

23-10-20. T. de Repr.

Def. de álgebra

$K$  cuerpo fijo,  $A$  se dice que es un  $K$ -alg. si:

→ a)  $A$  es un anillo (no necesariamente unitario)

$$A \times A \xrightarrow{+} A$$

$$A \times A \xrightarrow{\cdot} A$$

• distributiva respecto a  $+$

→ b)  $(K \times A \rightarrow A)$   
 $(\lambda, a) \mapsto \lambda a$

$(A, +, \cdot)$  es un  $K$ -esp. vect.

$$(A, +, \cdot, \cdot)$$

$$(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \quad \forall a, b \in A, \forall \lambda \in K$$

Ejemplos

$$M_n(K)$$

$$\lambda \cdot (a_{ij})_{i,j} = (\lambda a_{ij})_{i,j}$$

$$M_{\infty}(K)$$

$$K[x_1, \dots, x_n]$$

Si  $K$  en vez de ser un cuerpo es un anillo, se tiene la def. de álgebra sobre un anillo.

Salvo que se especifique lo contrario "álgebra" significará "álgebra sobre un cuerpo  $K$ ".

Def. de hom. de  $K$ -álgebras

Si  $A, B$  son  $K$ -álgebras

$f: A \rightarrow B$  es hom. de  $K$ -alg.

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \quad f(xy) = f(x)f(y); \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \begin{matrix} x, y \in A \\ \lambda \in K \end{matrix}$$

$K\text{-alg}$  = categoría cuyos objetos son los  $K\text{-alg}$ . ( $K$  puede ser anillo conmutativo)  
 morf. son los hom. de  $K\text{-álgebras}$ .

$K\text{-alg}_1$  = categoría de  $K\text{-álgebras}$  con unidad ( $\exists 1 \in A : 1x = x1 = x \quad \forall x \in A$ )  
 hom. de  $K\text{-alg}$  con unidad. son hom. de  $K\text{-álgebras}$  }  $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ f(1) = 1 \end{cases}$

Definiciones. En  $K\text{-alg}$ , sea  $A \in K\text{-alg}$ ,  $B \in K\text{-alg}$ .  $B \subset A$  si la inclusión  $i: B \rightarrow A$  es un hom. de  $K\text{-alg}$ . decimos que  $B$  es subalg. de  $A$ .

Un ideal  $I$  de una  $A\text{-}K\text{-álgebra}$ .  $I \subset A$  tal que  $\left. \begin{array}{l} \forall x, y \in I, \quad x+y \in I \\ \forall \lambda \in K, \forall x \in I, \quad \lambda x \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I, \quad ax, xa \in I \end{array} \right\}$

Si solo se tiene  $\underline{ax} \in I \quad \forall a \in A, x \in I$  se dice  $I$  es ideal a izquierda de  $A$ .  
 Análog. se dice que  $\bar{I}$  es ideal a derecha de  $A$ .

$I \triangleleft A$ ,  $\bar{I} \triangleleft A$ ,  $I \triangleleft A$   
 Si  $I \triangleleft A$   $A/I = \{\bar{a} : a \in A\}$ ,  $\bar{a} = \bar{b} \stackrel{\text{def}}{\iff} a-b \in I$

En este caso  $A/I$  es una  $K\text{-alg}$ . Faltaría ver que podemos def.  $K \times A/I \rightarrow A/I$   
 $\lambda \cdot \bar{a} := \overline{\lambda a}$



Nos quedaria ver que  $\forall \lambda \in K, \forall \bar{a}, \bar{b} \in A/I, (\lambda \bar{a}) \bar{b} = \bar{a} (\lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a} \bar{b})$

$(\lambda \bar{a}) \bar{b} = \overline{\lambda a \cdot b} = \overline{(\lambda a)b} = \overline{a(\lambda b)} = \bar{a} (\lambda \bar{b}) = \bar{a} (\lambda \bar{b})$  análogo. la otra

$\forall A \in K\text{-alg}, \forall I \triangleleft A, A/I$  es una  $K\text{-alg}$ .

