Teor. de Representaciones. (27-10-20)

Representación regular de una K-álgebra A.

K cuerpo, A una K-álgebra.

L = repr. regular a izq.; $L : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(A) = \{T : A \to A \,/\, T \text{ lineal}\}$

$a \longmapsto L_a : A \longrightarrow A, \quad L_a(x) = ax$

Ejemplo. $A = \mathbb{F}_4$ el cuerpo de 4 elementos $= \boxed{\{0, 1, a, b\}}$

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

·	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

$(\mathbb{F}_4, +, \cdot)$ es un cuerpo.

$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \subset \mathbb{F}_4$

$\mathbb{Z}_2$ es un subcuerpo de $\mathbb{F}_4$.

$\boxed{\mathbb{F}_4 \text{ es una } \mathbb{Z}_2\text{-álgebra.}}$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4 \longrightarrow \mathbb{F}_4$

$0 \in \mathbb{Z}_2 \quad 0x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{F}_4$

$1 \in \mathbb{Z}_2 \quad 1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{F}_4$

Determ. la repr. regular L de $\mathbb{F}_4$

$\underbrace{\mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{F}_4)}$, $\quad A = \mathbb{F}_4$, $\quad K = \mathbb{Z}_2$

¿ Cuál sería una base de $\mathbb{F}_4$ como e.v. sobre $\mathbb{Z}_2$?

$\{1, a\}$ es L.I. de cardinal máximo.

¿ $\forall x \in \mathbb{F}_4, \quad x = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot a$ donde $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$?

$\underbrace{\{1, a\}}$, sist. de gen. de $\mathbb{F}_4$ (como e.v. sobre $\mathbb{Z}_2$)

$0,\ 1,\ a,\quad b = 1 + a$

$a + b = 1 \qquad b = 1 - a, \quad a + a = 0, \quad -a = a$

$b = 1 + a$

$\forall x \in \mathbb{F}_4, \quad x = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot a$

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{Z}_2$

$\boxed{B = \{1, a\}}$

base de $\mathbb{F}_4$ como e.v. sobre $\mathbb{Z}_2$

Sist. de generadores pero ni $\{1\}$, ni $\{a\}$ es sistema de generadores.

$$\mathbb{F}_4 \xrightarrow{L} \mathrm{End}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{F}_4) \cong M_2(\mathbb{Z}_2)$$

$x \longmapsto L_x$ matriz de L_0 relativa a B

$0 \longmapsto L_0 = 0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$1 \longmapsto L_1 = \mathrm{Id} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ " de L_1 " " B

$a \longmapsto \left(L_a : \begin{array}{l} 1 \xmapsto{L_a} a \\ a \mapsto b \end{array} \right) \equiv \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ → coord. de a relativa a B; coord. de b " " B $\qquad b = 1 + a$

$b \longmapsto \left(L_b : \begin{array}{l} 1 \mapsto \underline{b} \\ a \mapsto \underline{1} \end{array} \right) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → coord. de b " " B $\quad (1, 1)$; coord. de 1 " " B $\quad (1, 0)$

$L: \begin{array}{l} 0 \longmapsto 0 \\ 1 \longmapsto \mathrm{Id} \\ a \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ b \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

monomorf. $\equiv$ FIEL

$$\boxed{\mathbb{F}_4 \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{Z}_2)}$$

$x^2 + x + 1$ sobre $\mathbb{Z}_2$ $\qquad$ 16 elementos

¿Cuál es la cond. necesaria y suficiente para que la repr. regular $L: A \to \mathrm{End}_k(A)$, $a \mapsto L_a$, sea fiel?

