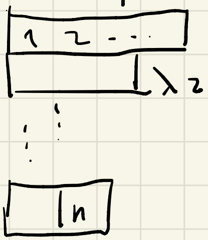
1-XII-21 T. repr. (Cristina)

A cada partición $\lambda \vdash n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\sum \lambda_i = n$

Le corresponde un diag. de Young $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$



Tablero de Young T_λ (cuando se rellena).

y definimos: $R(T_\lambda) \leq S_n$ "el que fija las filas"

$C(T_\lambda) \leq S_n$ "que fija las columnas"

$$a_\lambda := \sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma, \quad b_\lambda := \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau, \quad c_\lambda := a_\lambda b_\lambda$$

Entonces:

(1) $V_\lambda := (\mathbb{C}S_n) \cdot c_\lambda$ es un módulo irreducible (!)

(2) $V_\lambda \not\cong V_\mu$ para $\lambda \neq \mu$ (esto lo queremos ver hoy).

Como consecuencia tendríamos todos los mód. irreducibles.

Ejemplo. En S_n consideremos $\boxed{1 \cdots n}$ $\lambda = (n)$

$R(T_\lambda) = S_n$

$C(T_\lambda) = 1$

$a_\lambda = \sum_\sigma \sigma$. $b_\lambda = 1$, $c_\lambda = \sum_\sigma \sigma$ ¿Cuál es la acción $S_n \times V_\lambda \to V_\lambda$? Sale la irrep. trivial

$$(\mathbb{C}S_n)c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$$

Si tomamos $\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \vdots \\ \hline n \\ \hline \end{array}$ sale $c_\lambda = \sum_{z \in G} \operatorname{sgn}(z) z$

$(\mathbb{C}S_n)c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$ repr. signatura.

La repr. estandar sobre $\mathbb{C}^n = \langle (1,1,\dots 1) \rangle \oplus \{(x_1 \dots x_n) \mid \sum x_i = 0\}$ estandard.

Lo llamamos $V = \{(x_i) \mid \sum x_i = 0\}$ de dim $= n-1$.

¿cómo lo reconocemos?

Sea e_i la base canónica de $\mathbb{C}_n$ (columnas)

$g \cdot e_i = e_{g(i)}$ $\forall i = 1 \dots n$ esta es la acción de S_n en $\mathbb{C}^n$

¿Cuál sería el diagrama de Young?

T_λ: $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & \cdots & n-1 \\ \hline n \\ \cline{1-1} \end{array}$ $R(T_\lambda) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(n) = n\}$

$C(T_\lambda) = \{1, (1,n)\}$

$$\left. \begin{array}{l} a_\lambda = \sum_{\sigma(n)=n} \sigma \\ b_\lambda = 1 - (1,n) \end{array} \right\} c_\lambda = \sum_{\sigma(n)=n} [\sigma - \sigma(1,n)] = \sum_{\sigma(n)=n} \sigma - \sum_{z(1)=n} z$$

$V_\lambda = (\mathbb{C}S_n)c_\lambda$. Sea $g \in S_n$, $g c_\lambda = \sum_\sigma g\sigma - \sum_z gz =$

$= \sum_{\sigma(n)=j} \sigma - \sum_{\sigma(1)=j} \sigma =: v_j$ $(c_\lambda = v_n)$ luego

$g\, c_\lambda = v_{g(n)}$

si $j = g(n)$ No todos los v_j son L.I (pero sí si quitas uno)

$V_\lambda = \mathbb{C}\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ y $g v_i = v_{g(i)}$

<u>Ejemplo</u>. S_5 : $5,\ 4+1,\ 3+2,\ 3+1+1,\ 2+2+1,\ 2+1+1+1$

$1+1+1+1+1$ 7 clases de conj.

En S_5:

1	2	3	4	5

Rep. trivial

1
2
3
4
5

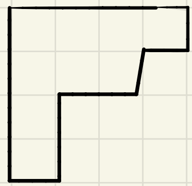
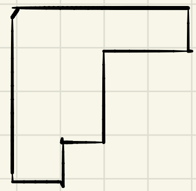
Rep. signatura.

1	2	3	4
5			

Rep. estandad

Def. si $\lambda = (\lambda_1 - \lambda_n) \vdash n$ se llama partición conjugada a $\lambda' \vdash$ que se obtiene camb. filas por columnas.

$\lambda = (4311)$

λ:  λ': 

Prop. $V_{\lambda'} \cong V_\lambda \otimes sgn$.

