CÁNDIDO - parte 2:

Han visto: (1) A anillo artiniano simple (anillo = con 1)

entonces $A \approx M_n(D)$ con D anillo artiniano de división

(casi como cpo!)

(2) A anillo artiniano semisimple

entonces $A \approx M_{n_1}(D_1) \oplus \dots \oplus M_{n_q}(D_q)$

Vamos a fijar más en álgs que en anillos. ¿Cuál es la diferencia?

Def: Si K cpo, A una **K-álgebra** $\begin{cases} \text{anillo} & A \times A \to A \\ \text{K-esp vectorial} & K \times A \to A \end{cases}$

y las operaciones se llevan bien: $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$

Vamos solo a considerar K-álgebras de dim finita (en este caso el anillo subyacente es necesariamente artiniano:

si $I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots\dots$ son ideales biláteros de A, la cadena se estabiliza:

pero como $1 \in A \Rightarrow \underbrace{\overset{\lambda}{\underset{K}{\uparrow}} \overset{a}{\underset{A}{\uparrow}}}_{=}$ ¿$\in I$ si $a \in I$? Sí pues:

$(\lambda 1)a \in AI \subset I$

(o sea que esos I_i son subespacios vectoriales - no sólo ideales -)

$\downarrow$

esto me permite tomar dimensiones

y como la dim es finita (tanto de A como de todos los I_i)

y $\dim I_1 \geq \dim I_2 \geq \dots\dots$ $\left(\begin{matrix}\in \mathbb{N} \\ \geq 0\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow$ "esta cadena de números no puede ser estrictamente decreciente!" (todos ≥ 0)

En resumen: A K-álg f-d $\Rightarrow$ A anillo artiniano.

Y A es simple (como anillo si lo es como álgebra)

Dem: xq los ideales como anillo coinciden con los ideales del álgebra

¡gracias a la unidad de A! ← como hemos probado antes

Por tanto $A = M_n(D)$ y como $\dim A = n^2 \dim D \Rightarrow$ ¡D tb es fin-dim!

$\downarrow$

con D una $\underbrace{\text{K-álgebra}}$ de división f-d

$\downarrow$

hay que reconocer que este punto no lo han explicado del todo

(hay trucos como usar el centro)

Y si A es K-álg semisimple fin-dim

$\Rightarrow A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(D_q)$

donde cada D_i es K-álg de div fin-dim.

Total, que reduce el problema a calcular las K-Álg de div fin-dim.

- Si $K = \mathbb{R} \Rightarrow$ sólo hay tres D's: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.
- Si $K = \bar{K}$ (alg. cerrado)

¿puedo averiguar quién es D K-álg de div f-d?

¡Sí! Veamos que $D = K \cdot 1$

Dem: Sea $a \in D - \{0\}$

Sea $S_n = \{1, a, \ldots, a^{n-1}, a^n\} \subset D$.

No puede ocurrir que S_n l.i $\forall n$ (porque D f-d)

y en tal caso $\dim D \geq n \ \forall n \ldots$

Sea n el menor natural tal que S_n l.dep.

$\Rightarrow \exists \lambda_0 \ldots \lambda_n$ no todos nulos tales que

$$\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \underset{\substack{\neq \\ 0}}{\lambda_n} a^n = 0$$

por la elección de n como el "menor" bla-bla-bla

$$\Rightarrow a^n + \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a^{n-1} + \cdots + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} = 0$$

$\rightsquigarrow a$ es raíz de un pol mónico. Así pues:

$\exists\, m(x)$ mónico de grado mínimo con $m(a) = 0$

Como $K = \bar{K} \Rightarrow m(x) = (x - \gamma_1) \cdots (x - \gamma_n)$ con todos los $\gamma_i \in K$

Evaluando en a: $0 = (a - \gamma_1 1) \cdots (a - \gamma_{n} 1)$

D no tiene divisores de cero

$\underset{D \text{ álg div}}{\Longrightarrow} \exists i$ con $a - \gamma_i 1 = 0 \Rightarrow a = \gamma_i 1 \Rightarrow a \in K \cdot 1$ $\boxtimes$

(OBS: hemos usado TODAS LAS HIPÓTESIS)

Si K no es algebraicamente cerrado ¡¡ continúa siendo un problema abierto de investigación el CLASIFICAR LAS K-Álgs de división !!