def. de álgebra de A

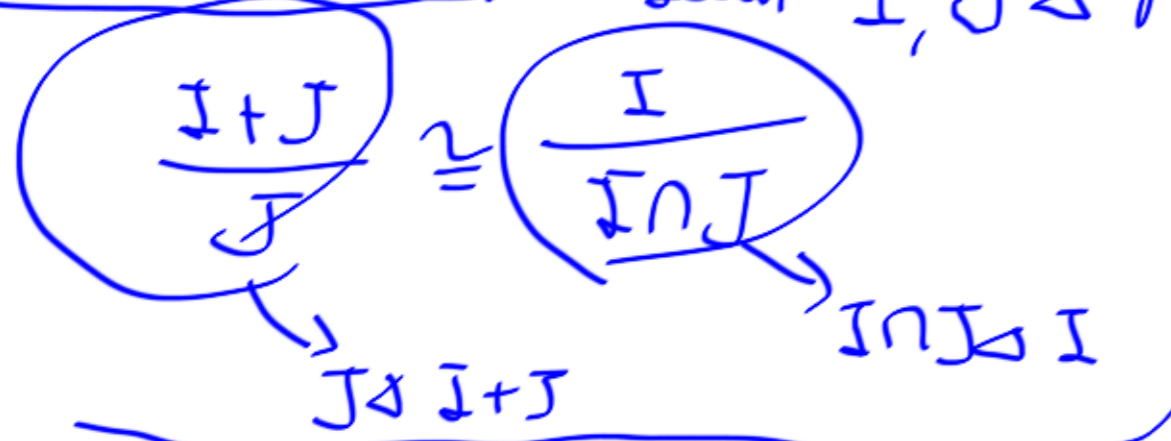
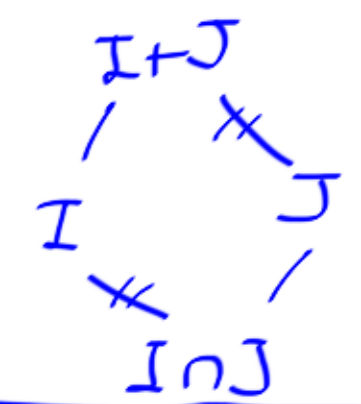
Definiciones

$\forall f \in \text{hom}_{K\text{-alg}}(A, B), \text{ker}(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0\}$   
 $\text{Im}(f) := \{f(a) \mid a \in A\}$

$\text{ker}(f) \triangleleft A, \text{Im}(f)$  subálgebra de A

1er T. de isomorf.  $\forall f \in \text{hom}_{K\text{-alg}}(A, B), A/\text{ker}(f) \cong \text{Im}(f), \bar{a} \mapsto f(a)$

2º T. de isomorf. Sean  $I, J \triangleleft A \in K\text{-alg}$ .  
 $I+J := \{x+y \mid x \in I, y \in J\} \triangleleft A$   
 $I \cap J := \{x \mid x \in I, x \in J\} \triangleleft A$



3er T. de isomorf. Sea  $I, J \triangleleft A \in K\text{-alg}, I \subset J$ .  
 Todo ideal de  $A/I$  es de la forma  $J/I$  donde  $J \triangleleft A, I \subset J$ .

$\frac{A/I}{J/I} \cong A/J$

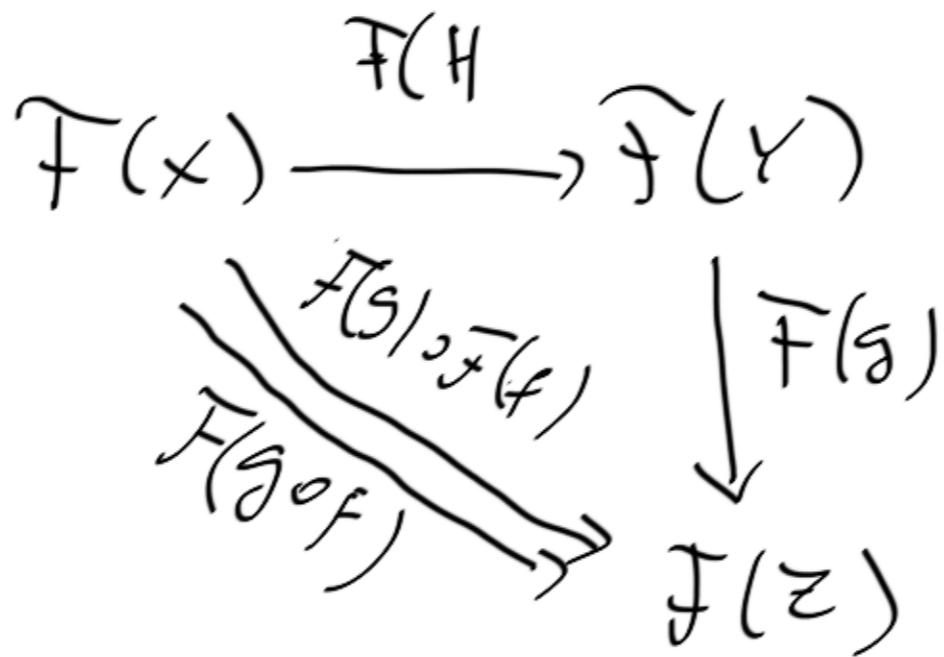
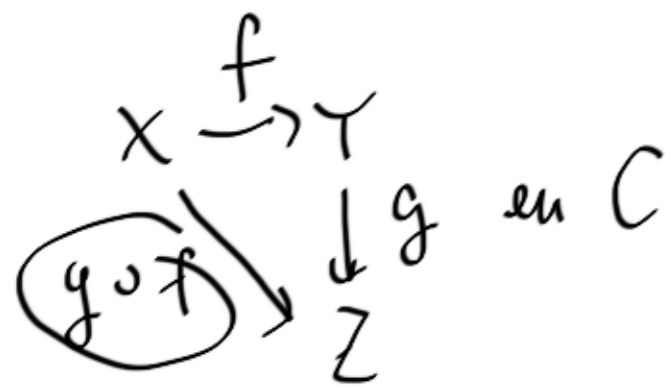
# Definición de Functor

