23-10-20 T. de Repr.

Def. de álgebra K cuerpo fijo, A se dice que es una K-alg. si:

→ a) A es un anillo (no necesariamente unitario)

$$A \times A \xrightarrow{+} A$$
$$A \times A \xrightarrow{\cdot} A$$

• distributiva respecto a $+$

→ b) $K \times A \longrightarrow A$ $\quad (A, +, \cdot)$ es un K-esp. vect.

$(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$

$$(A, +, \cdot, \cdot)$$

$$(\lambda a) b = a(\lambda b) = \lambda(a b) \quad \forall a, b \in A, \ \forall \lambda \in K$$

Ejemplos

$M_n(K)$

$\lambda \cdot (a_{ij})_{ij} = (\lambda a_{ij})_{ij}$

$M_\infty(K)$

$K[x_1, \ldots, x_n]$

Si K en vez de ser un cuerpo es un anillo, se tiene la def. de álgebra sobre un anillo.

Salvo que se especifique lo contrario "álgebra" significa "álgebra sobre un cuerpo K"

Def de hom. de K-álgebras Si A, B son K-álgebras $f : A \longrightarrow B$ es hom. de K-álg.

$$f(x+y) = f(x) + f(y); \quad f(xy) = f(x) f(y); \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \qquad x, y \in A, \ \lambda \in K$$

K-álg. = categoría cuyos objetos son las K-álg. (K puede ser anillo conmutativo)
morf. son los hom. de K-álgebras.

K-álg$_1$ = categoría de K-álgebras con unidad $\left(\exists 1 \in A : 1x = x1 = x \quad \forall x \in A\right)$
hom de K-álg. con unidad son hom. de K-álgebras $f : A \to B$, $f(1) = 1$

Definiciones. En K-álg. sea $A \in$ K-álg, $B \in$ K-álg. $B \subset A$ si la inclusión $i : B \to A$ es un hom. de K-álg. decimos que B es subálg de A
Un ideal I de una A. K-álgebra $I \subset A$ tal que $\begin{cases} \forall x, y \in I, & x + y \in I \\ \forall \lambda \in K, \forall x \in I, & \lambda x \in I \\ \forall a \in A, \forall x \in I, & ax, xa \in I \end{cases}$

Si sólo se tiene $\underline{\underline{a}}x \in I$ $\forall a \in A, x \in I$ se dice I es ideal a izq. de A
Análog. se dice que I es ideal a derecha de A.

$$I \lhd A, \quad I \underset{izq}{\lhd} A, \quad I \underset{der}{\lhd} A$$

Si $I \lhd A$ $\quad A/_I = \{\bar{a} : a \in A\}$, $\bar{a} = \bar{b} \overset{def}{\iff} a - b \in I$

En este caso $A/_I$ es una K-álg.. Faltaría ver que podem def. $K \times A/_I \to A/_I$, $\lambda \circ \bar{a} := \overline{\lambda a}$

Nos quedaría ver que $\forall \lambda \in K$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in A/I$, $(\lambda \bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$

$$(\lambda \bar{a})\bar{b} = \overline{\lambda a} \cdot \bar{b} = \overline{(\lambda a)b} = \overline{a(\lambda b)} = \bar{a}(\overline{\lambda b}) = \bar{a}(\lambda \bar{b})$$ análog. la otra

def. de álgebra de A

$\forall A \in K\text{-alg}$, $\forall J \lhd A$, A/J es una K-alg.

Definiciones

$\forall f \in \hom_{K\text{-alg}}(A, B)$, $\ker(f) := \{a \in A \mid f(a) = 0\}$, $\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

$\ker(f) \lhd A$, $\mathrm{Im}(f)$ subálgebra de A

1er T. de isomorf. $\forall f \in \hom_{K\text{-alg}}(A, B)$ $A/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$, $\bar{a} \longmapsto f(a)$

2º T. de isomorf. Sean $I, J \lhd A \in K\text{-alg}$. $I + J := \{x + y \,;\, x \in I, y \in J\} \lhd A$

$I \cap J = \{x : x \in I, x \in J\} \lhd A$

$$\begin{tikzcd} & I+J \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ I \arrow[dr, dash] & & J \arrow[dl, dash] \\ & I\cap J & \end{tikzcd}$$

$$\frac{I+J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}$$

$J \lhd I + J$ $\qquad$ $I \cap J \lhd I$

3er T. de isomorf. Sea $I, J \lhd A \in K\text{-alg}$. $I \subset J$

$J/I \lhd A/I$ Todo ideal de A/I es de la forma J/I donde $J \lhd A$, $I \subset J$.

