Teoría de Representaciones (20-10-20)

<u>Motivación</u>. Tomar una estruct. algebraica "<u>grupos</u>" e intentar visualizarla con aplicaciones lineales $V \to V$ siendo V un e.v.

$$End_k(V) = \{T : V \to V \,/\, T \text{ es lineal}\}$$ Es un anillo para la + de aplic. y la composición.

Tenemos un isomorf. de anillos $\longrightarrow$ $\boxed{End_k(V) \cong M_n(K)}$ si $\dim(V) = n$ finita

$T \longmapsto M_B(T)$ = matriz de T en base prefijada.

Cuando decimos "visualizar" un grupo mediante aplic. lineales queremos decir establecer un hom. de grupos ····> G grupo $\longrightarrow$ $\boxed{G \xrightarrow{\varphi} GL(V) = \underline{\underline{End_k(V)}}^{\times} \text{ hom. de grupos}}$

<u>Notación</u>. R anillo.

$R^{\times} = \{x \in R \,/\, x \text{ tiene inverso}\}$ grupo para la multiplicación.

$$GL(V) = \{T : V \to V \,/\, T \text{ lineal inversible}\}$$

Si V es de dim finita "n" $\Longrightarrow$ $GL(V) \cong GL_n(K)$ = matrices inversibles $n \times n$ con coef. en K

$\boxed{G \xrightarrow{\varphi} GL_n(K) \text{ hom. de grupos.}}$ Si φ monomorfismo.

Formalmente, una representación de un grupo G en un espacio V es un homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow GL(V)$, donde V es un esp. vect. sobre un cuerpo K.

El espacio V se dice que es el <u>espacio de la representación</u>. El n.º $\dim(V)$ se llama <u>grado de la repres.</u>

Si $\dim(V) = n$ finito $GL(V) \cong GL_n(K) := \{ M \in M_n(K) \ / \ M \text{ es inversible} \}$

siendo $M_n(K)$ es K-espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ con coef. en K.

En ese caso en vez de $GL(V)$ podemos poner $GL_n(K)$ y la representación es un hom. de grupos $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$. Si $\dim(V) = 1$, $GL_n(K) \cong K^{\times} = K \setminus \{0\}$

En ese caso una representación es un hom. de grupos $\varphi : G \longrightarrow K^{\times}$

Ejemplos

$$\Delta_3 = \{ s, g : \boxed{s^2 = 1 \quad g^3 = 1, \quad sg = g^2 s} \}$$

Presentación por generadores e identidades

$$\Delta_3 = \{1, g, g^2, s, sg, sg^2\}$$

$$\Delta_3 \longrightarrow \begin{matrix} GL(V) \\ GL_n(K) \end{matrix} \qquad n = 1$$

$$GL_n(K) = K^\times$$

REpresentación

$$\Delta_3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times$$

φ hom. de grupos.

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ g &\longmapsto \varphi(g), \\ g^2 &\longmapsto \\ s &\longmapsto \varphi(s), \\ sg &\longmapsto \\ sg^2 &\longmapsto \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \varphi(g)^3 = 1 \\ \varphi(s)^2 = 1 \end{matrix}}$$

Definición de repres. trivial

G, H grupos.

$$\left.\begin{matrix} \varphi : G \to H \\ \varphi(x) = 1 \end{matrix}\right\} \text{ hom. de grupos.}$$

$e^{\frac{2\pi}{3} i}$

$\varphi(g) = e^{\frac{2\pi}{3} i}$ raíz cúbica de 1

$\varphi(s) = -1$

$$\underbrace{g \mapsto e^{\frac{2\pi}{3} i}} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i; \quad g^2 \mapsto e^{-\frac{2\pi}{3} i} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} i; \quad s \mapsto -1, \quad sg \mapsto -e^{\frac{2\pi}{3} i}$$

$$sg^2 \longmapsto -e^{-\frac{2\pi}{3} i}$$

¿Tenemos una representación? $\left.\begin{array}{l} \Delta_3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times \\ g \longmapsto e^{\frac{2\pi}{3}i} \\ s \longmapsto -1 \end{array}\right\}$ NO

$sg = g^2 s$ en Δ_3

en $\mathbb{C}^\times$: $\cancel{\varphi(s)}\cancel{\varphi(g)} = \varphi(g)^2 \cancel{\varphi(s)}$

Debería ser $\varphi(g) = 1$

no $\varphi(g) = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

OJO <u>no es representación</u> porque $\varphi(g) = 1$.