L fiel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$

$\mathrm{Ker}(L) = \{a \,/\, L_a = 0\} = \underbrace{\{a \,/\, aA = 0\} \overset{def}{=:} \mathrm{Lann}(A)}$

$$\boxed{L \text{ fiel} \Leftrightarrow \mathrm{Lann}(A) = \{0\}}$$

Si A tiene unidad	$\mathrm{Lann}(A) = \{0\}$
Si $0 \neq A$ es prima	$\mathrm{Lann}(A) = \{0\}$

p.q. $\forall x \in \mathrm{Lann}(A)$, $xA = 0$

$x \cdot 1 = 0$

$x = 0$

Def Una k-álg A se dice prima si $(\forall I, J \lhd A,\ I \cdot J = 0 \Rightarrow I = 0$ ó $J = 0)$

$I \cdot J \overset{def}{=} \{\sum_i x_i y_i \,/\, x_i \in I,\ y_i \in J\}$ $\qquad x \in I,\ y \in J \quad xy \in I \cdot J$

Se puede dem. que $I \cdot J \lhd A$

Si A es prima: $\quad \mathrm{Lann}(A) \lhd A$, $A \lhd A$ $\quad \mathrm{Lann}(A) \cdot A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Lann}(A) = 0 \\ \cancel{A \neq 0} \end{cases}$

Otro ejemplo de repre. regular.

Cuaterniones de Hamilton. ($\mathbb{H}$)

$\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ como e.v.

$B = \{\mathbb{1}, i, j, k\}$

$(\mathbb{H}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}^4, +)$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ convencional.

$\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}^4$

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{1} &= (1,0,0,0) \\ i &= (0,1,0,0) \\ j &= (0,0,1,0) \\ k &= (0,0,0,1) \end{aligned}\right\} \text{ canónica de } \mathbb{R}^4$$

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Para definir un producto sobre un álgebra basta definir el producto de elementos básicos

Hemos definido $\cdot$ sobre los elementos de B.

$\forall x \in \mathbb{H}$; $x = \lambda_0 \mathbb{1} + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$, $(\lambda_n \in \mathbb{R})$

$y = \mu_0 \mathbb{1} + \mu_1 i + \mu_2 j + \mu_3 k$

$xy = \lambda_0\mu_0 \mathbb{1} + \lambda_0\mu_1 i + \lambda_0\mu_2 j + \lambda_0\mu_3 k + \lambda_1\mu_0 i - \lambda_1\mu_1 \mathbb{1} + \lambda_1\mu_2 k - \lambda_1\mu_3 j +$
$+ \lambda_2\mu_0 j - \lambda_2\mu_1 k - \lambda_2\mu_2 \mathbb{1} + \lambda_2\mu_3 i + \lambda_3\mu_0 k + \lambda_3\mu_1 j - \lambda_3\mu_2 i - \lambda_3\mu_3 \mathbb{1} =$
$= (\quad)\mathbb{1} + (\quad)i + (\quad)j + (\quad)k$

$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) = 4$

$\mathbb{H} = \{ \underbrace{\lambda_0 1 + \lambda_1 i} + \lambda_2 j + \lambda_3 k \ / \ \lambda_n \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}^4$ como e.v.

Se llama el "álg. de cuaterniones de Hamilton"

$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$ Tabla de multiplicar.

$ij = -ji$ no conmut.

$\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$

$1 \longmapsto 1$

$i \longmapsto -i$

$j \longmapsto -j$

$k \longmapsto -k$

conjugación cuaterniónica:

$q = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \longmapsto \boxed{\lambda_0 1 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k = \overline{q}}$

$\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$

$\lambda_0 + \lambda_1 i \longmapsto \lambda_0 1 + \lambda_1 i$ es un monomorf. de álgebras.

Propiedades de la conjugación.

Es folklore demostrar:

$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}, \quad \overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{H} \quad \overline{\lambda q} = \lambda \overline{q}$

$\forall q \in \mathbb{H} \quad \overline{\overline{q}} = q$

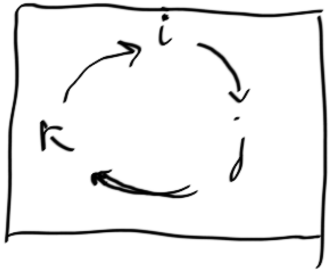
$\forall q_1, q_2 \in \mathbb{H}, \quad \boxed{\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\, \overline{q_1}} \leftarrow$

$\boxed{17:40}$

Ejercicio.