$$\frac{A/I}{J/I} \cong A/J$$

Definición de Funtor

Dadas dos cats, C, D. una functor de C a D denotado $\mathcal{F} : C \to D$

$$Obj(C) \ni X \longmapsto \mathcal{F}(X) \in Obj(D)$$

$$\underset{\text{en } C}{(f : X \to Y)} \longmapsto \underset{\text{en } D}{(\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y))}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \quad \text{en } C$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, "\mathcal{F}(f)"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)"] \arrow[dr, shift right, "\mathcal{F}(g \circ f)"'] & \mathcal{F}(Y) \arrow[d, "\mathcal{F}(g)"] \\ & \mathcal{F}(Z) \end{tikzcd}$$

1) $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$

2) $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$

$$X \xrightarrow{1_X} X$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(X) \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}(1_X)"] \arrow[r, shift right, "1_{\mathcal{F}(X)}"'] & \mathcal{F}(X) \end{tikzcd}$$

1') $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$

$\boxed{f : X \to Y \text{ en } C}$, $\boxed{\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)}$ en D

$\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$

$\Bigg\}$ Funct. contravariantes

(Funct $\equiv$ Fun. covariante)

Ejemplos.

i) $\mathcal{P} : Set \longrightarrow Set$
$X \longmapsto \mathcal{P}(X) = \{S \,/\, S \subset X\}$
$(f : X \to Y) \longmapsto (\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y))$
$S \longmapsto f(S) = \{f(s) \,/\, s \in S\}$

Funtor (covariante) de Set en Set

---

ii) $\mathcal{P}^* : Set \longrightarrow Set$ contravariante.
$X \longmapsto \mathcal{P}^*(X) = \mathcal{P}(X) = \{S \,/\, S \subset X\}$
$(f : X \to \underset{T}{\underset{\cup}{Y}}) \longmapsto (\mathcal{P}^*(f) : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X))$
$T \longmapsto f^{-1}(T) = \{x \in X : f(x) \in T\}$

Fund. contrav.

C_1, C_2 dos cats.
$Obj(C_1) \subset Obj(C_2)$
$Mor(C_1) \subset Mor(C_2)$

$\boxed{\text{candido\_m@uma.es}}$

$\boxed{\text{http://agt2.cie.uma.es}}$

$i : C_1 \longrightarrow C_2$ functor inclusión.
$X \longmapsto X$
$f \longmapsto f$

Decimos C_1 subcat. de C_2 si i es un functor.

Def C_1, C_2 cats se dice (fuertemente) isomorfas si $\exists\, F: C_1 \to C_2$ functor
$\exists\, G: C_2 \to C_1$ $\quad G\circ F = 1_{C_1}$, $\quad F\circ G = 1_{C_2}$

Comp. de funct. $C_1 \xrightarrow{F} C_2 \xrightarrow{G} C_3$

$$C_1 \xrightarrow{G\circ F} C_3$$
$$X \longmapsto G(F(X))$$
$$(X \xrightarrow{f} Y) \longmapsto G(F(f)) : G(F(X)) \to G(F(Y))$$

R-mod. $\quad (\underline{M,+}, \cdot)$

$$R \times M \to M$$
$$(r,m) \longmapsto rm$$
$$(r+r')m = rm + r'm$$
$$r(m+m') = rm + rm'$$
$$(rr')m = r(r'm)$$
$$1m = m$$

$R = \mathbb{Z}_8$ $\qquad M_7(\mathbb{Z}_8)$ grupo abelian

$$\mathbb{Z}_8 \times M_7(\mathbb{Z}_8) \to M_7(\mathbb{Z}_8)$$
$r \in \mathbb{Z}_8 \quad r(a_{ij}) := (ra_{ij})$.

Ejemplos

Ab = grupos abelianos

$\mathbb{Z}$-mod = categoría de $\mathbb{Z}$-módulos.

F : Ab $\to$ $\mathbb{Z}$-módulo

$A \longmapsto A$,

$(A \xrightarrow{f} B) \longmapsto (A \xrightarrow{f} B)$

$\boxed{\text{Se comprueba que } f(na) = n f(a)\ \forall n \in \mathbb{Z}\ \forall a \in A}$

$$\mathbb{Z} \times A \to A$$
$a \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ $\quad an =$

Si $n>0$ $\quad an = \overbrace{a + \cdots + a}^{n}$

$n=0$ $\quad a\cdot 0 = 0$

$n<0$ $\quad an = -(\overbrace{a + \cdots + a}^{|n|})$

Dota a A de estruct. de $\mathbb{Z}$-módulo.