$sg = g^2 s$ en Δ_3

$\cancel{\varphi(s)}\varphi(g) = \varphi(g)^2 \varphi(s)$ en $\mathbb{C}^\times$

$= \cancel{\varphi(s)}\varphi(g)^2$

$\cancel{\varphi(g)} = \varphi(g)^2$

$\boxed{1 = \varphi(g)}$

Es una representación de $\begin{array}{l} \Delta_3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times \\ g \longmapsto 1 \\ s \overset{\varphi}{\longmapsto} -1 \end{array}$

sí da <u>representación</u>.

$\varphi(g)^3 = 1$ OK

$\varphi(s)^2 = 1$ OK

$\varphi(s)\varphi(g) = \varphi(g)^2\varphi(s)$

$(-1)\cdot 1 = 1\cdot(-1)$

Solo hay dos represent.

$\Delta_3 \to \mathbb{C}^\times$

* trivial
* $\left.\begin{array}{l} g \mapsto 1 \\ s \mapsto -1 \end{array}\right\}$

Hallar una representación $\Delta_3 \xrightarrow{\varphi} GL_2(\mathbb{C})$ = matrices 2×2 invertibles sobre $\mathbb{C}$

$$g \longmapsto \varphi(g), \qquad \boxed{\varphi(g)^3 = 1}$$

$$s \longmapsto \varphi(s), \qquad \varphi(s)^2 = 1 = \text{identidad } 2\times 2.$$

$$\boxed{\varphi(s)\varphi(g) = \varphi(g)^2\varphi(s)}$$

$$\varphi(s)\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(s)$$

$\varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Voy a llamar $S := \varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$G := \varphi(g) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Ahora planteo las ecuaciones que se obtiene de $G^3 = 1$, $SG = G^2S$ las resuelvo con Mathematica y obtengo una solución $G = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Por tanto la representación buscada es

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad \varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $\varphi(g) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}}}$, $\varphi(s) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$

$\Delta_3 \xrightarrow{\varphi} GL_{\boxed{2}}(\mathbb{C})$ es una representación y es $\underline{\underline{\text{FIEL}}}$ (monomorfo de grupos).

representación de grado 2

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_3 \longrightarrow \mathbb{C}^\times = GL_{\boxed{1}}(\mathbb{C}) \\ g \longmapsto 1 \\ s \longmapsto -1 \end{array}\right\}$$ representación de grado 1.

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ hallar una representación de grado 2.

$G = \{1, a, b, ab\}$ donde $\underbrace{a^2 = b^2 = 1,\ ab = ba}$

$\cdot$	1	a	b	ab
1	1	a	b	ab
a	a	1	ab	b
b	b	ab	1	a
ab	ab	b	a	1

$G \xrightarrow{\varphi} GL_2(\mathbb{C})$

$a \longmapsto A$

$b \longmapsto B$

$A^2 = B^2 = I_{2\times 2}$, $AB = BA$.

$A, B \neq I_{2\times 2}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^2 = B^2 = I$. $AB = BA$.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\varphi} GL_2(\mathbb{C})$$

$$1 \longmapsto I_{2\times 2}$$

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ab \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathrm{Ker}(\varphi) = \{1\} \Leftrightarrow \varphi \text{ monomorfismo.}}$

φ es una represent. fiel.

K de caract $\neq 2$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ se puede representar como matrices 2×2 inv. en cualq. cuerpo.

$$G \xrightarrow{\varphi} GL(V)$$
$$\cong$$
$$GL_n(K)$$

Repaso de concepto de categoría.

$$\mathcal{C} = (\mathrm{Obj}(\mathcal{C}),\ \mathrm{Mor}(\mathcal{C}))$$

$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ = clase de "objetos" de $\mathcal{C}$
$\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ = " " "morfismos" de $\mathcal{C}$

U conjunto. $\mathcal{P}(U)$ tamb. es un conjunto

$$|U| < \mathcal{P}(U)$$

$|U| = n$ $\quad |\mathcal{P}(U)| = 2^n \quad\quad n < 2^n$

$U = \{$ todos los conjuntos $\}$
Si U es un conjunto $\quad \mathcal{P}(U)$ lo es. $\quad \mathcal{P}(U) \subset U$

$$|U| < \underbrace{|\mathcal{P}(U)| \leq |U|}$$

Set $\quad \mathrm{Obj}(\mathrm{Set})$ = clase de todos los conjuntos.
$\mathrm{Mor}(\mathrm{Set})$ = clase de todas las aplic. entre conjuntos.

