Teoría de representación.

Problema. Determinar las repr. irreduc. de G de grado 2.

$G = \{s, g : s^2 = g^3 = 1, \boxed{sg = g^2 s}\}$ $\qquad g = sg^2s$ $\qquad \boxed{gs = sg^2}$

$G = \{1, g, g^2, s, sg, sg^2\} \cong S_3 \cong \Delta_3$.

$\rho : G \xrightarrow[\text{hom. de grupos}]{} GL(V) = \{T : V \to V \mid T \text{ lineal, biyectiva}\}$

V e. vect. sobre $\mathbb{C}$ $\qquad V \cong \mathbb{C}$

$\dim(V) = 1, \quad GL(V) \cong \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\rho : G \to \mathbb{C}^\times$ hom. de grup.

$G \longrightarrow \mathbb{C}^\times$	$G \longrightarrow \mathbb{C}$
$s \longmapsto 1$	$s \longmapsto -1$
$g \longmapsto 1$	$g \longmapsto 1$
$\vdots$	$1 \longmapsto 1$
$x \longmapsto 1$	$g^n \longmapsto 1$
	$sg \longmapsto -1$
	$sg^2 \longmapsto -1$

Veamos ahora $\rho : G \to GL(V)$ hom de grupos. $\qquad \dim_{\mathbb{C}}(V) = 2$

$s \longmapsto s'$
$g \longmapsto g'$

$s', g' : V \to V$ lineales.

$$\boxed{\begin{aligned} s'^2 = g'^3 = 1, \quad & s'g' = g'^2 s' \\ & g's' = s'g'^2 \end{aligned}} \quad (*)$$

$GL(V) \cong GL_2(\mathbb{C})$ matrices 2×2 complejas inversibles

BRUTO:

$s' = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad g' = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Traduzco $(*)$ a ecuaciones alg.

$$\begin{cases} x_1x_4 - x_2x_3 \neq 0 \\ y_1y_4 - y_2y_3 \neq 0 \end{cases}$$

$T : V \to V$ e. vect. complejo. $\quad T^n = 1 \quad \Rightarrow \quad T$ diagonalizable.

T satis. $x^n - 1$

$s' \equiv \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ relativo a una base. $\qquad s' = Id, \; s' = -Id$.

Si $s' = Id$, $\quad s'g' = g'^2 s' \Rightarrow g' = g'^2 \Rightarrow Id = g'$

$\boxed{s' = Id, \; g' = Id.}$ $\quad$ Tomando $0 \neq v \in V$, $\quad s'(v) = v$, $\; g'(v) = v$

$\mathbb{C}v \leq V, \quad \dim(\mathbb{C}v) = 1 \qquad \mathbb{C}v$ es ρ-invariante. $\quad \rho$ IRREP

contradicción

$s' = -Id$, $g' = Id$ se descarta igual.

$s' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, o $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad s' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

reord. la base

$g' \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0 \qquad \boxed{s'g' = g'^2 s'}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & -ab-bd \\ ca+dc & -cb-d^2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathrm{I} & a = a^2+bc \\ \mathrm{II} & b = -b(a+d) \\ \mathrm{III} & c = -c(a+d) \\ \mathrm{IV} & d = d^2+bc \end{array}\right\}$$

$\boxed{b=0}$ $\quad a = a^2 \Rightarrow a = 1$ (p.q $a, d \neq 0$)

$d = d^2 \Rightarrow d = 1$

$c = -2c$; $3c = 0 \Rightarrow c = 0$

$g' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

NO IRREP. $v_1 = 1^{er}$ vect.

$g'(v_1) \in v_1$

$s'(v_1) = v_1$

$\boxed{c=0}$ voy a llegar a la misma conclusión.

$\boxed{b, c \neq 0}$ $\quad a+d = -1$, $\boxed{d = -1-a}$,

$-1-a = 1 + a^2 + 2a + bc$

$0 = 2 + a^2 + 3a + bc$;

$0 = 2 + \cancel{a^2} + 3a + a - \cancel{a^2}$

$0 = 2 + 4a \Rightarrow \boxed{a = -1/2}$; $\boxed{d = -1/2}$

$a = a^2 + bc \qquad -\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + bc$

$-\frac{3}{4} = bc \qquad b = \frac{-3}{4c}$ $(c \neq 0)$

$g' \equiv \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4c \\ c & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$s' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\rho_c : g \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4c \\ c & -1/2 \end{pmatrix}$

$s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

¿ ρ_c irrep ? $\quad V$ tiene dim 2

¿ $\exists\, \mathbb{C}v$ que sea ρ_c-invariante ?

$$g' \equiv \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4c \\ c & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad -\frac{3}{4} = bc \qquad b = \frac{-3}{4c} \ (c \neq 0)$$

$$s' \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_c : g \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & -3/4c \\ c & -1/2 \end{pmatrix} \qquad s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{v_1, v_2\}$ a la base de V.

¿ ρ_c irrep? V tiene dim 2

¿ $\exists$ $\mathbb{C}v$ que sea ρ_c-invariante?