Dados dos cats,  $C, D$ , una functor de  $C$  a  $D$  denotado

$$\mathcal{F} : C \rightarrow D$$

$$\text{Obj}(C) \ni X \mapsto \mathcal{F}(X) \in \text{Obj}(D)$$

$$(f : X \rightarrow Y) \text{ en } C \mapsto (\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)) \text{ en } D$$



$$1) \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$$

$$2) \mathcal{F}(1_x) = 1_{\mathcal{F}(x)}$$

$$1') \mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$$

$$f : X \rightarrow Y \text{ en } C,$$

$$\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X) \text{ en } D$$

$$\mathcal{F}(1_x) = 1_{\mathcal{F}(x)}$$

$$X \xrightarrow{1_x} X$$

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(1_x)} \mathcal{F}(X)$$

$$1_{\mathcal{F}(X)}$$

Funct. contravariantes

(Funct.  $\equiv$  Funct. covariante)

## Ejemplos.

i)  $\mathcal{P}: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$   
 $X \mapsto \mathcal{P}(X) = \{S / S \subset X\}$

$(f: X \rightarrow Y) \mapsto (\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y))$   
 $S \mapsto \mathcal{P}(f)(S) = \{f(s) / s \in S\}$

Functor (covariante) de Set en Set

ii)  $\mathcal{P}^*: \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  contravariante.  
 $X \mapsto \mathcal{P}^*(X) = \mathcal{P}(X) = \{S / S \subset X\}$

$(f: X \rightarrow Y) \mapsto (\mathcal{P}^*(f): \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X))$   
 $T \mapsto \mathcal{P}^*(f)(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$

Functor contravariante.

$C_1, C_2$  dos cats.

$$\text{Obj}(C_1) \subset \text{Obj}(C_2)$$

$$\text{Mor}(C_1) \subset \text{Mor}(C_2)$$

$$i: C_1 \rightarrow C_2 \text{ functor inclusión.}$$

Decimos  $C_1$  subcat. de  $C_2$  si  $i$  es un functor.

caudido\_m@uma.es

http://agt2.ie.uma.es

Def.  $C_1, C_2$  cats u dice (fuertemente) isomorfas si  $\exists F: C_1 \rightarrow C_2$  functor  
 $\exists G: C_2 \rightarrow C_1$   $G \circ F = 1_{C_1}$   
 $F \circ G = 1_{C_2}$

Comp. de funct.  $C_1 \xrightarrow{F} C_2 \xrightarrow{G} C_3$

$C_1 \xrightarrow{G \circ F} C_3$   
 $x \mapsto G(F(x))$

$(x \xrightarrow{F} y) \mapsto G(F(x)) = G(F(y)) \rightarrow G(F(y))$

Ejemplos

Ab = grupo abelianos

$\mathbb{Z}$ -mod = categoria de  $\mathbb{Z}$ -modulos

$F: Ab \rightarrow \mathbb{Z}$ -modulos  
 $A \mapsto A$

$\mathbb{Z} \times A \rightarrow A$

$a \in A, n \in \mathbb{Z} \quad an =$

Si  $n > 0 \quad an = \underbrace{a + \dots + a}_n$   
 $n = 0 \quad a \cdot 0 = 0$

$n < 0 \quad an = -(\underbrace{a + \dots + a}_{|n|})$

Dota a  $A$  de estruct. de  $\mathbb{Z}$ -modulo

Ahora no es  $G: \mathbb{Z}$ -modulos  $\rightarrow Ab$   
 $A \rightarrow (A, +)$

$(\underline{M}, +, \cdot)$

$R$ -mod.