Regla de los ganchos para calcular $\dim(V_\lambda)$

s_1	s_2	s_3
s_4	s_5	

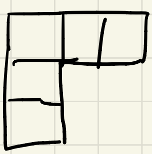
$$\frac{n!}{s_1 \cdots s_n}$$

s_i = de la caja i = el nº de cajas a la derecha mas nº de cajas abajo mas uno.

$s_1 = 4$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$
$s_4 = 2$, $s_5 = 1$

$$\frac{5!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 5 = \dim(V_\lambda)$$

Ejemplo:



$$\frac{5!}{5 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{4!}{4} = 3! = 6 = \dim(V_\lambda)$$

Proposición En S_n, V la repr. estandar $\Rightarrow \Lambda^k V$ son todas irreducib. $\forall k$

Sketch of proof:

$$\mathbb{C}^n = \langle (1,\dots,1)\rangle \oplus V = \mathbb{C}u \oplus V \qquad u = (1,\dots,1)$$

$$\Lambda^k \mathbb{C}^n = \Lambda^k V \oplus \Lambda^{k-1} V, \quad \langle \chi_{\Lambda^k\mathbb{C}^n}, \chi_{\Lambda^k\mathbb{C}^n} \rangle = 2$$

luego $\mathbb{C}^n$ parte en 2 irreps no isom. luego $\Lambda^k V$ y $\Lambda^{k-1} V$ lo son.

Lema. Si V es un G-módulo

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\left[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)\right]$$

Dem. $g \in G$, $V = \langle v_1, \dots, v_n\rangle$, $g v_i = \lambda_i v_i$ (con eso sale). ∎

Tabla de caracteres de S_5

1	10	20	30	24	15	20
1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	$(12)(34)$	$(12)(345)$
1	1	1	1	1	1	1
4	2	1	0	-1	0	1
6	0	0	0	1	-2	0
4	-2	1	0	-1	0	1
1	-1	1	-1	1	1	-1

Objetivo: si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ podemos dar el caracter así: $\Delta(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$

$P_j(x) = x_1^j + \dots + x_k^j$

$\chi_\lambda(g) =$ coef. de $x_1^{\lambda_1+k-1} x_2^{\lambda_2+k-2} \cdots x_k^{\lambda_k+k-k}$ en el polinomio $\Delta(x) P_1(x)^{i_1} \cdots P_k(x)^{i_k}$

$$g = \left.\begin{array}{l} i_1 \text{ ciclos long} = 1 \\ i_2 \text{ '' '' ''} = 2 \\ \vdots \\ i_k \text{ ciclos de lon} = k \end{array}\right\} \quad i_1 + 2i_2 + \dots + k i_k = 1$$

Estas fórmulas se llaman fórmulas de FROBENIUS y nos dan toda la tabla de caracteres.

Siguiente objetivo: dem. que V_λ es irreducible

(i) $\forall \sigma \in R(T_\lambda) \Rightarrow \sigma a_\lambda = a_\lambda = a_\lambda \sigma$

(ii) $\forall \tau \in C(T_\lambda) \Rightarrow \tau b_\lambda = \operatorname{sgn}(\tau) b_\lambda = b_\lambda \tau$

(iii) $\left(x \in \mathbb{C}S_n \text{ con } \sigma x \tau = \operatorname{sgn}(\tau) x \quad \begin{array}{l} \forall \sigma \in R(T_\lambda) \\ \forall \tau \in C(T_\lambda) \end{array} \right)$

$(\quad) \Leftrightarrow x \in \mathbb{C} c_\lambda$

(iv)

(v) $\lambda \neq \mu \vdash n$ ent. $c_\lambda \mathbb{C} S_n c_\mu = 0$

(vi) Si $\lambda \vdash n$ ent. $c_\lambda \mathbb{C} S_n c_\lambda = \mathbb{C} c_\lambda$

$$c_\lambda^2 = \frac{n!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$$

Suponiendo lo de arriba obtenemos que:

(1) V_λ irreducible, $(\mathbb{C}S_n)c_\lambda = V_\lambda$

Sea $W \leq V_\lambda$ (un $\mathbb{C}S_n$-submódulo)

$c_\lambda W \subset c_\lambda V_\lambda = c_\lambda(\mathbb{C}S_n)c_\lambda = \mathbb{C}c_\lambda$

$\dim(c_\lambda W) \leq 1$ luego $c_\lambda W = \mathbb{C}c_\lambda$ o $c_\lambda W = 0$

Si $c_\lambda W = \mathbb{F}c_\lambda$, $c_\lambda \in c_\lambda W$, $V_\lambda = (\mathbb{C}S_n)c_\lambda \subset$

$\subset (\mathbb{C}S_n)W \subset W$

luego $V_\lambda \subset W$.