$$q = \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$$
$$\bar{q} = \lambda_0 1 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k$$

Calcular $q\bar{q} = ?$



$i^2 = -1$

$j^2 = -1$

$jk = i$

$ki = j$

$$q\bar{q} = (\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)1 + (\cancel{-\lambda_0\lambda_1} + \cancel{\lambda_1\lambda_0} - \cancel{\lambda_2\lambda_3} + \cancel{\lambda_3\lambda_2})i$$
$$+ (\cancel{-\lambda_0\lambda_2} + \cancel{\lambda_2\lambda_0} - \cancel{\lambda_3\lambda_1} + \cancel{\lambda_1\lambda_3})j + (\ / \quad / \quad / \quad / \ )k$$

$$q\bar{q} = \underbrace{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)}\cdot 1$$

$x \in \mathbb{R}$
$x \in \mathbb{H}$
$x \cdot 1 \longleftrightarrow x$

$$n(q) := \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \|q\|^2$$

$$\boxed{n = \|\cdot\|^2}$$

$\downarrow$

norma cuaterniónica

$$n(q) = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$

$$n : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$q \longmapsto n(q)$$

$$\boxed{n(q) = 0 \iff q = 0}$$

Corolario. $\forall q \in \mathbb{H},\ q \neq 0,\ \exists q' \ /\ q q' = q' q = 1$

Dem.: $\forall q \in \mathbb{H},\ q \neq 0$ $\quad q\bar{q} = n(q)1 \neq 0 \quad n(q) \neq 0$

$$\underbrace{q\left(\frac{\bar{q}}{n(q)}\right)}_{\text{inverso de } q \text{ por la derecha}} = 1$$

$$\bar{q} q = n(\bar{q}) = n(q)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\bar{q}}{n(q)}\right)}_{\text{inverso de } q \text{ por la izq.}} q = 1$$

Luego todo $q \in \mathbb{H},\ q \neq 0$ es inversible.

Definición. Una $\mathbb{K}$-álgebra A se dice de división si $\forall a \in A,\ a \neq 0$, tiene inverso (bilátero).

$\mathbb{H}$ es una $\mathbb{R}$-álg. de división.

Represent. regular de $\mathbb{H}$ a izq.

$\mathbb{H}$ es un e.v. real de dim 4 $\quad B = \{1, i, j, k\}$

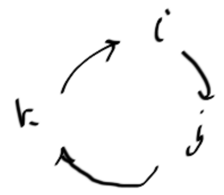
$$\mathbb{H} \xrightarrow{L} \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H}) \cong M_4(\mathbb{R})$$

$$q \longmapsto L_q$$

$$1 \longmapsto L_1 = \mathrm{Id.} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \overset{L}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$i \longmapsto \left(L_i : \begin{array}{l} 1 \mapsto \boxed{i} \\ i \mapsto \boxed{-1} \\ j \mapsto \boxed{k} \\ k \mapsto -j \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$



$$j \longmapsto \left(L_j : \begin{array}{l} 1 \mapsto j \\ i \mapsto -k \\ j \mapsto -1 \\ k \mapsto i \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$k \to \left(L_k : \begin{array}{l} 1 \to \boxed{k} \\ i \mapsto +j \\ j \mapsto -i \\ k \mapsto -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k \overset{L}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \lambda_0 & & & \\ & \lambda_0 & & \\ & & \lambda_0 & \\ & & & \lambda_0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -\lambda_1 & & \\ \lambda_1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & -\lambda_1 \\ & & \lambda_1 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ & & 0 & \lambda_2 \\ \hline \lambda_2 & & & \\ & -\lambda_2 & & \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc} & & & -\lambda_3 \\ & & -\lambda_3 & \\ \hline & \lambda_3 & & \\ \lambda_3 & & & \end{array}\right)$$

$$\lambda_0 1+\lambda_1 i+\lambda_2 j+\lambda_3 k \xmapsto{L} \begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & +\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{pmatrix}}_{} : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\} \text{ subálgebra de } M_4(\mathbb{R})$$

conjugado $\longleftrightarrow$ <u>transp. matricial</u>

norma $\longleftrightarrow$ <u>determinante</u>

$\mathbb{F}_4$, $\mathbb{H}$,

Productos y suma directas de R-módulos

R anillo conmutativo, M un R-módulo.