(¡sigue abierto!!)

Por tanto
RESUMEN
$$\begin{cases} K = \bar{K},\ A\ K\text{-álg simple f-d} \Rightarrow A \cong M_n(K) \\ \quad \text{"} \quad\quad \text{"} \quad \text{semisimple} \quad \text{"} \Rightarrow A \cong M_{n_1}(K) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(K) \end{cases}$$

Además el n está determinado de modo único:

Si $M_n(K) \cong M_m(K) \Rightarrow m = n$

Parece ser que Pepe sí demostró la unicidad

Def: K cpo, A K-álg, un **A-módulo M** es un K-esp. vect M

donde M es un A-módulo: $A \times M \longrightarrow M$ (se refiere a para A con la estructura de anillo)
$(a, m) \rightsquigarrow a \cdot m$

tal que $\lambda(am) = (\lambda a)m = a(\lambda m)$ $\forall a \in A$, $\lambda \in K$, $m \in M$

Pero de hecho M es un A-módulo $\Leftrightarrow$ M es un A-módulo para el anillo subyacente
(para A K-álg)

(No hay diferencia entre las categorías de módulos mirando A como álgebra o como anillo) → demostrar la prueba es usando que $1_A \in A$!

Def: M un A-módulo se dice **irreducible** o **simple** si M no tiene submódulos además de 0 y M

(Es que tiene una categoría:
- Objetos: A-móds
- Morfismos: si M, M' A-mód, $f: M \to M'$ se dice homomorfismo de móds si f lineal, $f(am) = af(m)$ $\forall a \in A$ $\forall m \in M$

Así si M A-mód, $N \subset M$ se dice submódulo si la inclusión es morfismo de móds

Def: M un A-módulo se dice **semisimple** si para todo $N \leq M$ existe $N' \leq M$ (módulo) con $M = N \oplus N'$

(TODO MÓD TIENE COMPLEMENTO) ⇝ tb llamado completamente reducible

Esto es equivalente a que $M = \bigoplus$ irreducibles

Ejemplo: $A = M_n(K)$
$M = K^n$ (vectores columna)

Entonces:
$A \times M \longrightarrow M$
$\left((a_{ij}), \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \to \left(\sum a_{ik} x_k \right)$

Se tiene : a) M es un A-módulo simple (esto no es difícil)

pero MÁS AÚN

b) M es único salvo isomorfismo!!

Cón pregunta si lo han visto --- Parece que no. Bueno, en ejercicios.

¿Y si A es semisimple ? Como $A = M_{n_1}(K) \oplus \dots \oplus M_{n_g}(K)$

si $K=\bar{K}$

Entonces $K^{n_1}, K^{n_2}, \dots K^{n_g}$ son A-módulos simples no isomorfos y NO HAY MÁS

¡ Incluso si los n_i son distintos!

$$\left(V_i = K^{n_i} \; : \; \begin{array}{l} A \times V_i \longrightarrow V_i \\ (a, v) \to \pi_i(a)v \end{array} \right)$$

porque son isomorfos como e.v pero no como módulos

Por tanto los módulos simples para A K-álg f.d simple o semisimple si K a.c son archiconocidos!

Descansillo

Notar que $A \cong M_{n_1}(K) \oplus \dots \oplus M_{n_g}(K) \Rightarrow \dim A = \sum_{i=1}^{g} n_i^2$

donde

g = nº de clases de isomorfía de mód simples

Introduzcamos lenguaje de representaciones:

Si M es un A-mód, A K-álg

$$\Rightarrow r : A \longrightarrow \mathrm{End}_K M = \{T : M \to M \;/\; T\ K\text{-lineal}\}$$
$$a \longmapsto r(a) : M \to M$$
$$m \to r(a)(m) := a \cdot m$$

Es fácil comprobar que r homomorfismo de K-álg

A r se le llama representación de A en el e.v M.

