Teoría de representaciones (24-XI-20)

A semisimple, $\dim(A)$ finita, sobre un cuerpo k alg. cerrado

$A = \underbrace{M_{n_1}(k)}_{\to k^{n_1}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{M_{n_q}(k)}_{\to k^{n_q}}$

$\dim(A) = n_1^2 + \cdots + n_q^2$

G finito, $A = kG$, $\dim(A) = |G|$

$|G| = n_1^2 + \cdots + n_q^2$

$Z(A) = kI_{n_1} \oplus kI_{n_2} \oplus \cdots \oplus kI_{n_q}$

$\dim Z(A) = q$

Lema. Nº de irreps (salvo $\cong$) es $\dim(Z(A)) =$ = nº de sumandos simples.

Las irreps de A son (salvo $\cong$) q: $k^{n_1}, k^{n_2}, \dots, k^{n_q}$

Relacionar Nº de irreps (salvo $\cong$) con Nº de clases de conj. del grupo.

$G \times G \to G$, $g \cdot h = ghg^{-1}$

$\mathrm{Orb}(g) =$ clase de conjugación $= \{hgh^{-1} / h \in G\}$

$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow (g_2 = hg_1h^{-1} \ \exists h \in G)$ rel. de equiv.

Las órbitas son las clases de equiv. luego $G = \dot{\bigcup} \mathrm{Orb}(g_i)$, $g \in Z(G) \Leftrightarrow \mathrm{Orb}(g) = \{g\}$.

$g \in G$ arbitrario, G finito, $\boxed{\mathrm{Orb}(g) = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}}$, $\bar{g} := \sum_{i=1}^n g_i$, $\bar{g} \in kG$

$\bar{g} \in Z(kG) \overset{?}{\Leftrightarrow} \bar{g} \cdot h = h \bar{g} \quad \forall h \in G$, $h\bar{g}h^{-1} = \bar{g} \quad \forall h \in G$

si $\bar{g}$ conm. con todo $h \in G$, $\bar{g}$ conm. con $\sum_i \lambda_i h_i \in kG$

$\mathrm{In}(h): G \to G$, $x \mapsto hxh^{-1}$ } autom. interior. $\mathrm{In}(h^{-1})$

$\mathrm{In}(h): \mathrm{Orb}(g) \to \mathrm{Orb}(g)$, $x \mapsto hxh^{-1} \in \mathrm{Orb}(g)$

$g_1 \mapsto g_{k_1}$, $g_2 \mapsto g_{k_2}$, $\vdots$, $g_n \mapsto g_{k_n}$

$h\left(\sum_{i=1}^n g_i\right)h^{-1} = \sum_{i=1}^n g_i$: $h\bar{g}h = \bar{g}$ $\forall h \in G$

$\boxed{\bar{g} \in Z(kG)}$

$G = \mathrm{Orb}(h_1) \dot{\cup} \mathrm{Orb}(h_2) \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} \mathrm{Orb}(h_k)$

$\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_k \in Z(kG)$ ¿L. Indep.?

(1) $\boxed{\sum_{i=1}^k \lambda_i \bar{h}_i = 0, \ \lambda_i \in k} \overset{?}{\Rightarrow} \boxed{\forall i, \lambda_i = 0}$;

G es base de kG $\quad \{g / g \in G\}$ base de kG,

$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{h}_i$ = comb. de todos los elementos de G, con todos los g que están en una misma órbita teniendo el mismo coef.

luego $(\lambda_i = 0 \ \forall i.)$

(2) $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_k\}$, sist. de gen. de $Z(kG)$

Sea $z \in Z(kG)$ arbitrario $\quad \boxed{z = \sum_{g \in G} \lambda_g g}$ (*), $h \in G$

$\sum_g \lambda_g g = z = hzh^{-1} = h\left(\sum_g \lambda_g g\right)h^{-1} = \sum_{g \in G} \lambda_g (hgh^{-1}) = \sum_{g \in G} \lambda_{h^{-1}gh}\, g$

$\sum_{k \in G} \lambda_{h^{-1}kh} k$ $\quad k = hgh^{-1}$, $h^{-1}kh = g$

$\sum_{k \in G} \lambda_{h^{-1}kh} k = \sum_{g \in G} \lambda_{h^{-1}gh}\, g$ $\quad k \leftrightarrow g$

$\boxed{\lambda_g = \lambda_{h^{-1}gh}}$

En $z = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ si $g_1 \underset{\text{conj.}}{\sim} g_2$ ent. $\lambda_{g_1} = \lambda_{g_2}$

$\{\bar{g} / g \in G\}$ Sist. de generadores.