$R = \mathbb{Z}_8$

$R \times M \rightarrow M$   
 $(r, m) \mapsto rm$

$(r+r')m = rm + r'm$

$r(m+m') = rm + r'm'$

$(r r')m = r(r'm)$

$1 \cdot m = m$

$\downarrow M_7(\mathbb{Z}_8)$  grupo abelian

$\mathbb{Z}_8 \times M_7(\mathbb{Z}_8) \rightarrow M_7(\mathbb{Z}_8)$

$r \in \mathbb{Z}_8 \quad r(a_{ij}) := (ra_{ij})$

"olvido que  $\exists \mathbb{Z} \times A \rightarrow A$ "

Se comprueba que  
 $f(na) = n f(a)$   
 $\forall n \in \mathbb{Z}$   
 $\forall a \in A$

Otro ejemplo.

Sea  $R$  un anillo.  $(R, +, \cdot)$  }  $(R, +)$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo.  
 $+ : R \times R \rightarrow R$

$\mathbb{Z} \times R \rightarrow R$   $(R, +, \cdot)$   
tiene estructura de  $\mathbb{Z}$ -alg.

$\mathbb{F} : \text{Rng} \rightarrow \mathbb{Z}\text{-alg.}$   
 $R \mapsto R$  "enriquecido" con estruct. de  $\mathbb{Z}$ -álgebra.

$g : \mathbb{Z}\text{-alg} \rightarrow \text{Rng}$   
 $A \mapsto (A, +, \cdot)$   
anillo subyacente.  
 $(A, +, \cdot, X)$   
 $\mathbb{Z} \times A \rightarrow A$

$f \circ \mathbb{F} = 1_{\text{Rng}}$ ;  $\mathbb{F} \circ g = 1_{\mathbb{Z}\text{-alg}}$ .  
 $\text{Rng}, \mathbb{Z}\text{-alg}$  son fuertemente isomorfos.

Nota Si  $K$  anillo conmutativo. todo teorema que sea válido para toda  $K$ -álgebra, con  $K$  abstracto.  
en particular el teorema es válido en  $\mathbb{Z}$ -alg.  $\Rightarrow$  el teorema es válido en  $\text{Rng}$ .

Definiciones Módulo sobre una  $K$ -álgebra. Sea  $A$  una  $K$ -álgebra fijada,  $K$  puede ser anillo.  
un  $A$ -módulo (módulo sobre  $A$ ) es un conjunto  $M$  con las siguientes operaciones:  
1)  $(M, +)$  grp abeliano; 2)  $K \times M \rightarrow M$  }  $(M, +, \cdot)$  es un  $K$ -módulo; 3)  $A \times M \rightarrow M$   
 $(\lambda, m) \mapsto \lambda m$  }  $(a, m) \mapsto \underline{am}$

$(a+a')m = am + a'm$  ;  $a(m+m') = am + am'$  ;  $(aa')m = a(a'm)$   
si  $A$  tuviera unidad.  $1 \cdot m = m$  ;  $\forall a, a' \in A \forall m, m' \in M$



Ejemplo.

$$K = \mathbb{Z}$$

$$A = M_n(\mathbb{Z})$$

$$M = \mathbb{Z}^n = \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} : k_i \in \mathbb{Z}, (i=1, \dots, n) \right\}$$

Me falta  $A \times M \rightarrow M$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} k_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni} k_i \end{pmatrix}$$

A es una  $\mathbb{Z}$ -alg.

M es un A-módulo.

$(M, +)$  grupo abeliano

$$\mathbb{Z} \times M \rightarrow M$$
$$m \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mk_1 \\ \vdots \\ mk_n \end{pmatrix}$$

M es un A-módulo

$$K = \mathbb{R}$$

$$A = M_n(\mathbb{R}), \quad M = \mathbb{R}^n \text{ como vect. columna}$$

$$A \times M \rightarrow M$$

análoga.

Resumen Dada una  $K$ -alg.  $A$ , un  $A$ -módulo es un conj.  $(M, +, \dots)$

$(M, +)$  grupo

$$K \times M \rightarrow M$$

$$A \times M \rightarrow M$$

Definición. Representación de una  $K$ -álgebra Tomamos  $K$  cuerpo.

