Problema para el cálculo del álgebra grupo.

Sea S_4 = grupo de permutaciones de $\{1,2,3,4\}$. Tomamos

A_4 = subgrupo de permutaciones pares. $|A_4| = 12$

Quiero conocer $\mathbb{C}A_4$. $\mathbb{C}A_4$ es semisimple pues $0 = car(\mathbb{C}) \nmid 12$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{C}A_4 \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\mathbb{C})$$

$12 = n_1^2 + n_2^2 + \text{—} + n_k^2$

$12 = 1^2 + \text{—} + 1^2$ $\longrightarrow$ Esta la descartamos por ser A_4 no abeliano

$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$

$12 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

$12 = 2^2 + \underbrace{1^2 + \text{—} + 1^2}_{8 \text{ veces}}$

Tenemos pues:

$\mathbb{C}A_4 \cong$ $M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^8$ 9 irreps

$M_2(\mathbb{C})^2 \oplus \mathbb{C}^4$ 6 irreps

$M_2(\mathbb{C})^3$ 3 irreps

$M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3$ 4 irreps.

La cosa se pone complicada.

Si $G = \Delta_3$.

$\mathrm{orb}(1) = \{1\}$, $\mathrm{orb}(s) = \{s, sg, sg^2\}$

$\mathrm{orb}(g) = \{g, g^2\}$ * Y ya con eso lo tenemos todo.

- $g^{i} \cdot g \cdot g^{-i} = g^{i} g^{-i} g = g$

$sgs^{-1} = sgs = (sg)s = g^2 s \cdot s = g^2 s^2 = g^2$

$sg\, g\, (sg)^{-1} = sg^2 g^{-1} s^{-1} = sgs^{-1} = g^2$

$(sg)^2 g (sg^2)^{-1} = sg^3 (sg^2)^{-1} = sg^{-2} s^{-1} = sgs = g^2$

- $gsg^{-1} = gsg^2 = g(sg)g = gg^2sg = sg$
- $(sg)s(sg)^{-1} = (sg)s\, g^{-1}s = g^2 s \cdot s\, g^2 s = g^2 g^2 s = g \cdot s = sg^2$

Prop: Veamos que nº de irreps (salvo $\cong$) es el nº de órbitas de G actuando sobre G por conjugación.

Dem: Sup. G finito, $g \in G$ y $\mathrm{orb}(g) = \{ugu^{-1} \mid u \in G\} = \{g_1, \dots, g_q\}$

Sea $\bar{g} = \sum_1^q g_i \in kG$ (álgebra grupo), se cumple:

$\forall u \in G.\ u\bar{g}u^{-1} = \sum_{i=1}^{q} u\bar{g}u^{-1} = \bar{g}$ pues $\mathrm{orb}(g) \longrightarrow \mathrm{orb}(g)$, $x \longmapsto uxu^{-1}$

es biyectiva.

Por tanto $u\bar{g} = \bar{g}u \Rightarrow \bar{g} \in Z(kG)$

Nos planteamos cómo agilizar el cálculo del álgebra grupo.

Consideremos $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$. $\dim A = n_1^2 + \dots + n_k^2$.

Si calculamos:

$$Z(A) = \{ x \in A \mid xy = yx \quad \forall y \in A \}$$

Se demuestra:

$$Z(A) = Z(M_{n_1}(\mathbb{C})) \oplus \dots \oplus Z(M_{n_k}(\mathbb{C}))$$

En el caso de matrices se cumple

$$Z(M_n(K)) = K \cdot Id. \cong K.$$

Por tanto $\dim_K (Z(M_n(K))) = 1$. Luego:

$$\dim (Z(A)) = k = n^o \text{ sumandos directos} = n^o \text{ de irreps de } A.$$

Objetivo: Hallar una fórmula para nº de irreps complejas de G finito.

Sea G finito se define la acción de G en sí mismo por conjugación:

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(g, h) \longmapsto g \cdot h := g h g^{-1}$$

$\mathrm{orb}(g) = \{ hgh^{-1} \mid h \in G \} \equiv$ todos los conjugados de g.