$V = Kv_1$, o Kv_2 $\qquad g'(v) = K\left(-\frac{1}{2}v_1 - \frac{3}{4}cv_2\right)$

los vect. prop. de s' NO lo son de g' $\qquad$ IRREP $\forall c \neq 0$

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \rho_c : \quad g \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ giro. de } \frac{2\pi}{3} \text{ rad.}$$

$$s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ simetría resp. del eje } X$$

Todas las ρ_c son isomorfas. ¿porqué?

Construc. del álgebra-grupo.

G grupo, K cuerpo. $\qquad$ K-esp.vect. libre generado por G

$$KG = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g g \ : \ \lambda_g = 0 \text{ salvo una cant. finita}, \ \lambda_g \in K \right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{g \in G} \lambda_g g + \sum_{g \in G} \mu_g g := \sum_{g \in G} (\lambda_g + \mu_g) g \\ \lambda \in K, \quad \sum_{g \in G} \gamma_g g \qquad \lambda\left(\sum_{g \in G} \gamma_g g\right) := \sum_{g \in G} \lambda \gamma_g g \end{array}\right\} (KG, +, \cdot) \text{ E. vect. sobre } K, \ G \text{ base}$$

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h \in G} \mu_h h\right) := \sum_{\substack{g \in G \\ h \in G}} \lambda_g \mu_h (gh) \qquad (KG, +, \cdot, \cdot)$$

es una K-álgebr y una base suya es G

KG = álg. grupo de G con coef. en K.

agt2.cie.uma.es

Teorema de Maschke. Si G grupo finito y K cuerpo $\mathrm{car}(K) \nmid |G| \Longrightarrow KG$ es semisimple (pág 14 notas de clase)

$$KG \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(D_q).$$

Teorema de Maschke. Si G grupo finito y K cuerpo

$\mathrm{car}(K) \nmid |G| \implies KG$ es semisimple (pág 14 notas de clase)

$$KG \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(D_q).$$

(ayer) $(m_1, \ldots, m_q)(m_1', \ldots, m_q') = (m_1 m_1', \ldots, m_q m_q')$

Si K alg. cerrado. $D_i \cong K$

$$\boxed{KG \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(K)}$$

(Si K es de $\mathrm{car}(K) = 0 \implies \mathrm{car}(K) \nmid |G|$)

E_8 g° de Lie '$\underline{\underline{248}}$'

IRREPS complejos.

$60 \times$ —

$\mathbb{C}$ - alg. de div. de dim finita $\cong \mathbb{C}$

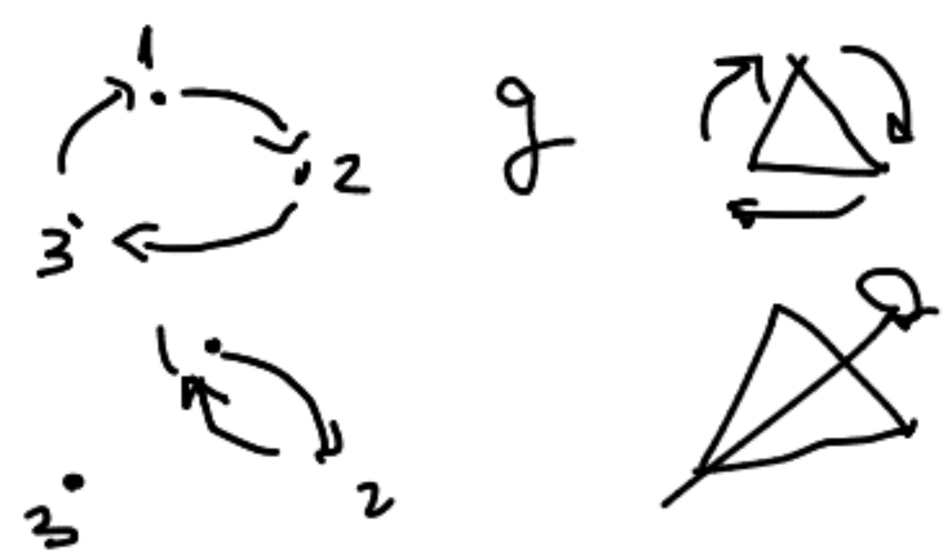
$\mathbb{R}$ - $\qquad \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$\mathbb{Q}$ - $\qquad$?

Ejemplo. $S_3 = \{1, g, g^2, s, sg, sg^2\}$ = G° simétrico de 3 elementos.

$g = (1,2,3)$

$s = (1,2)$



$K = \mathbb{C}$.

$$\mathbb{C}S_3 = \{\lambda_0 1 + \lambda_1 g + \lambda_2 g^2 + \lambda_3 s + \lambda_4 sg + \lambda_5 sg^2 \ / \ \lambda_i \in \mathbb{C}\}$$

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}S_3 = |S_3| = 6$ $\qquad \mathbb{C}$ = alg. cerrado y $\mathrm{car}(\mathbb{C}) = 0$

$\mathbb{C}S_3 = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_q(\mathbb{C})$ $\qquad 6 = n_1^2 + \cdots + n_q^2$

$$\begin{cases} 6 = \overbrace{1^2 + \cdots + 1^2}^{6} \implies \mathbb{C}S_3 \cong \overbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}^{6} \\ 6 = 2^2 + 1^2 + 1^2 \implies \mathbb{C}S_3 = M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{cases}$$

¿por qué no?