Además se debe tener:

$\forall A, B \in Obj(C)$, $\quad hom_C(A,B)$ clase de todos los morfismos de A en B

$$f \in \underbrace{hom_C(A,B)} \iff (f : A \to B) \iff \left(A \xrightarrow{f} B\right)$$

Morfismo = flecha.

1) $\forall A, B, C \in Obj(C)$,

$$hom_C(A,B) \times hom_C(B,C) \xrightarrow{\ \circ\ } hom(A,C)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f$$

$*$ $\boxed{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

$*$ $\forall A \in Obj(C)$ $\exists\, 1_A \in hom_C(A,A)$

tal que $\boxed{\begin{array}{l} f \circ 1_A = f \\ 1_A \circ g = g \end{array}}$

$\forall f \in hom_C(A, X)$

$\forall g \in hom_C(A, X)$

Set

Top $\begin{cases} \text{E.T} \\ \text{Aplic. cont.} \end{cases}$

$\to$ Grp $\begin{cases} \text{Grupos} \\ \text{hom de grupos.} \end{cases}$

$\to$ Mon $\begin{cases} \text{Monoides} \\ \text{hom de mon.} \end{cases}$

$\to$ Semigrp $\begin{cases} \text{Semigrupo} \\ \text{hom d} \end{cases}$

$\to$ Rng

Rng categoría de anillos $(A, +, \cdot)$

$(A, +)$ grupo abeliano
$(A, \cdot)$ semigrupo
$\cdot$ es distributiva respecto a $+$

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot(y+z) = xy + xz \\ (y+z)x = yx + zx \end{array}\right\}$$

Anillos no conm. no unitarios

$A, B \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Rng})$

$\varphi \in \hom_{\mathrm{Rng}}(A, B) \iff$
$$\begin{array}{l} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \end{array} \quad \forall x, y \in A$$

Anillo no-conm. $\quad M_n(k),\ n>1 \quad$ anillo no conmutativo.

Anillo no-conm. sin unidad. $\quad M_\infty(k) = \left\{ (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty} \ /\ \exists k \text{ tal que si } \begin{array}{l} i>k \text{ ó } j>k \\ a_{ij}=0 \end{array} \right\}$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & 0 \cdots \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right) ;\ k \geq 1 \text{ cualq.} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{matrices con un nº finito} \\ \text{de coef.} \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$M_\infty(K) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \;\; A \text{ es bloque finito} \right\}.$$

$$1_n = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots^{n} & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in M_\infty(K)$$

$$\left| \begin{array}{l} 1_n \cdot X \neq X \qquad \forall X \in M_\infty(K) \\ X \cdot 1_n \neq X \end{array} \right.$$

Por ejemplo $X = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & \\ & 0 \; \ldots \end{matrix} \end{array}\right)$

$$1_n \cdot X = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & \\ & 0 \; \ldots \end{matrix} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq X$$

Luego 1_n no es unidad de $M_\infty(K)$

Ejemplo de anillo conmut. sin unidad $\longrightarrow$ $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$

$\downarrow$

no tiene unidad

Cualquier ideal propio no trivial de un anillo unitario proporciona también un ejemplo.

Rng_1 denota la categoría de anillos con unidad.

16:00
MasterMat 2

$\forall A, B \in Obj(Rng_1)$

$$\hom_{Rng_1}(A,B) \overset{def}{:=} \{\varphi \in \hom_{Rng}(A,B) \;/\; \varphi(1) = 1\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \end{array}\right\} \not\Longrightarrow \varphi(1) = 1$$

Def. Sea K un cuerpo. Una K-álgebra es un objeto de Rng, A tal que hay $K \times A \longrightarrow A$, $(\lambda, a) \longmapsto \lambda a$

A es esp. vect. sobre K.

$$\boxed{\begin{array}{c} \lambda(aa') = (\lambda a)a' = a(\lambda a') \\ \forall \lambda \in K, \; \forall a, a' \in A \end{array}}$$

$(A, +, \cdot, \cdot)$

$$\left.\begin{array}{l} A \times A \xrightarrow{+} A \\ A \times A \xrightarrow{\cdot} A \end{array}\right\} Rng$$

$K \times A \longrightarrow A$

$M_n(K)$

$K[x_1, \dots, x_n]$

$M_\infty(K)$