Def: Una **representación** de la K-álg A no es más que $r: A \to \mathrm{End}_K V$ hom de K-álgs.

V = se le llama el **espacio** de la representación

$\dim V$ = **grado** de la representación

Esto es reversible: Dado $r: A \to \mathrm{End}_K V$ representación

$\Rightarrow V$ es un A-módulo

Dem:
$$\begin{aligned} A \times V &\longrightarrow V \\ (a, v) &\longmapsto a \cdot v := r(a)(v) \end{aligned}$$

Módulo $\rightleftarrows$ Representación

(de hecho son categorías isomorfas)

(Aunque no hemos definido la categoría de las representaciones,

Si A K-álg, la categoría **$\mathrm{Rep}_K A$** $\begin{cases} \text{Obj: representaciones } r: A \to \mathrm{End}_K V \\ \text{Morf: Si } r_i : A \to \mathrm{End}_K V_i, \ i = 1,2 \longrightarrow \end{cases}$

$\longrightarrow$ $\hom_{\mathrm{Rep}_K A}(r_1, r_2) = \left\{ T : V_1 \to V_2 \text{ lin } / \begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "r_1(a)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[d, "r_2(a)"] \\ V_1 \arrow[r, "T"'] & V_2 \end{tikzcd} \right\}$

Hay veces que usamos una cosa y otras la otra.

Def: $r: A \to \mathrm{End}_K V$.

$S \leq V$ (subespacio) se dice **r-invariante** (invariante por la representación) si $r(a)(S) \subset S \quad \forall a \in A$

Ej: $S = \{0\}$ y $S = V$ son r-invariantes siempre

Def r se dice **irreducible** si $\forall S \leq V$ r-invariante $\Rightarrow S = \{0\}$ o V

Las rep irreducibles SE CORRESPONDEN con los A-módulos simples.

Nota: Si V K-e.v de dim $n \Rightarrow$ $\mathrm{End}_K V \cong M_n(K)$

Por tanto una representación es una manera de asociar a los elementos de un álgebra, matrices (que obviamente es mucho + fácil)

Def: Si $r_i : A \to \mathrm{End}_K V_i$ representaciones,

$r_1 \oplus r_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}_K (V_1 \oplus V_2)$

$a \rightsquigarrow \quad V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$

$\qquad v_1 + v_2 \longmapsto r_1(a)(v_1) + r_2(a)(v_2)$

Def: $r : A \to \mathrm{End}_K V$ se dice completamente reducible

si $r = r_1 \oplus \dots \oplus r_q$ con r_i: $\underbrace{\text{representación irreducible}}_{\equiv\ \boxed{\text{irreps}}}$ (las vamos a llamar irreps)

REPS $\longleftrightarrow$ MÓDS

completa red $\rightsquigarrow$ mód semisimple

irrep $\rightsquigarrow$ mód simple

Ahora que ha terminado con los conceptos de rep y móds sobre álgebras (y valor sobre en anillos) empieza dichos conceptos en grupos ... Todo funciona igual

Definiciones: 1) G grupo, K cpo, V K-e.v.

$G \times V \longrightarrow V$

$(g, v) \longrightarrow gv$

$g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2$
$g(\lambda v) = \lambda gv$ | o sea la acción de G en V es lineal

$g_1(g_2 v) = (g_1 g_2) v$
$ev = v$ | o sea $G \times V \to V$ acción

A esto se le llama V G-módulo

2) V y W G-módulos, $T : V \to W$ K-lineal se dice

homomorfismo de G-módulos si $T(g \cdot v) = g \cdot T(v)$ $\forall v \in V$, $g \in G$

($G \times V \to V$ bajo $g \cdot v$; $G \times W \to W$ bajo $g \cdot T(v)$)

(etc, un poco dormida de defs)

OBS: G grupo, K cpo, V K-e.v.