$z = \sum \lambda_g \bar{g}$ $\quad z$ es comb. lineal de distintos $\bar{g}$ del grupo.

$\dim(Z(kG)) = k =$ nº de clases de conjugación $=$ nº de representaciones irred. (salvo $\cong$)

Ejemplo. A_4 = permut. pares de $S_4 = \{ (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), (1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4), (1,3,2), (1,4,2), (1,4,3), (2,4,3), 1 \}$

$|A_4| = 12$ $\quad$ ¿Cuántas irreps hay (sobre $\mathbb{C}$)?

$\dim(\mathbb{C}A_4) = 12$ semisimple $\quad \mathbb{C}A_4 = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\mathbb{C})$, $12 = \sum_1^q n_i^2$

~~$12 = 1^2 + \cdots + 1^2$~~ ~~A_4 no conmut.~~ ~~DESCAR~~

$12 = 2^2 + 1^2 + \overset{8}{\cdots} + 1^2$ $\quad M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^8$ $\quad$ 9 irreps

$12 = 2^2 + 2^2 + 1^2 + \overset{4}{\cdots} 1^2$ $\quad M_2(\mathbb{C})^2 \oplus \mathbb{C}^4$ $\quad$ 6 irreps

$12 = 2^2 + 2^2 + 2^2$ $\quad M_2(\mathbb{C})^3$ $\quad$ 3 irreps

$\boxed{12 = 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 \quad M_3(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \quad 4 \text{ irreps}}$

1 de grado 3 $\quad$ 3 de grado 1

1) $\mathrm{Orb}(1) = \{1\}$

2) $\mathrm{Orb}((12)(34)) = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

3) $\mathrm{Orb}((123)) = \{(123), (142), (134), (243)\}$

4) $\mathrm{Orb}((132)) = \{(132), (143), (124), (234)\}$

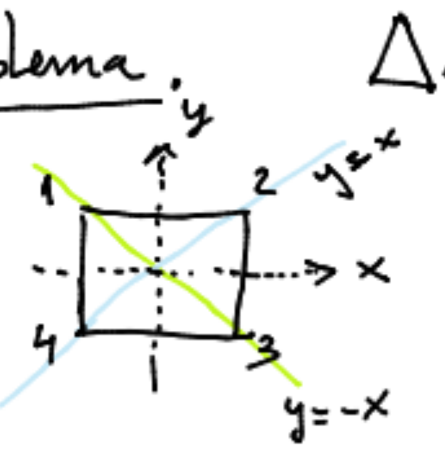
4 irreps salvo $\cong$

3 no isom.

$A_4 \to \mathbb{C}^\times$

$A_4 \to GL_3(\mathbb{C})$

Problema. $\Delta_4 = \{$isom. de $\mathbb{R}^2$ euclídeo que transf. el cuadrado en sí mismo$\} = \{ \underset{+}{1}, \underset{+}{g}, \underset{+}{g^2}, \underset{+}{g^3}, \underset{-1}{s}, \underset{-1}{sg}, \underset{-1}{sg^2}, \underset{-1}{sg^3} \}$



$g = (1\,2\,3\,4)$ giro de $90°$

$g^4 = 1$.

Hay 4 simetrías. $\quad s =$ simetría respecto al eje Y $= (12)(34)$

$\boxed{sg \overset{?}{=} g^3 s}$; $\boxed{sg^2 = g^2 s}$

$sg^2 = (sg)g = g^3 sg = g^3 g^3 s = g^6 s = g^2 s$

$s =$ $\quad sg = (12)(34)(1234) = (24)$

$g^3 s = (1432)(12)(34) = (24)$

$\boxed{sg^3 = gs}$

g^2 conm. con g^k, g^2 " " s $\quad g^2$ conm. con todo elem. del grupo $\quad Z(\Delta_4) = \{1, g^2\}$ No hay otros.

$\mathbb{C}\Delta_4$ tiene dim 8

$8 = 1^2 + \overset{8}{\cdots} 1^2$ $\quad \mathbb{C}\Delta_4 \cong \mathbb{C}^8$ conm. Se descarta

$8 = 2^2 + 1^2 + \overset{4}{\cdots} 1^2$ $\quad \mathbb{C}\Delta_4 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}^4 \longrightarrow$ 5 irreps salvo....