Como la relación $g_1 \sim g_2 \iff \exists h \in G : g_2 = h g_1 h^{-1}$ es de equivalencia y $[\bar{g}] = \text{orb}(g)$. Las órbitas de G forman una partición del mismo $\Rightarrow G = \bigsqcup_{g \in G} \text{orb}(g)$ en concreto consideremos:

$$G = \text{orb}(h_1) \sqcup \text{orb}(h_2) \sqcup \dots \sqcup \text{orb}(h_k) \quad ; \; k = \text{nº órbitas}.$$

Como hemos visto antes: $\bar{h_1}, \dots, \bar{h_k} \in Z(kG)$. Veamos que forman una base de $Z(kG)$

- Lin. independiente

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{h_i} = 0 \, , \quad \lambda_i \in k$$

En kG G es base de kG. Tenemos realmente una combinación lineal de todos los elementos de G de modo que todos aquellos en una misma órbita con el mismo coeficiente. $\Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

- Sistema generador

Sea $z \in Z(kG)$ arbitrario. Se tiene que $z = \sum_{g \in G} \lambda_g g$.

Se cumple que $z = h z h^{-1} = h \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) h^{-1} =$

$$= \sum_{g \in G} \lambda_g h g h^{-1} = \sum_{g \in G} \lambda_{h^{-1} g h} \, g$$

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} \lambda_g g = \sum_{g \in G} \lambda_{h^{-1} g h} \, g \quad \Rightarrow \quad \lambda_g = \lambda_{h^{-1} g h}$$

De modo que si $g_1, g_2 \in \text{orb}(h_i) \Rightarrow \lambda_{g_1} = \lambda_{g_2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \bar{h_i} \qquad \not{\!\!\Delta}$$

Por tanto:

$$\dim_{\underset{\text{cuerpo}}{K}} Z(KG) = k = \text{nº de órbitas} = \text{nº de irreps.}$$

$\not\!\square$

Ejemplo: Consideramos

A_4 = permutaciones pares de S_4 =

$= \{ (12)(34), (13)(24), (14)(23); (123), (124), (134); (234), (132), (142), (143), (243), () \}$

$|A_4| = 12$. Vamos a trabajar sobre $\mathbb{C}$.

$\dim(\mathbb{C}A_4) = 12$. Semisimple por Maschke. Entonces

$$\mathbb{C}A_4 \cong M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \text{—} \oplus M_{n_q}(\mathbb{C})$$

$$\dim \mathbb{C}A_4 = 12 = \sum_{i=1}^{q} n_i^2$$

$12 = 1^2 + \text{——} + 1^2 \rightarrow$ Rechazamos por A_4 no conmutativo.

$12 = 2^2 + \underbrace{1^2 + \text{—} + 1^2}_{8 \text{ veces}} \rightarrow M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^8 \rightarrow 9$ reps

$12 = 2^2 + 2^2 + \underbrace{1^2 + \text{—} + 1^2}_{4 \text{ veces}} \rightarrow M_2(\mathbb{C})^2 \oplus \mathbb{C}^4 \rightarrow 6$ irreps

$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2 \rightarrow M_2(\mathbb{C})^3 \rightarrow 3$ irreps

$12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \rightarrow M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3 \rightarrow 4$ irreps.

Si calculamos las órbitas por conjugación:

$orb((1)) = \{(1)\}$

$orb((12)(34)) = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

$orb((123)) = \{(123), (142), (134), (243)\}$

$orb((132)) = \{(132), (143), (124), (234)\}$

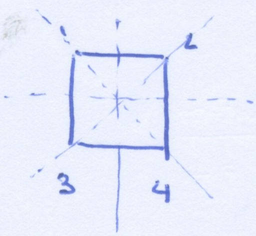
Hay 4 órbitas $\Rightarrow$ 4 irreps salvo isom $\Rightarrow$

$\mathbb{C}A_4 \cong M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^3$

Tiene una rep. de grado 3 y 3 de grado 1. Tenemos por tanto

3 reps en $A_4 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ y 1 $A_4 \longrightarrow GL_3(\mathbb{C})$.

