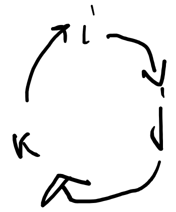
29-11-21. T. Repr.

lunes, 29 de noviembre de 2021 18:26

<u>Continuación</u> repr. regular de $\mathbb{H}$.

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k, \quad i^2 = j^2 = k^2 = ijk = 1$$

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1



$B = \{1, i, j, k\}$

$L_1 = id_{\mathbb{H}}$

L_i : $L_i(1) = i$, $L_i(i) = -1$, $L_i(j) = k$, $L_i(k) = -j$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv L_i$$

$L_j(1) = j$; $L_j(i) = ji = -k$; $L_j(j) = -1$; $L_j(k) = i$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv L_j$$

$L_k(1) = k$; $L_k(i) = j$; $L_k(j) = -i$; $L_k(k) = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \equiv L_k$$

$$L : \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$$
$$q \longmapsto L_q$$

$q = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$

$$L_q = \lambda_0 L_1 + \lambda_1 L_i + \lambda_2 L_j + \lambda_3 L_k = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \hline \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{array}\right)$$

L monomorfismo de $\mathbb{R}$-álgebras.

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} : a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

Representación matricial real de $\mathbb{H}$.
El determinante de $*$ resulta ser $(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2$

$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, $a, b, c \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{H}$,

<u>Pregunta</u>: Sea A una K-alg. M, N dos A-módulos semisimples

$M = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, S_i son A-mód simples

$N = T_1 \oplus \cdots \oplus T_k$, T_j " " "

$M \cong N$ isom. de A-mód.

Entonces $n=k$, existe una biyección $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$
$S_i \cong T_{\sigma(i)}$ $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

En la represen. regular (a izq) de un álgebra A semisimple están presentes todos los A-módulos simples (salvo $\cong$).

$\boxed{{}_A A = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n}$, S_i son A-mod. simples.
Sea M un A-módulo simple cualq.
¿ $\exists\, i \in \{1,\dots,n\} : M \cong S_i$?

Como $M \neq 0$, $\exists\, m \in M \setminus \{0\}$. $Am \leq M$, $Am \neq 0$, $m \in Am$
$Am = M$ $A \xrightarrow{\phi} Am$, $a \longmapsto am$ es un epimorfismo. $A/\ker\phi \cong Am = M$

$\ker(\phi) \leq A$, $A = \ker(\phi) \oplus W$, W es otro A-módulo
$W \leq A$, $W \cong M$ $A/\ker(\phi) \cong W$

$\ker(\phi)$ semisimple $\ker(\phi) = T_1 \oplus \cdots \oplus T_q$, T_j son simples.

$$\boxed{S_1 \oplus \cdots \oplus S_n = A \cong T_1 \oplus \cdots \oplus T_q \oplus M}$$

$M \cong S_j$ para algún j

¿ Qué tiene que ver ${}_A A$ con la repres. regular de A izq ?

$L : A \to \mathrm{End}_K(A) = \{\text{lineales } A \to A\}$
$a \longmapsto L_a$
representación regular a izq.
el A módulo de L es ${}_A A$

lunes, 29 de noviembre de 2021 19:00

Teoría de caracteres.

$\rho : G \longrightarrow GL(V) = \{T : V \to V \,/\, T \text{ lineal invensible}\}$
hom. de grupos. ρ de grado es finito $= \dim(V)$

$f : V \to V$ lineal, B base de V, $M_B(f)$, traza de una matriz $=$

$A = (a_{ij})_{ij=1}^n$, $a_{ij} \in K$ $\quad tr(A) := \sum_{i=1}^{k} a_{ii} \in K \quad tr : M_n(K) \longrightarrow K$ aplic. lineal.

$A, B \in M_n(K)$, $\boxed{tr(AB) = tr(BA)}$ $\quad AB = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj}\right)_{ij=1}^n$

$$\begin{cases} tr(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_{i,k} a_{ik} b_{ki} \\ tr(BA) = \text{sale lo mismo} \end{cases}$$

X, Y matrices $Y = PXP^{-1}$, P invensible

$tr(Y) = tr(\underbrace{PX}_{A}\underbrace{P^{-1}}_{B}) = tr(\underbrace{P^{-1}}_{B}\underbrace{PX}_{A}) = tr(X)$

$\boxed{tr(f) := tr(M_B(f))}$ ¿es correcto?