Ahora necesito G : $\mathbb{Z}$-módulo $\to$ Ab.

$A \longrightarrow (A,+)$ $\quad$ "olvido que $\exists\, \mathbb{Z}\times A \to A$"

Otro ejemplo.

Sea R un anillo. $(R, +, \cdot)$ $\left.\begin{matrix} \\ +, \cdot \;\; R \times R \to R \end{matrix}\right\}$ $(R, +)$ es un $\mathbb{Z}$-módulo. $\underline{\underline{\mathbb{Z} \times R \to R}}$ $(R, +, \cdot, \cdot)$ tiene estructura de $\mathbb{Z}$-alg.

$F : Rng \to \mathbb{Z}\text{-alg}$

$R \longmapsto R$ "enriquecido" con estruct. de $\mathbb{Z}$-álgebra.

$G : \mathbb{Z}\text{-alg} \to Rng$

$A \longmapsto (A, +, \cdot)$ anillo subyacente

$(A, +, \cdot, \cdot)$

$\mathbb{Z} \times A \to A$

$G \circ F = 1_{Rng}$; $F \circ G = 1_{\mathbb{Z}\text{-alg}}$.

Rng, $\mathbb{Z}$-alg son fuertemente isomorfas.

Nota Si K anillo conmutativo todo teorema que sea válido para toda K-álgebra, con $\underline{K \text{ arbitrario}}$. en particular el teorema es válido en $\mathbb{Z}$-alg $\Rightarrow$ el teorema es válido en Rng.

Definiciones $\underline{\text{Modulo sobre una } K\text{-álgebra}}$. Sea A una K-álgebra fijada, K puede ser anillo. un A-módulo (módulo sobre A) es un conjunto M con las siguientes operaciones:

1) $(M, +)$ grupo abeliano ; 2) $\begin{matrix} K \times M \to M \\ (\lambda, m) \longmapsto \underline{\lambda m} \end{matrix}$ $\Big\}$ $(M, +, \cdot)$ es un K-módulo ; 3) $\begin{matrix} A \times M \to M \\ (a, m) \longmapsto \underline{\underline{am}} \end{matrix}$

$(a + a')m = am + a'm$; $a(m + m') = am + am'$; $(aa')m = a(a'm)$, $\forall a, a' \in A$, $\forall m, m' \in M$

si A tuviera unidad: $1 \cdot m = m$

Ejemplo. $K=\mathbb{Z}$

$A=M_n(\mathbb{Z})$

$M=\mathbb{Z}^n=\left\{\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix} : k_i\in\mathbb{Z},\ (i=1\ldots n)\right\}$

A es una $\mathbb{Z}$-álg.

M es un A-módulo.

$(M,+)$ grupo abeliano

$\mathbb{Z}\times M\longrightarrow M$

$m\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}mk_1\\\vdots\\mk_n\end{pmatrix}$

Me falta $A\times M\longrightarrow M$

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}\sum_i a_{1i}k_i\\\vdots\\\sum_i a_{ni}k_i\end{pmatrix}$$

M es un A-módulo

$K=\mathbb{R}$

$A=M_n(\mathbb{R})$. $M=\mathbb{R}^n$ como vect. columna

$A\times M\longrightarrow M$

análoga.

Resumen Dada un K-álg A, un A-módulo es un conj. $(M,+,\cdot,\cdot)$

$(M,+)$ grupo

$K\times M\to M$

$A\times M\to M$

Definición. Representación de un K-álgebra. Tomemos K cuerpo.

A es una K-álgebra. Una aplicación $r: A\longrightarrow \mathrm{End}_K(M)$ donde M es un e.vect. sobre K

$\mathrm{End}_K(M)=\{T: M\to M \,/\, T \text{ lineal}\}$ $\mathrm{End}_K(M)$ es un anillo $+,\circ$ suma y comp. de aplic.

$K\times \mathrm{End}_K(M)\longrightarrow \mathrm{End}_K(M)$

Resumen Dada un K-alg A, un A-módulo es un conj. $(M,+,\cdot,\cdot)$

$(M,+)$ grupo
$K\times M \to M$
$A\times M \to M$

Definición. Representación de un K-álgebra. Tomamos K cuerpo.

A es una K-álgebra. Una aplicación $\boxed{r: A \to End_K(M)}$ donde $\boxed{M \text{ es un e.vect. sobre } K}$

$End_K(M) = \{T: M\to M \,/\, T \text{ lineal}\}$

$End_K(M)$ es un anillo $+,\circ$ suma y comp. de aplic.