$(M, +)$ grupo abeliano

$R \times M \to M$

$\{M_i\}_{i \in I}$ fam. de R-módulos.

$\prod_{i \in I} M_i = \{ (x_i)_{i \in I} \;/\; x_i \in M_i \}$ es R-módulo

$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} := (x_i + y_i)_{i \in I}$

$r \in R$, $(x_i)_{i \in I}$ $\quad r \cdot (x_i)_{i \in I} := (r x_i)_{i \in I}$

$\bigoplus_{i \in I} M_i := \{ \underline{\underline{(x_i)_{i \in I}}} \in \prod_{i \in I} M_i \;/$ $x_i = 0$ salvo una cantidad finita $\}$

si $|I|$ finito $\quad \bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$

Tensorial de e.v. de dim. finita.

K cuerpo base fijo. E, F dos K-e.vect.

$$L^2(E\times F; K) := \{ B : E \times F \longrightarrow K \;/\; B \text{ es bilineal} \}$$

$$B(e_1+e_2, f) = B(e_1, f) + B(e_2, f) \quad \forall e_1, e_2 \in E, \ \forall f \in F$$

$$B(\lambda e, f) = \lambda B(e, f) \quad \forall \lambda \in K, \ \forall e \in E, \forall f \in F$$

Análog. en la variable de la derecha

$B_1, B_2 : E\times F \longrightarrow K$, bilineales

$$B_1 + B_2 : E \times F \longrightarrow K$$
$$(e, f) \longmapsto B_1(e, f) + B_2(e, f)$$

bilineal.

$(L^2(E\times F; K), +)$ grupo abeliano.

$$K \times L^2(E\times F; K) \longrightarrow L^2(E\times F; K)$$
$$(\lambda, B) \longmapsto \lambda B : E\times F \longrightarrow K$$
$$(e, f) \mapsto \lambda B(e, f)$$

$L^2(E\times F; K)$ e.v. sobre K

Si E es e.v. sobre K, $E^* := \{T : E \to K \,/\, T \text{ es lineal}\}$ dual de E

Si $\{e_i\}_{i\in I}$ base de E, $\hat{e}_i : E \longrightarrow K$

$e_i \longmapsto 1$

$e_j \longmapsto 0 \quad \forall (j \neq i)$ $\qquad \hat{e}_i(e_j) = \delta_{ij}$ Kronecker.

$\hat{e}_i \in E^*$ $\qquad \{\hat{e}_i\}_{i\in I}$ es L. Independiente

$\boxed{\text{Si } \dim(E) \text{ finita}} \Longrightarrow \{\hat{e}_i\}_{i\in I}$ es $\underline{\underline{\text{base}}}$ de E^*, $\qquad \dim(E) = \dim(E^*)$

Para cada base de E, $\{e_i\}_{i\in I}$ existe $\{\hat{e}_i\}_{i\in I}$ <u>base dual</u> (OJO: dim finita!)

<u>Definición.</u> Dados E, F e.v. sobre K $\dim(E), \dim(F)$ finitas.

$e \in E,\ f \in F$. $\qquad e \otimes f : E^* \times F^* \longrightarrow K$

$(\alpha\ \beta) \longmapsto \alpha(e)\beta(f)$

Es bilineal.

$\underline{\underline{e\otimes f}} \in L^2(E^* \times F^*; K)$

$E \xrightarrow{\alpha} K$

$e \longmapsto \alpha(e)$

$F \xrightarrow{\beta} K$

$f \longmapsto \beta(f)$

$$\boxed{E \otimes F \overset{\text{def}}{:=} \left\{ \sum_i \lambda_i\, e_i \otimes f_i \;/\; e_i \in E,\ f_i \in F \right\} \subset L^2(E^* \times F^*; K)}$$

VIERNES: 16:00/18:30