$f : V \to V$ lineal, fijo B base de V,
B' base de V $\quad M_{B'}(f) = P M_B(f) P^{-1}$, P = matriz invensible.

$$tr(M_{B'}(f)) = tr(M_B(f))$$

$$tr : End_K(V) \longrightarrow K \; ; \; tr(fg) = tr(gf) \quad \forall f, g \in End_K(V)$$

Definición de caracter de una representación de grafo finito

$\rho : G \to GL(V)$, $\dim(V)$ finita $\quad \chi_\rho$ = caracter de ρ

$\chi_\rho : G \to K$ tal que $\chi_\rho(g) = tr[\rho(g)]$, $\quad \rho(g) = V \to V$

Si identificamos $GL(V) \cong GL_n(K)$ matrices $n \times n$ invensible.

$\rho : G \to GL_n(K)$, $\quad \chi_\rho(g) = tr[\rho(g)]$ Idem

* $\chi_\rho(1) = n = \dim(V)$; $\quad \rho(1) = 1_V \quad \chi_\rho(1) = tr(\rho(1)) = n$

* Si ρ representación de grado 1, $\quad \rho : G \to K^\times = K \setminus \{0\}$

$GL_1(K) = K^\times$ matrices 1×1 se identifican con un escalar

$\chi_\rho = \rho \quad \chi_\rho(g) = tr\,\rho(g) = \rho(g) \quad \forall g \in G$

$$\boxed{\chi_\rho = \rho}$$

Ejemplo. IRREPS S_3

	1	g	g^2	s	sg	sg^2
ρ_1	1	1	1	1	1	1
ρ	1	1	1	−1	−1	−1

Tabla de IRREPS

ρ_1	1	1	1	1	1	1
ρ_2	1	1	1	-1	-1	-1
$\rightarrow \rho_3$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1/2&\sqrt3/2\\-\sqrt3/2&-1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1/2&-\sqrt3/2\\\sqrt3/2&-1/2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac12&\frac{\sqrt3}{2}\\-\frac{\sqrt3}{2}&\frac12\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-\frac12&-\sqrt3/2\\-\sqrt3/2&\frac12\end{pmatrix}$

Tabla de repr. IRREPS de S_3

	1	g	g^2	s	sg	sg^2
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1	1
χ_{ρ_2}	1	1	1	-1	-1	1
$\rightarrow \chi_{\rho_3}$	2	-1	-1	0	0	0

$\boxed{\text{Tabla de caracteres de } S_3}$

Idea. Supongamos. ρ_1, ρ_2 repr. de un grupo G $\quad \rho_i : G \longrightarrow GL(V_i) \quad (i=1,2)$

Se dice que $\boxed{\rho_1 \cong \rho_2}$ cuando existe $T: V_1 \to V_2$ isom. de esp. vectoriales y

$\boxed{\forall g \in G}$, $\rho_1(g) : V_1 \to V_1$, $\rho_2(g) : V_2 \to V_2$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "T"'] & V_1 \arrow[d, "T"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

conmutan $\forall g \in G$

$$\rho_2(g) = T\rho_1(g)T^{-1}; \quad tr(\rho_2(g)) = tr(\rho_1(g))$$

$$\chi_{\rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)$$

$$\chi_{\rho_2} = \chi_{\rho_1}$$

Teorema. Repres. isomorfas tienen el mismo caracter.

Es cierto: si ρ_1, ρ_2 representaciones complejas del mismo grado finito.

Ent. si $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2} \Rightarrow \rho_1 \cong \rho_2$

Propiedades. $\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$ $(i=1,2)$ dos represent.

$\rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$

$(\rho_1 \oplus \rho_2)(g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$

$(v_1, v_2) \longmapsto (\rho_1(g)(v_1), \rho_2(g)(v_2))$

$$\boxed{\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}}$$

$$\begin{pmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{pmatrix}$$

$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \otimes V_2)$

$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) : V_1 \otimes V_2 \longrightarrow V_1 \otimes V_2$

$v_1 \otimes v_2 \longmapsto \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2)$

$\rho_1(g)$ matriz

$\rho_2(g)$ matriz.