$8 = 2^2 + 2^2$ $\quad \mathbb{C}\Delta_4 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C}) \to$ 2 irreps. salvo....

Calculo clases de conjugación.

$g=(1,2,3,4)$, $\quad s=(1,2)(3,4)$ $\qquad Z(\Delta_4)=\{1,g^2\}$ $\qquad G=\{1,g,g^2,g^3,s,sg,sg^2,sg^3\}$

$sg=g^3s$, $\quad sg^2=g^2s$, $\quad sg^3=gs$

$Orb(1)=\{1\}$, $\quad Orb(g^2)=\{g^2\}$

$Orb(g)=\{g,g^3\}$, $\quad Orb(s)=\{s,sg^2\}$, $\quad Orb(sg)=\{sg,sg^3\}$

$(sg)s=(g^3s)s=g^3$

$(sg)g(sg)^{-1}=sg^2g^{-1}s=sgs=g^3$

$(sg^2)g(sg^2)^{-1}=sg^3g^{-2}s=sgs=g^3$

$g(s\cancel{g})\cancel{g^{-1}}=gs=sg^3$

$gsg^{-1}=sg^3g^{-1}=sg^2$

$g^2sg^{-2}=sg^2g^{-2}=s$

$(sg)s(sg)^{-1}=s(gs)g^{-1}s=s(\cancel{s}g^3)g^{-1}s=g^2s=sg^2$

5 órbitas luego 5 irreps salvo isom

$\mathbb{C}\Delta_4\cong M_2(\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}^4\longrightarrow$ 5 irreps sa ...

$M_2(\mathbb{C})\to\mathbb{C}^2$: $\boxed{\text{1 irrep de grado 2}}$ $\qquad \mathbb{C}^4$: $\boxed{\text{4 irreps de grado 1}}$

4 Irreps. de grado 1

$\rho:\Delta_4\longrightarrow\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$g\longmapsto G$

$s\longmapsto S$

$G,S\in\mathbb{C}^\times$, $\qquad G^4=S^2=1$ $\qquad \cancel{SG=G^3S}$, $\cancel{SG^2=G^2S}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{G^2=1,\ S^2=1}$, $G=\pm1$, $S=\pm1$

$1:\Delta_4\to\mathbb{C}^\times$, $g\mapsto 1$, $s\mapsto 1$ (irrep)

$u_1:\Delta_4\to\mathbb{C}^\times$, $g\mapsto 1$, $s\mapsto -1$

$u_2:\Delta_4\to\mathbb{C}^\times$, $g\mapsto -1$, $s\mapsto 1$

$u_3:\Delta_4\to\mathbb{C}^\times$, $g\mapsto -1$, $s\mapsto -1$

Son las 4 irreps de grado 1

TABLA DE CARACT. DE Δ_4

	1	g	g^2	g^3	s	sg	sg^2	sg^3
1	1	1	1	1	1	1	1	1
u_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
u_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
u_3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_d	2	0	-2	0	0	0	0	0

$d:\Delta_4\longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$

$g\longmapsto\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=G$

$s\longmapsto\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=S$

g giro de 90º

$g:(1,0)\longmapsto(0,-1)$, $(0,1)\longmapsto(1,0)$

$s:(1,0)\longmapsto(-1,0)$, $(0,1)\longmapsto(0,1)$

$G^4=Id$, $\quad \boxed{G^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-Id}$ $\Rightarrow$ $G^3=-G$, $\quad G^4=Id$

$\boxed{S^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=Id}$ $\quad \boxed{SG\overset{?}{=}G^3S}$; $\quad SG=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; $\quad G^3S=-GS=-\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$d(1)=Id_2$, $\ d(g)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $\ d(g^2)=-Id$, $\ d(g^3)=-d(g)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $\ d(s)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\ d(sg)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\ d(sg^2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\ d(sg^3)=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$

$\chi_\rho(g):=tr[\rho(g)]$ $\qquad \chi_\rho=\rho$ si ρ repr. de grado 1

Resumen.

Calc. clase de conj. $\longleftrightarrow$ nº de irreps. KG } ¿Cuántas hay y qué grados tienen?

Grado 1. Ecuaciones complejas.

Grado >1. Diversos métodos.