$A$  es una  $K$ -álgebra. Una aplicación  $r: A \rightarrow \text{End}_K(M)$  donde  $M$  es un e. vect. sobre  $K$

$$\text{End}_K(M) = \{ T: M \rightarrow M / T \text{ lineal} \}$$

$\text{End}_K(M)$  es un anillo  $+, \cdot$  suma y comp. de aplic.

$$K \times \text{End}_K(M) \rightarrow \text{End}_K(M)$$



Resumen Dada una  $K$ -alg.  $A$ , un  $A$ -módulo es un conj.  $(M, +, \dots)$

$$\begin{aligned} (M, +) \text{ grupo} \\ K \times M &\rightarrow M \\ A \times M &\rightarrow M \end{aligned}$$

Definición. Representación de una  $K$ -álgebra

Tomamos  $K$  cuerpo.

$A$  es una  $K$ -álgebra. Una aplicación  $r: A \rightarrow \text{End}_K(M)$  donde  $M$  es un e.vect. sobre  $K$

$$r: A \rightarrow \text{End}_K(M) \quad \text{donde } M \text{ es un e.vect. sobre } K$$

$$\text{End}_K(M) = \{ T: M \rightarrow M / T \text{ lineal} \}$$

$\text{End}_K(M)$  es un anillo  $+$ ,  $\cdot$  suma y comp. de aplic.  
 $K \times \text{End}_K(M) \rightarrow \text{End}_K(M)$

$$(\lambda, T) \longmapsto \lambda T: M \rightarrow M$$

$(\text{End}_K(M), +, \cdot, \cdot)$  es una  $K$ -álgebra.

Si  $r: A \rightarrow \text{End}_K(M)$  es un hom. de  $K$ -álgebras decimos que  $r$  es una representación en el espacio  $M$

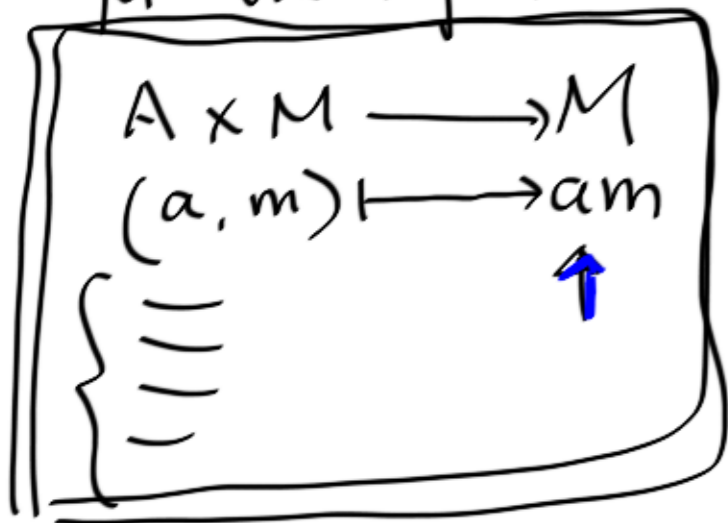
- \* El espacio  $M$  se llama el espacio de la representación
- \*  $\dim(M)$  se llama "grado" de la representación.
- \* Si  $r$  es un monomorf. se dice que la representación es FIEL.
- \* Si  $\dim(M) = n$  finito  $\text{End}_K(M) \cong M_n(K)$

$$r: A \rightarrow M_n(K)$$

con la identificación de  $\text{End}_K(M) \cong M_n(K)$   
hom. de  $K$ -álgebras. Si  $r$  es fiel,  $A \cong \text{Im}(r)$  subalg. de  $M_n(K)$ .

su matriz en una base de  $M$  fijado de antemano.  
(Si  $A$  tuviera  $1 \in A$   
se exige  $r(1) = \text{Id}$ .)  
(Este será normalmente  
nuestro caso.)

Dada  $A$  una  $k$ -alg.  
 $M$  una representación.