$K\times End_K(M) \xrightarrow{\cdot} End_K(M)$

$(\lambda, T) \longmapsto \lambda T : M \to M$
$m \longmapsto \lambda T(m)$

$(End_K(M), +, \circ, \cdot)$ es una K-álgebra.

Si $r: A\to End_K(M)$ es un hom. de K-álgebras decimos que r es una representación en el espacio M

* El espacio M se llama el espacio de la representación
* $\dim(M)$ se llama "grado" de la representación.
* Si r es un monomorf. se dice que la representación es FIEL.
* Si $\dim(M) = n$ finito $End_K(M) \cong M_n(K)$
$T \longmapsto M_B(T)$ su matriz en una base de M fijada antes.

$\boxed{r: A\to M_n(K)}$ con la identificación de $End_K(M) \cong M_n(K)$

hom. de K-álgebras. Si r es fiel, $A \cong Im(r)$ subálg. de $M_n(K)$

(Si A tuviera $1\in A$ se exige $r(1) = Id$.)

(Este será normalmente nuestro caso)

Dada A una k-álg. sabemos lo que es un módulo M sobre A. Construir a partir de un módulo M una representación.

$$\boxed{\begin{array}{l} A\times M \longrightarrow M \\ (a,m)\longmapsto am \end{array}}$$

Queremos: $r: A \longrightarrow \mathrm{End}_k(M)$, $a \longmapsto r(a): M \longrightarrow M$ lineal, $m \longmapsto am$

$$\overset{\text{def}}{\boxed{r(a)(m) := am}}$$

1º/ $r(a)\in \mathrm{End}_k(M)$

$$\begin{cases} r(a)(m+m') \overset{?}{=} r(a)(m)+r(a)(m') \\ r(a)(\lambda m) \overset{?}{=} \lambda r(a)(m) \end{cases}$$

$$\boxed{r(a)(m+m') := a\cdot(m+m') = am + am' = r(a)(m)+r(a)(m')}$$

$$\boxed{r(a)(\lambda m) := a(\lambda m) = \lambda(am) = \lambda r(a)(m)}$$

$r(a): M\to M$ es lineal $\quad r(a)\in \mathrm{End}_k(M)$

2º) r es hom. de k-álgebras

$$\begin{cases} r(a+a') \overset{?}{=} r(a)+r(a') \\ r(\lambda a) = \lambda r(a) \\ \boxed{r(\underset{\text{mult. en } A}{aa'}) = \underbrace{r(a)r(a')}_{\text{composición}}} \end{cases}$$

m arbitrario

$$\boxed{r(aa')(m) := (aa')m} = a(a'm) =$$

$$= a\cdot[r(a')(m)] = r(a)\big(r(a')(m)\big) = \boxed{(r(a)r(a'))(m)}$$

$r(aa') = r(a)r(a')$. Sí: a partir de cada A-módulo construyo una representación $r: A \longrightarrow \mathrm{End}_k(M)$

Recíprocamente sea A una K-álgebra, K cuerpo, y supongamos dada $\boxed{r: A \longrightarrow \mathrm{End}_K(M)}$ donde <u>M es un e. vect. sobre K</u>, y r <u>un hom. de K-álgebras</u>. M = espacio de la representación.

Queremos dotar a M de estruct. de A-módulo.

M ya es espacio vectorial solo nos falta

$$A \times M \longrightarrow M \quad \text{que cumpla}$$
$$(a, m) \longmapsto \boxed{am := r(a)(m)}$$

$$\begin{cases} (a+a')m = am + a'm \\ a(m+m') = am + am' \\ (aa')m = a(a'm) \\ 1 \cdot m = m \quad \forall 1 \in A \end{cases}$$

<u>Datos</u>: $a \in A$, $m \in M$

$$r(a) : M \to M$$
$$r(a)(m) =$$

$$\boxed{(aa')m} \overset{\text{def}}{=} r(aa')(m) = \underbrace{r(a)r(a')}(m) =$$

$$= r(a)\left(\underbrace{r(a')(m)}\right) = r(a)\underbrace{(a'm)} = \boxed{a(a'm)}$$

Cada representación de A, en un espacio M induce una estructura de A-módulo en M

$$\boxed{A\text{-módulos} \rightsquigarrow \underline{\text{Representaciones}} \rightsquigarrow A\text{-módulos}.}$$