Problema. En Δ_4, $\quad g=(1\,2\,3\,4)$, $s=(1\,2)(3\,4)$ $\qquad$ Base canónica de $\mathbb{C}^4$ como $\mathbb{C}$-esp. vect. $\quad e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $\vdots$, $e_4=(0,0,\dots,1)$

$\xi:\ \Delta_4\xrightarrow{\ \xi\ }GL_4(\mathbb{C})$

$1\longmapsto Id$, $\quad g\longmapsto\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $\quad s\longmapsto\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $\quad g^2\longmapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$, $\quad g^3\longmapsto\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$

$sg\longmapsto\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\quad sg^2\longmapsto\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, $\quad sg^3\longmapsto\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

Esto es una repr. de grado 4 de Δ_4. Expresar ξ como comb. lineal de $1, u_1, u_2, u_3, d$

$\xi=\alpha 1+\beta u_1+\gamma u_2+\delta u_3+z d$.

$\chi_\xi=\alpha 1\ \beta u_1+\gamma u_2+\delta u_3+z\,\chi_d$

$\chi_\xi(1)=4$, $\ \chi_\xi(g)=0$, $\ \chi_\xi(g^2)=0$, $\ \chi_\xi(g^3)=0$,

$\chi_\xi(s)=0$, $\ \chi_\xi(sg)=2$, $\ \chi_\xi(sg^2)=0$, $\ \chi_\xi(sg^3)=2$

	1	g	g^2	g^3	s	sg	sg	sg
1	1	1	1	1	1	1	1	1
u_1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
u_2	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
u_3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_d	2	0	-2	0	0	0	0	0
χ_ξ	4	0	0	0	0	2	0	2

$$\boxed{\chi_\xi = \alpha 1 + \beta u_1 + \gamma u_2 + \delta u_3 + \tau \chi_d.}$$

Sist. de ecuaciones lineales.

$\alpha = 1, \ \beta = \gamma = 0, \ \delta = 1, \ \tau = 1$

$$\boxed{\xi = 1 \oplus u_3 \oplus d}$$

complet. reducible

d^2

Observación. ¿Porqué toda repr. compleja de grado finito es $\oplus$ de irreps?

G grupo finito. $\mathbb{C}G$ es semisimple $\dim(G) = |G|$. Los $\mathbb{C}G$ módulos son semisimples $\Rightarrow$ las repr. son complet. reducible

Problema. Si A semisimple $\Rightarrow$ Todo A-módulo es semisimple.

G-módulo $\Rightarrow$ kG-módulos simple $\oplus$ simple

$\oplus$ simple $\updownarrow$ C.R.; $\neq$ simple $\updownarrow$ irrep; $\Updownarrow$ representación de G; $\Updownarrow$ repres. de kG; $\updownarrow$ irrep; $\downarrow$ C. Red.

Observación. G finito conmutativo.

$\rho : G \longrightarrow GL(V)$ repr. grado finito $n = \dim(V)$

$\forall g \in G$ $\quad \rho(g) : V \to V$ lineal

$\{\rho(g)\}_{g \in G}$ $\quad \rho(g)\rho(g') = \rho(gg') = \rho(g'g) = \rho(g')\rho(g)$

conmutan dos a dos

Sup. K alg. cerrado

$\rho(g)$ es diagonalizable $\quad \rho(g)$ es de orden finito

En general: $T : V \to V$ lineal, K alg. cerrado $\left.\right\}$ $\boxed{T^n = Id}$ $x^n - 1 =$ $\left.\right\}$ $\Rightarrow$ T es diagonalizable

En general $\{T_i\}_{i \in I}$ $\quad$ T_i diagonal. $T_i T_j = T_j T_i$ $\left.\right\}$ $\Rightarrow$ $\exists B$ base de V / $M_B(T_i)$ diagonal.

$\exists B$ base de V ; $\boxed{\rho(g)(v_i) = \lambda_{g,i} v_i \quad \forall g\ v_i}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\rho(g)(Kv_i) \subset Kv_i}$ $\forall g \in G$

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$ $\quad \lambda_{g,i} \in K$.

Fijo v_1 $\quad \boxed{Kv_1 \leq V}$

$0 \neq Kv_1$ es $\boxed{\rho\text{-invariante}}$

$V = Kv_1$ (si ρ es irrep)

$\dim(V) = 1$ $\quad$ V no contiene subesp. ρ-invar. salvo 0 y V

Lema

G finito, G abeliano, ρ irrep. en V de dim finita $\left.\right\}$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\boxed{\dim(V) = 1}$