¿por qué no? p.q $\mathbb{C}S_3$ sería conmutativa $\underline{\underline{\text{NO}}}$ $\quad S_3$ no es abeliano.

$$\boxed{\mathbb{C}S_3 = M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}}$$

$$\mathrm{Grp} \longrightarrow K\text{-alg}$$
$$G \longmapsto KG$$

Toda repr. de G induce una repr. de KG y recíprocamente.:

Tengo un repr. de G,
Tengo un G-módulo.

$$\begin{cases} G \times V \longrightarrow V \\ (g, v) \longmapsto gv \end{cases}$$

V e.v. sobre K

$$KG \times V \longrightarrow V$$

$$\Big(\sum_g \lambda_g g\Big) \cdot v = \sum_g \lambda_g (g \cdot v)$$

V es un KG-módulo

Si tengo una repr. de KG en un espacio V sobre K

$KG \times V \longrightarrow V$ restr.

$G \times V \longrightarrow V$ da a V estr. de G-módulo.

<u>Más aún</u>. Si tengo IRREP de G, la repr. inducida en KG es IRREP
" " COMPL. RED de G, " " " " " COMPL. RED

y además esto funciona si y solo si.

No hay más $\begin{Bmatrix} \text{IRREPS} \\ \text{C. REDUC} \end{Bmatrix}$ de KG que los que provienen de $\begin{Bmatrix} \text{IRREPS} \\ \text{C. REDUC} \end{Bmatrix}$ de G.

$$\mathbb{C}S_3 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

$$V = \mathbb{C}^2 \qquad \mathbb{C} \qquad \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}S_3$ tiene (salvo $\cong$)
tiene 3 IRREPS
una de grado 2
y dos de grado 1

S_3 tiene 3 IRREPS una de grado 2 y dos de grado 1.

$$s \longmapsto 1 \qquad s \longmapsto -1 \qquad s \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$g \longmapsto 1 \qquad g \longmapsto 1 \qquad g \longmapsto \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$G = A_3$ = representaciones pares de S_3

$$|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$$

$$|A_4| = 12$$

$$12 = n_1^2 + \cdots + n_q^2$$

$\mathbb{C}A_4$

Representación regular de una K-álgebra

K cuerpo A una K-álgebra ASOCIATIVA no necesariamente con unidad.

$a \in A$, $L_a : A \to A$, $x \mapsto ax$ $L_a(x) = ax \quad \forall x \in A$

$R_a : A \to A$, $x \mapsto xa$ $R_a(x) = xa \quad \forall x \in A$

$L_a, R_a \in End_K(A) := \{ T : A \to A \,/\, T \text{ lineal} \}$

$L : A \to End_K(A)$

$a \mapsto L_a$

$L_{ab}(x) = (ab)x = a(bx) = L_a(L_b(x)) = (L_a \circ L_b)(x)$

$\boxed{L_{ab} = L_a \circ L_b}$

$\boxed{L_{a+b} = L_a + L_b}$

$\boxed{L_{\lambda a} = \lambda L_a} \quad \forall \lambda \in K, \forall a \in A$

L hom. de K-álgebras.

L = representación regular de A a izq.

L es una repr. en el e.v. de A.

¿Cuando es L fiel? fiel = monomorfismo.

$Ker(L) = \{ a \in A : L_a = 0 \} = Lann(A) = \{ a \in A \,/\, aA = 0 \}$

$Ker(L) = Lann(A) \lhd A$.

Si $Lann(A) = 0 \implies$ L es un monomorf.

Si $1 \in A \implies Lann(A) = 0$

"Toda K-alg. asoc. con unidad A, se puede ver como subalgebra de $End_K(A)$".

Si $\dim_K(A) = n < \infty$, $End_K(A) \cong M_n(K)$

$T \mapsto M_B(T)$

"Toda K-alg. asoc. con unidad y de dim finita se puede ver como subalg. de una $M_n(K)$"

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\cdot 1 \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k \cong \mathbb{R}^4 \quad \text{como e.v.}$$

$$\{1, i, j, k\} \qquad \boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

$$L : \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$$

$$1 \longmapsto L_1 = Id$$

$$i \longmapsto L_i =$$

$$j \longmapsto L_j$$

$$k \longmapsto L_k$$

$$L_i(1) = i \cdot 1 = i$$

$$L_i(i) = i^2 = -1$$

$$L_i(j) = ij = k$$

$$L_i(k) = -j$$

$$L_i \equiv \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right),$$

$$L_j \equiv \left(\qquad \qquad \right); \qquad L_k = \left(\qquad \qquad \right)$$

<u>Seguirá</u>