Submódulo, lo que es un módulo  $M$  sobre  $A$ . Construir a partir de un módulo def

Queremos:

$$\begin{array}{ccc}
 r: A & \longrightarrow & \text{End}_k(M) \\
 a & \longmapsto & r(a)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 M & \longrightarrow & M \text{ lineal} \\
 m & \longmapsto & am
 \end{array}$$

$$\boxed{r(a)(m) := am}$$

$$1^\circ / r(a) \in \text{End}_k(M)$$

$$\left. \begin{array}{l}
 r(a)(m+m') = r(a)(m) + r(a)(m') \\
 r(a)(\lambda m) = \lambda r(a)(m)
 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{r(a)(m+m') := a \cdot (m+m') = am + am' = r(a)(m) + r(a)(m')}$$

$$\boxed{r(a)(\lambda m) := a(\lambda m) = \lambda(am) = \lambda r(a)(m)}$$

$r(a) : M \rightarrow M$  es lineal  $r(a) \in \text{End}_k(M)$

$2^\circ$   $r$  es hom. de  $k$ -álgebras.

$$\left. \begin{array}{l}
 r(a+a') = r(a) + r(a') \\
 r(\lambda a) = \lambda r(a) \\
 r(aa') = r(a)r(a') \quad \text{composición} \\
 \uparrow \\
 \text{mult. en } A
 \end{array} \right\}$$

$m$  arbitrario

$$\begin{aligned}
 r(aa')(m) &:= (aa')m = a(a'm) = \\
 &= a \cdot [r(a')(m)] = r(a)(r(a')(m)) = (r(a)r(a'))(m)
 \end{aligned}$$

$r(aa') = r(a)r(a')$ . Si: a partir de cada  $A$ -módulo construyo una representación  $r: A \rightarrow \text{End}_k(M)$

Recíprocamente sea  $A$  una  $K$ -álgebra,  $K$  cuerpo, y supongamos dada  $\rho: A \rightarrow \text{End}_K(M)$  donde  $M$  es un e. vect. sobre  $K$ , y  $\rho$  un hom. de  $K$ -álgebras.  $M$  = espacio de la representación.  
 Queremos dotar a  $M$  de estruct. de  $A$ -módulo.  $M$  ya es espacio vectorial solo nos falta  $A \times M \rightarrow M$  que cumpla  $(a, m) \mapsto \boxed{am := \rho(a)(m)}$

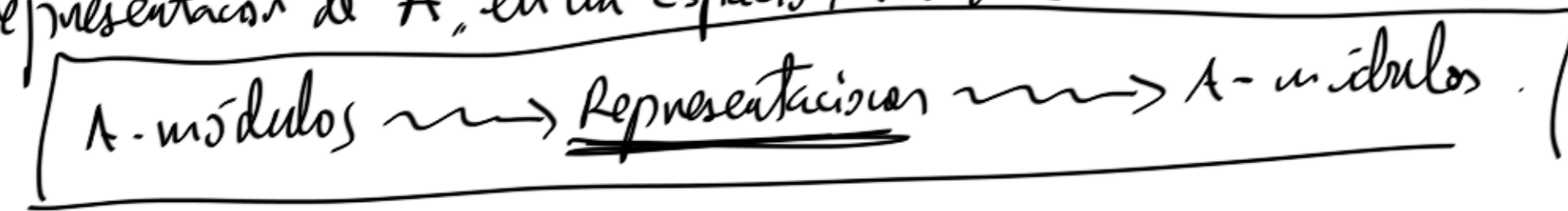
$$\left\{ \begin{array}{l} (a+a')m = am + a'm \\ a(m+m') = am + am' \\ \boxed{(aa')m = a(a'm)} \\ \underline{1 \cdot m = m} \end{array} \right.$$

Datos:  $a \in A, m \in M$   
 $\rho(a): M \rightarrow M$   
 $\rho(a)(m) = \uparrow$

$$\boxed{(aa')m \stackrel{\text{def}}{=} \rho(aa')(m) = \underbrace{\rho(a)\rho(a')}(m) =$$

$$= \rho(a)(\rho(a')(m)) = \rho(a)(\underbrace{a'm}) = \underline{a(a'm)}$$

Cada representación de  $A$ , en un espacio  $M$  induce una estructura de  $A$ -módulo en  $M$





# Categoría de representaciones

Fijamos el cuerpo base  $K$ , y una  $K$ -álgebra  $A$

$\text{Rep}_K(A)$  la categoría cuyos objetos son

$$\text{Obj}(\text{Rep}_K(A)) := \{ \underline{r} : \underline{A} \rightarrow \text{End}_K(\underline{M}) \mid \underline{M} \text{ es } K\text{-e.vect.}, \underline{r} \text{ hom. de } K\text{-álgebra} \}$$