Categoría de representaciones

Fijamos el cuerpo base K, y una K-álgebra A

$Rep_K(A)$ la categoría cuyos objetos son

$$Obj(Rep_K(A)) := \{ r : A \to End_K(M) \;/\; M \text{ es } K\text{-e.vect}, \; r \text{ hom. de } K\text{-álgebras} \}$$

$r_1 : A \to End_K(M_1)$

$r_2 : A \to End_K(M_2)$

$$hom_{Rep_K(A)}(r_1, r_2) \overset{\circledast}{:=} \{ f : M_1 \to M_2 \;/\; f \text{ es lineal y } f\, r_1(a) = r_2(a)\, f \}$$

$\forall a \in A$

$$\boxed{\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "r_1(a)"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M_1 \arrow[d, "f"] \\ M_2 \arrow[r, "r_2(a)"'] & M_2 \end{tikzcd}}$$

Ejercicio. Demostrar que $Rep_K(A)$ es una categoría.

$$A\text{-mód} \xrightarrow{\mathcal{F}} Rep_K(A)$$

$$M \longmapsto \left(\begin{array}{l} r : A \longrightarrow End_K(M) \\ \quad a \longmapsto r(a) : M \longrightarrow M \\ \qquad\qquad\qquad m \longmapsto am \end{array} \right)$$

Comprobad cómo definir $\mathcal{F}$ sobre hom de A-mód

$f : M \longrightarrow M'$ hom de A-álg. $\quad \mathcal{F}(f)$

$$Rep_K(A) \xrightarrow{\mathcal{G}} A\text{-mód}$$

$$\left(A \xrightarrow{r} End_K(M) \right) \longmapsto M \text{ dotado de estruct. de } A\text{-módulo}$$

$$\boxed{a \cdot m = r(a)(m)}$$

$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{A\text{-mód}}$. $\quad \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{Rep_K(A)}$

Representación natural de una K-álgebra A

$$\boxed{\begin{array}{l} A \times A \longrightarrow A \\ (a,b) \longmapsto ab \end{array}}$$

${}_A A$ = A es un A-módulo sobre sí mismo.

Toda K-álgebra es un A-módulo sobre sí mismo ${}_A A$.

Puedo construir $L : A \to \mathrm{End}_K(A) = \{T : A \to A \ / \ T \text{ lineal}\}$

$$a \longmapsto L_a : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto ax$$

L_a = operador de multiplicación a izq. multiplic. por a $\quad \boxed{L_a(x) \overset{\text{def}}{=} ax}$

$$L_a(x+x') = a(x+x') = ax + ax' = L_a(x) + L_a(x')$$

$$L_a(\lambda x) = a(\lambda x) = \lambda(ax) = \lambda L_a(x)$$

$L_a : A \to A$ es lineal

$L_a \in \mathrm{End}_K(A)$

Además veamos que L es hom. de K-álgebras

1) $L_{a+a'} = L_a + L_{a'}$
2) $L_{\lambda a} = \lambda L_a$
3) $L_{aa'} = L_a L_{a'}$

$\forall a, a' \in A$, $\forall \lambda \in K$

$$\boxed{L_{aa'}(x)} := (aa')x = a(a'x) = L_a(L_{a'}(x)) = \boxed{L_a L_{a'}(x)}$$

x arbitrario

$$\boxed{L_{aa'} = L_a L_{a'}}$$

L es la representación regular (a izquierda) de A

si $a \in A$. inversible $\quad L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ $\qquad L_{aa'} = L_a L_{a'} \qquad a' = a^{-1}$

$\boxed{I = L_1 = L_a L_{a'}}$ $\qquad L_a$ biyectiva

$$L : A \longrightarrow End_K(A)$$
$$a \longmapsto L_a$$

$$\ker(L) = \{a \in A \,/\, L_a = 0\} = \{a \in A \,/\, aA = 0\}$$
$$= Lann(A) = \{a \in A \,/\, aA = 0\}$$

Para toda álgebra A con unidad

$\underline{\underline{1 \in A}}$ $\qquad a \in Lann(A) \Rightarrow aA = 0$

$$a \cdot 1 = 0$$
$$a = 0$$

si $1 \in A \Longrightarrow Lann(A) = 0$

$$\boxed{\ker(L) = 0}$$

Corolario. En un álg. con unidad. la repres. regular L es monomorf. FIEL.

En un álg. con unidad $\quad Lann(A) = 0$

$\qquad Rann(A) = 0$

En un álg. A con $\boxed{Lann(A) = 0}$ se tiene que la repre. regular L es un mono

Martes . $\boxed{16:30} \longrightarrow \boxed{18:30}$