Si $c_\lambda W = 0 \Rightarrow W^2 \subset V_\lambda W = \mathbb{C}S_n c_\lambda W = 0$

$\mathbb{C}S_n = W \oplus W'$, $1 = \omega + \omega'$, $\omega \in W$, $\omega' \in W'$

$\omega = \cancel{\omega^2} + \omega\omega' \in W' \cap W = 0$

luego $\omega = 0$

$W = W1 \subset WW' \subset W'$

$W \subset W \cap W' = 0$

(2) $V_\lambda \not\cong V_\mu$ si $\lambda \neq \mu$ Si tuviéramos $V_\lambda \overset{\varphi}{\cong} V_\mu$

φ isom de S_n-módulos. $\varphi(c_\lambda^2) = c_\lambda \varphi(c_\lambda) \in c_\lambda V_\mu = 0$

por el punto (v)

$c_\lambda^2 = \dfrac{n!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$ pero $\varphi(c_\lambda^2) \neq 0$!!

Intentemos demostrar (vi) de la lista de arriba

Si $\lambda \vdash n$ ent $c_\lambda \mathbb{C} S_n c_\lambda = \mathbb{C} c_\lambda$

$$c_\lambda^2 = \frac{n!}{\dim V_\lambda} c_\lambda$$

Tomemos $\sigma \in R(T_\lambda)$, $\tau \in C(T_\lambda)$, $x \in \mathbb{C} S_n$

Si $\sigma(c_\lambda x c_\lambda)\tau = \operatorname{sgn}(\tau) c_\lambda x c_\lambda$ entonces

$c_\lambda x c_\lambda \in \mathbb{C} c_\lambda$

$\sigma a_\lambda b_\lambda x a_\lambda b_\lambda \tau = \operatorname{sgn}(\tau) c_\lambda x c_\lambda$ luego sí

$c_\lambda x c_\lambda \in \mathbb{C} c_\lambda$ luego $c_\lambda^2 = \gamma c_\lambda$, $\gamma \in \mathbb{C}$

Consideremos $\varphi : \mathbb{C} S_n \longrightarrow \mathbb{C} S_n$

$$x \longmapsto x c_\lambda$$

si $\gamma = 0$, $\varphi^2 = 0$, $\Rightarrow tr(\varphi) = 0$ pero $c_\lambda = a_\lambda b_\lambda$

$c_\lambda = 1 \pm$ elementos del grupo $\Rightarrow \varphi = id \pm \underbrace{R_{\text{elementos del grupo}}}_{0}$

$$tr(\varphi) = n! + 0$$

$tr(R_g) = 0$ para $g \in G$ luego $tr(\varphi)$ no puede ser 0

conclusión $\gamma \neq 0$. $\gamma^{-1} c_\lambda$ es un idempotente de $\mathbb{C} S_n$

Además $c_\lambda \in c_\lambda S_n c_\lambda$, nos falta que $\gamma = \frac{n!}{\dim V}$

$e = \gamma^{-1} c_\lambda$ idemp. $\qquad \mathbb{C} S_n = \underbrace{(\mathbb{C} S_n) e}_{V_\lambda} \oplus (\mathbb{C} S_n)(1-e)$

$R_e : \mathbb{C} S_n \to \mathbb{C} S_n$, $tr(R_e) = \dim V_\lambda$ y como

$e = r^{-1} c_\lambda$, $tr(R_e) = r^{-1} n$ luego $r = \frac{n!}{\dim V}$

LCL $\quad \sigma x \tau = sgn(\tau) x \Rightarrow x \in \mathbb{C} c_\lambda$

$R(T_\lambda) \cap C(T_\lambda) = 1 \Rightarrow c_\lambda = \left(\sum_{\sigma \in R} \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C} sgn(\tau) \tau\right) =$

$= \sum sgn(\tau) \sigma \tau$, poniendo $x = \sum_g \alpha_g g$, $\alpha_g \in \mathbb{C}$

$\sigma x \tau = \sum_g \alpha_g \sigma g \tau = \sum_g \alpha_g sgn(\tau) g =$ coef. de $\sigma g \tau =$ $sgn(\tau) \alpha_{\sigma g \tau}$

$= \alpha_g$