$(\rho_1 \otimes \rho_2)(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$

producto Kronecker de las matrices.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix} \text{ es } (nk)\times(nk)$$

$$\boxed{\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}}$$

$g \in G$, $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2}(g) = \chi_{\rho_1}(g)\chi_{\rho_2}(g)$

$[\rho_1]$ = clase de isom de ρ_1.

$[\rho_1] \oplus [\rho_2] := [\rho_1 \oplus \rho_2]$

$[\rho_1] \otimes [\rho_2] := [\rho_1 \otimes \rho_2]$

Anillo de representaciones de un grupo.

Producto escalar de caracteres. Consideremos dos representación COMPLEJAS.

$\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i=1,2)$ $\qquad \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} : G \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\rho_1}(g) \overline{\chi_{\rho_2}(g)}$$

	1	g	g^2	s	sg	sg^2	
χ_{ρ_1}	1	1	1	1	1	1	$\mathbb{C}^6$
χ_{ρ_2}	1	1	1	-1	-1	1	$\mathbb{C}^6$
χ_{ρ_3}	2	-1	-1	0	0	0	

$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = \frac{1}{6}\left(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1\cdot 1\right) = 0$ $\qquad \chi_{\rho_1} \perp \chi_{\rho_2}$

$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_3} \rangle = \frac{1}{6}\left(2 - 1 - 1\right) = 0$ $\qquad \chi_{\rho_1} \perp \chi_{\rho_3}$

$\langle \chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_3} \rangle = \frac{1}{6}\left(2 - 1 - 1\right) = 0$ $\qquad \chi_{\rho_2} \perp \chi_{\rho_3}$

$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_1} \rangle = \frac{1}{6}\left(1^2 + 6 + 1^2\right) = 1 = \langle \chi_{\rho_2}, \chi_{\rho_2} \rangle$ $\qquad \langle \chi_{\rho_i}, \chi_{\rho_i} \rangle = 1 \quad \forall i = 1,2,3$

$\langle \chi_{\rho_3}, \chi_{\rho_3} \rangle = \frac{1}{6}\left(4 + 1 + 1\right) = 1$

<u>Propiedades</u>.

* ρ_1, ρ_2 IRREPS COMPLEJAS, si $\rho_1 \cong \rho_2 \Rightarrow \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 1$ ¿?

$\rho_1 \not\cong \rho_2 \Rightarrow \langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_2} \rangle = 0$

** ρ repr. compleja $\boxed{\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \oplus \rho_e \cong n_1\rho_1 \oplus n_2\rho_2 \oplus \cdots \oplus n_k\rho_k}$

($n_i \in \mathbb{N}$ se llaman coef. de CLEBSCH-GORDAN.)

Sea τ otra <u>IRREP</u> del mismo grupo.

$\langle \chi_\tau, \chi_\rho \rangle =$ nº de veces que τ aparece en la suma $\sum_1^k \underbrace{n_i \rho_i}$

nº de veces que τ es $\cong$ a una ρ_i.

$= n_i$ siempre que $\tau \cong \rho_i$ (podría ser 0).

*** ρ irrep. $\tau = \rho$ $\quad \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = 1$, recíproco de ¿?

G grupo abeliano finito. $\rho : G \to GL(V)$ de grado finito, compleja.

$\forall g \in G,\ g^n = 1, \quad \rho(g)^n = 1, \quad \rho(g) : V \to V$ lineal. diagonalizable

$x^n - 1 = \prod_i (x - \omega^i)$

$T : V \to V,\ T^n = 1$
V ev. sobre cuerpo alg. cerrado $\mathrm{carac}(K) = 0$ $\Big\} \Rightarrow T$ diagonalizable.

$\{\rho(g)\}_{g \in G}$ fam. de aplic. lineales $\left.\begin{array}{l}\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g) \\ \text{toda } \rho(g) \text{ diagonalizable}\end{array}\right\}$

existe B base de V, $B = \{v_1, \dots, v_k\}$ $\qquad \rho(g)(v_i) = \lambda_i^{(g)} v_i$

$\lambda_i^{(g)} \in \mathbb{C}$

$\mathbb{C}v_i \leq V \longrightarrow \rho$-invariante si ρ es IRREP. $\underbrace{V = \mathbb{C}v_i}$

"Toda irrep. compleja de un G abeliano finito es de grado 1"

$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$, $\chi_\rho = \rho$.