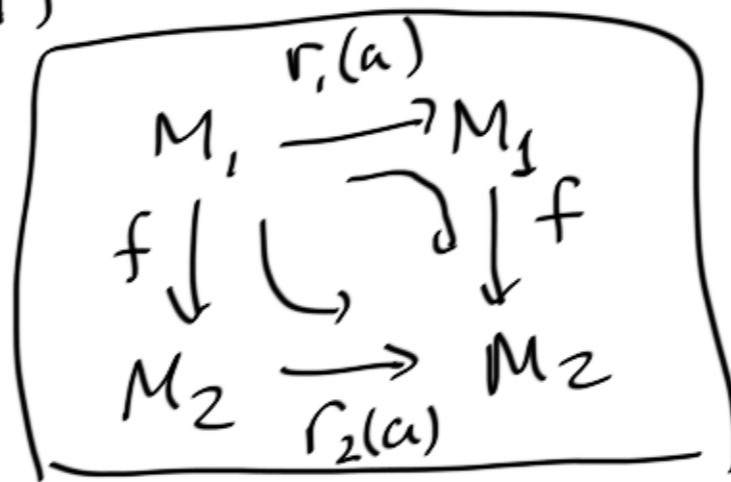
$$r_1 : A \rightarrow \text{End}_K(M_1)$$

$$r_2 : A \rightarrow \text{End}_K(M_2)$$

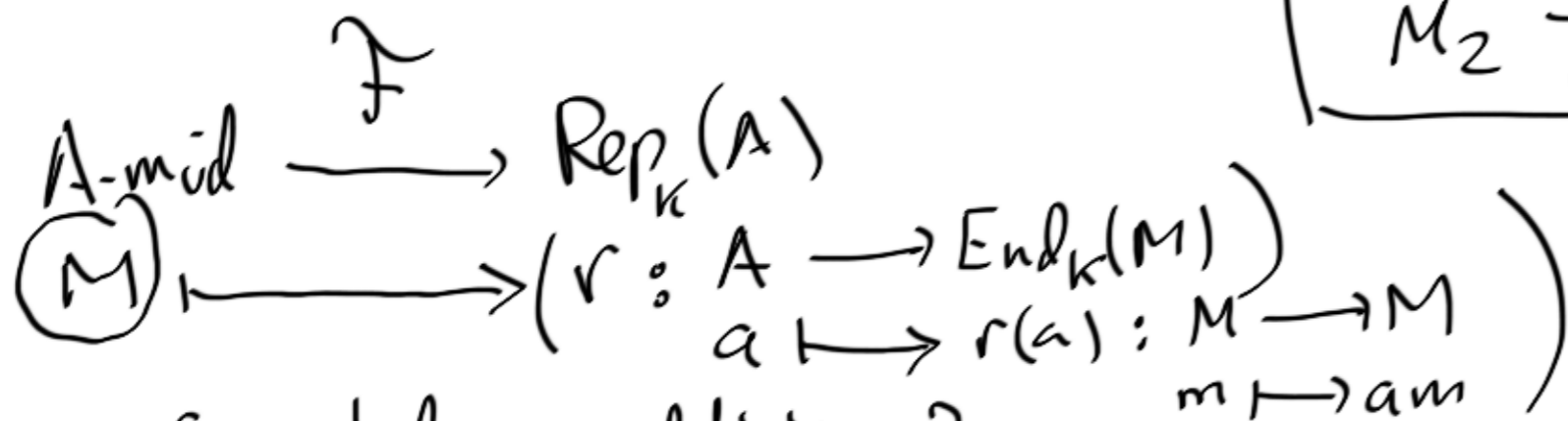
$\text{hom}_{\text{Rep}_K(A)}$

$$(r_1, r_2) := \left\{ f : M_1 \rightarrow M_2 \mid f \text{ es lineal y } f r_1(a) = r_2(a) f \right\}$$