Si V es un G-módulo $\left(\begin{array}{l} G \times V \to V \\ (g,v) \to g\cdot v \end{array} \right)$

$\Rightarrow \rho : \begin{array}{l} G \longrightarrow GL(V) \\ g \rightsquigarrow \rho(g): V \longrightarrow V \\ \qquad\qquad\quad v \longrightarrow gv \end{array}$ hom de grupos $\rightsquigarrow$ a esto se le llama representación de G

Def: Una representación de G en un e.v V es $\rho : G \to GL(V)$ hom de grupos

V = espacio de la representación
$\dim V$ = grado de la "

RECIP: Si ρ representación $\rho: G \to GL(V)$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} G\times V \longrightarrow V \\ (g,v) \longrightarrow \rho(g)(v) \end{array}$ $\Rightarrow$ V es un G-módulo

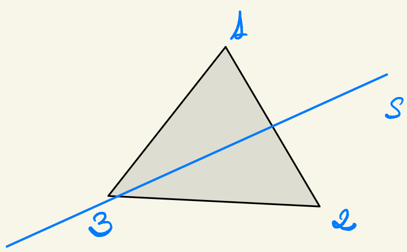
Y de modo puedo definir la categoría $Rep_K G$ y rep irreducible
y " completam. reducible...

Problema central de la teoría:

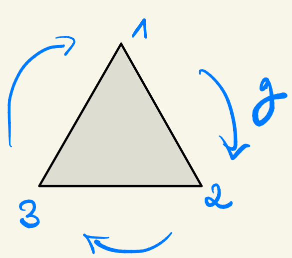
- G finito, K = bueno, cálculo de las irreps salvo isomorfismo.
- Cada rep de grado finito es completam. reducible.
- Cómo encontrar esas subrep (usar teoría de caracteres)

Ejemplo: Para el grupo no conmutativo más chico, S_3 = grupo de permutaciones de 3 elementos

(Gpo $\mathbb{C}$) $\quad G = \langle s, g \ / \ s^2 = g^3 = 1, \ sg = g^2 s \rangle$ ← a Cándido le gusta más darlo en forma de permutación



Miro que preservan el triáng: $s = (12)$
$g = (123)$



1°) Rep de grado 1: $\quad K$ = cuerpo:

Si $\rho : G \to GL(V) \cong \mathbb{C}^\times$

Llamo $\rho(s) = s'$, $\rho(g) = g'$ $\Rightarrow (s')^2 = 1$ $\quad \Rightarrow s' = \pm 1$
$(g')^3 = 1$
$s'g' = (g')^2 s' \Rightarrow 1 = g'$

Tengo dos rep $\rho_1: \begin{array}{l} s \to 1 \\ g \to 1 \end{array}$ Por tanto $\rho_1(x) = 1 \ \forall x$.

y $\rho_2: \begin{array}{l} s \to -1 \\ g \to 1 \end{array}$ Por tanto $\rho_2(x) = \text{sign } x$, pues $\rho_2: \begin{array}{l} 1 \to 1 \\ s \to -1 \\ g \to 1 \\ g^2 \to 1 \\ sg \to -1 \\ sg^2 \to -1 \end{array}$

Obviamente ρ_1 y ρ_2 son irreps porque $\dim V = 1$!!

¿Cómo calculamos las irreps de grado 2?

(Lo deja aquí y no seguimos, pero un acercamiento sería:

S^3 actúa en $\mathbb{C}^3$ de modo bastante natural

$$S^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$$
$$(\sigma, (x_1 x_2 x_3)) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)})$$

$\mathbb{C}^3$ no es irreducible pues $V = \langle (1\,1\,1) \rangle$ es un submódulo (claro)

Como veremos todo submódulo tiene complemento

así que $\mathbb{C}^3 = V \oplus \underbrace{\text{submódulo de dimensión } 2}_{\text{¿se nos ocurre alguno?}}$

↓

De verdad que sí:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \ / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \mathcal{U}$$

subespacio S_3-invariante

¿es irred?

Pues sí, aq si se pudiera reducir g actuaría trivialmente en $\mathcal{U}$

y NO LO HACE

Lo que ya NO ES NADA OBVIO es que NO HAY MÁS IRREPS de S_3 además de $\mathcal{U}$ y de los dos de dim 1: ¡todo módulo es suma directa (de copias) de estos 3! Para esto necesitamos algo de teoría...)