end{cases}$$

$\alpha + 8\gamma + 3\varepsilon = 0$

$\beta + \delta = 0$

$\alpha = \varepsilon$ $\quad$ $\beta = \delta = 0$

$\beta = \delta$

sale $\boxed{4 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0}$

K = subgr. normal generado por los del tipo $(\cdot\cdot x \cdot\cdot)$

$K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ $\quad |S_4/K| = 6$

$S_3 = S_4/K$ luego es una representación de S_3

$\rho : S_4 \to GL(\text{desc})$, $\quad \bar{\rho} : S_3 \to GL(\text{desc})$

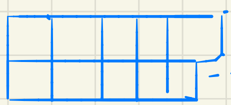
$gK \mapsto \bar{\rho}(gK) = \rho(g)$

$S_4 = K \cup g_1K \cup g_2K$

te dice como extender.

<u>Definición</u>. Diagrama de Young. Si $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k) \vdash n$

diagrama de Young



λ_1 cajas

λ_2 cajas

etc.

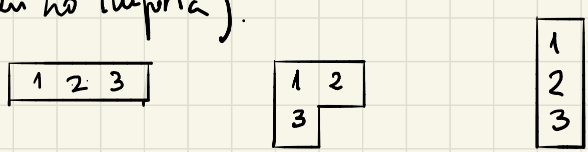
S_3

Construiremos un mód. irr. asociado a cada diag. de Young.

Se llama tablero de Young cuando se rellenan con nºs.

<u>Def. Tablero de Young</u>: rellenar un diagrama con los nºs de 1 a n.

(el orden no importa).



A cada tableau asociamos $R(T_\lambda) = \{\sigma \in S_n \,/\, \sigma$ preserva las filas$\}$

$C(T_\lambda) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma$ preserva las columnas$\}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad R(T_\lambda) = \{\sigma / \sigma(\{1,2\}) = \{1,2\},\ \sigma(3)=3\} =$

$= \{1, (1\,2)\}$

$C(T_\lambda) = \{1, (1\,3)\}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ $\quad R(T_\lambda) = S_3, \quad C(T_\lambda) = \{1\}$

$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$ $\quad R(T_\lambda) = \{1\}, \quad C(T_\lambda) = S_3$

Ahora tomamos un elemento que genera el módulo irreducible

Def $\quad a_{T_\lambda} := \sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma$ $\qquad$ Ej.

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline\end{array}$ $\quad a_\lambda = \sum_{g \in S_3} g$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad a_\lambda = 1 + (1,2)$

$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array}$ $\quad a_\lambda = 1$

Def. $\quad b_{T_\lambda} = \sum_{z \in C(T_\lambda)} \operatorname{sgn}(z) z \quad$ en $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ $\quad b_\lambda = 1 - (1,3)$

$c_{T_\lambda} = a_{T_\lambda} b_{T_\lambda}$ es el generador del módulo irreducible.

Tomemos $V = (\mathbb{C}S_3)\, c_{T_\lambda}$ es el S_3-módulo irreducible

(Me quedé sin batería pero ya lo que sigue son cálculos explícitos de ese módulo)