$\forall a \in A$



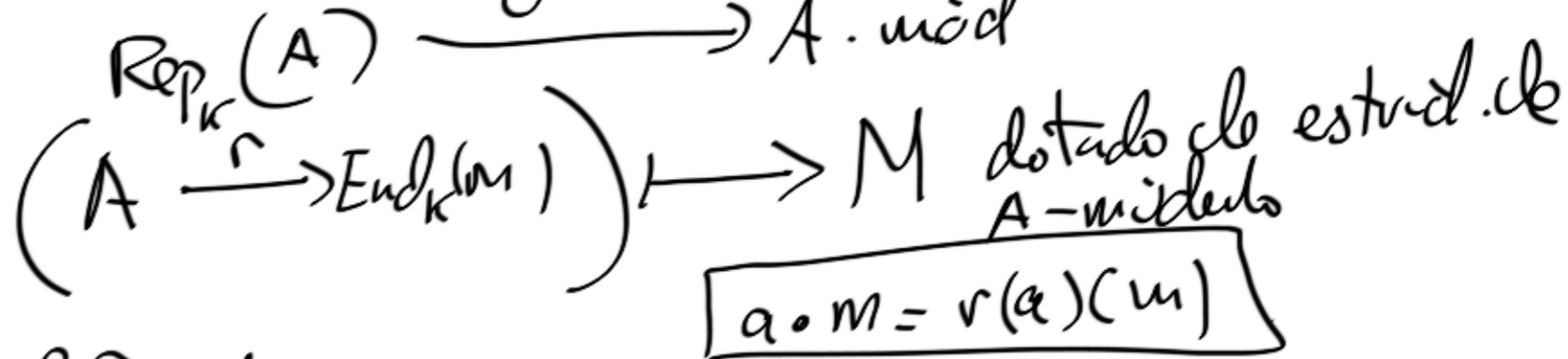
Ejercicio. Demostrar que  $\text{Rep}_K(A)$  es una categoría.



Comprobado como definir  $F$  sobre  $\text{hom}$  de  $A$ -mód.

$f : M \rightarrow M'$  hom de  $A$ -álgebra.

$F(F)$



$G \circ F = \text{Id}_{A\text{-mód}}$

$F \circ G = \text{Id}_{\text{Rep}_K(A)}$

# Representación natural de una $K$ -álgebra $A$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a, b) \longmapsto ab \end{array}}$$

${}^A A = A$  es un  $A$ -módulo sobre sí mismo.

Toda  $K$ -álgebra es un  $A$ -módulo sobre sí mismo  ${}_A A$ .

Puedo construir  $L : A \rightarrow \text{End}_K(A) = \{ \tau : A \rightarrow A \mid \tau \text{ lineal} \}$   
 $a \mapsto L_a : A \rightarrow A$   
 $x \mapsto ax$

$L_a =$  operador de multiplicación a izq.  
 multiplic. por  $a$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{def} \\ L_a(x) = ax \end{array} \right.$

Además vemos que  $L$  es hom. de  $K$ -álgebras

- 1)  $L_{a+a'} = L_a + L_{a'}$
  - 2)  $L_{\lambda a} = \lambda L_a$
  - 3)  $L_{aa'} = L_a L_{a'}$
- }  $\forall a, a' \in A$   
 $\forall \lambda \in K$

$$L_a(x+x') = a(x+x') = ax + ax' = L_a(x) + L_a(x')$$

$$L_a(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda L_a(x)$$

$$\boxed{L_{aa'}(x) := (aa')x = a(a'x) = L_a(L_{a'}(x)) = L_a L_{a'}(x)}$$

$x$  arbitrario

$$\boxed{L_{aa'} = L_a L_{a'}}$$

$L_a : A \rightarrow A$  es lineal  
 $L_a \in \text{End}_K(A)$

$L$  es la representación regular (a izquierda) de  $A$

si  $a \in A$ , invertible  $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$

$$L_{aa^{-1}} = L_a L_{a^{-1}}$$
$$\boxed{I = L_1 = L_a L_{a^{-1}}}$$

$a^{-1} = a^{-1}$   
 $L_a$  biyectiva.

$$L: A \rightarrow \text{End}_K(A)$$
$$a \mapsto L_a$$

$$\text{Ker}(L) = \{a \in A \mid L_a = 0\} = \{a \in A \mid aA = 0\}$$
$$= L_{\text{ann}(A)} = \{a \in A \mid aA = 0\}$$

Para toda algebra  $A$  con unidad.

si  $1 \in A \Rightarrow L_{\text{ann}(A)} = 0$   
 $\boxed{\text{Ker}(L) = 0}$

$1 \in A$

$$a \in L_{\text{ann}(A)} \Rightarrow aA = 0$$
$$a \cdot 1 = 0$$
$$a = 0$$

En un alg. con unidad

$$L_{\text{ann}(A)} = 0$$
$$R_{\text{ann}(A)} = 0$$

Corolario. En un alg. con unidad.  
la repres. regular  $L$  es monomorf.  
FIEL.

En un alg.  $A$  con  $\boxed{L_{\text{ann}(A)} = 0}$

se tiene que la repres. regular  $L$  es un mono  
Martes.  $\boxed{16:30} \rightarrow \boxed{18:30}$