$\mathbb{Z}_2 = \{1, \pi\}$, $\pi^2 = 1$,

$\rho : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{C}^\times$

$\pi \longmapsto \rho(\pi)$,

$\rho(\pi)^2 = 1$, $\rho(\pi) = \pm 1$

$$\rho_0 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^\times \qquad 1 \longmapsto 1 \qquad \pi \longmapsto 1$$

$$\rho_1 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}^\times \qquad 1 \longmapsto 1 \qquad \pi \longmapsto -1$$

$\mathbb{Z}_2$	1	π
ρ_0	1	1
ρ_1	1	-1

$\mathbb{Z}_3 = \{1, \omega, \omega^2\}$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$\omega^3 = 1$.

$\#$ Clases de conj. de un abeliano finito $= \#$ del grupo $= \#$ IRREPS COMPLEJAS

$\mathbb{Z}_3$	1	ω	ω^2
ρ_0	1	1	1
ρ_1	1	ω	ω^2
ρ_2	1	ω^2	ω

$\mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$

$\omega \longmapsto \rho(\omega)$, $\rho(\omega)^3 = 1$

$\rho(\omega) = 1, \omega, \omega^2$

$\rho(\omega) = 1$

$\langle (1, \omega, \omega^2), (1, \omega^2, \omega) \rangle =$

$= \frac{1}{3}(1 + \omega\overline{\omega^2} + \omega^2\overline{\omega}) = 0$

$\mathbb{Z}_4$	1	i	-1	$-i$
ρ_0	1	1	1	1
ρ_1	1	i	-1	$-i$
ρ_2	1	-1	1	$-i$
ρ_3	1	$-i$	-1	i

$\langle \chi_{\rho_1}, \chi_{\rho_3} \rangle = \frac{1}{4}(1 - 1 + 1 - 1) = 0$

$\langle (1, i, -1, -i), (1, -1, 1, -1) \rangle = 1 - i - 1 + i = 0$

<u>Teorema.</u> El grado de una IRREP compleja de un grupo finito es un divisor del cardinal del grupo.

---

nº entero algebraico $=$ $x \in \mathbb{C}$ que es raíz de un polinomio mónico con coef. enteros.

$$\boxed{\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0}$$

$\lambda_i \in \mathbb{Z}$

El conj. de todos los ent-algebraicos es un subanillo de $\mathbb{C}$.

$x^2-2=0$

Si x entero algebraico y $x \in \mathbb{Q} \overset{?}{\Rightarrow} x \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{k}{m}$, primos relativos.

$$\lambda_0 + \lambda_1 \frac{k}{m} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{k^{n-1}}{m^{n-1}} + \frac{k^n}{m^n} = 0$$

$$\underbrace{\lambda_0 m^n + \lambda_1 k m^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} k^{n-1} m}_{} + k^n = 0$$

$m \mid k$ $\boxed{m=1}$

$\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$, χ_ρ es un ent. algebraico.
G finito.

$\rho(g)$ diagonalizable $\rho(g)^n = 1$, los autovalores de $\rho(g)$ son del tipo $e^{\frac{2\pi k i}{n}}$ que son enteros alg.

$\chi_\rho(g) = tr(\rho(g))$ = suma de los autovalores. $\underline{\chi_\rho(g) \text{ ent. algebraico}}$

También lo es $\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{g \in K} \chi_\rho(g)}_{\text{es entero algebraico.}}$ siendo K cualquier clase de conjugación

$K = [h_0] = \{x h_0 x^{-1} : x \in G\}$

P. Dubreil 'Théorie des groupes' DUNOD.

ρ IRREP $1 = \langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} = \frac{1}{|G|} \sum \chi_\rho(g) \chi_\rho(g^{-1})$

$\overline{\chi_\rho(g)} = \chi_\rho(g^{-1})$

$$\frac{|G|}{n} = \frac{1}{n} \sum_g \chi_\rho(g) \chi_\rho(g^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_K \chi(g^{-1}) \sum_{g \in K} \chi(g) = \sum_K \underbrace{\chi(g^{-1})}_{\text{ent. alg}} \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{g \in K} \chi(g)}_{\text{ent. alg.}} \text{ es un entero algebraico}$$

$n = \dim(V)$

$\left. \begin{array}{l} \frac{|G|}{n} \text{ es un entero algebraico} \\ \text{es un racional} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|G|}{n} \in \mathbb{Z}$

$$\left| GL_2(\mathbb{Z}_3) \right| = 48.$$