Problema: Grupo de movimientos del cuadrado Δ_4



$g = (1234)$ giro de 90°

$\Delta_4 = \{1, g, g^2, g^3, s, sg, sg^2, sg^3\}$

s = simetría respecto al eje y = $(12)(34)$

Algunas relaciones son:

- $sg = g^3 s$; $sg = (12)(34)(1234) = (24)$

$gs^2 = (1234)\cdot(12)(34)\cdot(12)(34)\cdot(12)(34) =$

$= (24)$

- $sg^2 = (sg)g = g^3 sg = g^3 g^3 s = g^6 s = g^2 s$

- $sg^3 = gs$

obs: g conmuta con g^t y con s $\Rightarrow$ g conmuta con todo G.

Se demuestra que $Z(\Delta_4) = \{1, g^2\}$ No hay otros

$\mathbb{C}\Delta_4$ tiene dim 8 : $8 = 1^2 + \_\_ + 1^2 \rightarrow \mathbb{C}\Delta_4 \cong \mathbb{C}^8$ conmutativo !!!

$8 = 2^2 + 1^2 + \_\_ + 1^2 \rightarrow \mathbb{C}\Delta_4 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^4$: 5 irreps

$8 = 2^2 + 2^2 \rightarrow \mathbb{C}\Delta_4 \cong M_2(\mathbb{C})^2$: 2 irreps.

Calculamos las órbitas de Δ_4.

Como $Z(\Delta_4) = \{1, g^2\}$ ya tenemos que

$orb(1) = \{1\}$

$orb(g^2) = \{g^2\}$ $\rightarrow$ Necesariamente tengo que tener 5 órbitas (3 orb. más)

$orb(g) = \{g, g^3\}$

$sgs = (sg)s = g^3 s s = g^3 \underbrace{s^2}_{1} = g^3$

$(sg)g(sg)^{-1} = (sg)g g^2 s = s g^2 g^2 s = s g^3 = g^3$

$(sg^2)g(sg^2)^{-1} = \dots = g^3$

$orb(s) = \{s, sg^2\}$

$gsg^{-1} = gsg^{-1} = sg^3 g^{-1} = sg^2$

$g^2 s (g^2)^{-1} = g^2 s g = s$

$(sg)s(sg)^{-1} = s(gs)g^{-1}s = s(sg^3)g^{-1}s = g^2 s = sg^2$ ...

$orb(sg) = \{sg, sg^3\}$.

Se cumple como habíamos predicho la existencia de 5 órbitas.

Finalmente $\mathbb{C}\Delta_4 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^4 \longrightarrow 5$ irreps.

o 1 irrep. de grado 2

o 4 irreps. de grado 1.

* Irreps de grado 1.

$$\rho : \Delta_4 \longrightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$g \longmapsto G \qquad G, S \in \mathbb{C} \qquad G^4 = S^2 = 1$$

$$s \longmapsto S \qquad SG = G^3 S \Rightarrow G^2 = 1$$

En $\mathbb{C}$!

$\Rightarrow G = \pm 1,\ S = \pm 1 \Rightarrow$ Las 4 irreps.

① $g \to 1$, $s \to 1$

② u_1: $g \to 1$, $s \to -1$

③ u_2: $g \to -1$, $s \to 1$

④ u_3: $g \to -1$, $s \to -1$.

Veamos su tabla de caracteres

	1	g	g^2	g^3	s	sg	sg^2	sg^3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
u_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
u_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
u_3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1

Nos queda calcular $d : \Delta_4 \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$

$$g \longmapsto ?$$

$$s \longmapsto ?$$

Vamos a aprovechar los movimientos que describen a las matrices 2x2.

- g giro de 90° $\quad g: (1,0) \rightarrow (0,-1)$ Por filas

$$(0,1) \longmapsto (1,0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- simetría $\quad s: (1,0) \rightarrow (-1,0)$

$$(0,1) \rightarrow (0,1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica

$G^4 = Id. \qquad G^2 = -Id \Rightarrow G^4 = Id$

$S^2 = Id$

$SG = G^3 S \quad ; \quad SG = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad G^3 S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Luego:

$d(1) = Id_2 ; \; d(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \; d(g^2) = -Id_2$

$d(g^3) = -d(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad d(s) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d(sg) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad d(sg^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \; d(sg^3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

[illegible]	1	g	g^2	g^3	s	sg	sg^2	sg^3
$\chi(d)$	2	0	-2	0	0	0	0	0