Teoría de Representaciones. (17-XI-20).

El R-módulo libre generado por un conjunto. "$R^{(X)}$"

X conjunto, R anillo, construcción del R-módulo libre generado por X

$R^X := \{ \varphi : X \to R \ / \ \varphi$ es una aplicación$\}$ $\varphi_1, \varphi_2 : X \to R$, $\varphi_1 + \varphi_2 : X \to R$, $x \mapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

$(R^X, +, \cdot)$ es un R-módulo $r \in R$, $\varphi : X \to R$, $r\varphi : X \to R$, $x \mapsto r\varphi(x)$ $r\varphi \in R^X$

$\mathrm{sop}(\varphi) = \{ x \in X / \varphi(x) \neq 0 \}$

$R^{(X)} := \{ \varphi : X \to R \ / \ \mathrm{sop}(\varphi)$ finito$\}$ $R^{(X)} \subset R^X$

$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in R^{(X)}$ $\mathrm{sop}(\varphi_1 + \varphi_2) \subset \mathrm{sop}(\varphi_1) \cup \mathrm{sop}(\varphi_2)$, $\varphi_1 + \varphi_2 \in R^{(X)}$

$\forall r \in R$, $\forall \varphi \in R^{(X)}$, $\mathrm{sop}(r\varphi) \subset \mathrm{sop}(\varphi) \Rightarrow r\varphi \in R^{(X)}$

$R^{(X)}$ submódulo de R^X
$R^{(X)}$ es un R-módulo.

¿Porqué libre? Para cada $x \in X$, $\varphi_x : X \to R$, $x \mapsto 1$, $x \neq y \mapsto 0$, $\mathrm{sop}(\varphi_x) = \{x\}$ $\varphi_x \in R^{(X)}$

$\{\varphi_x\}_{x \in X}$ ¿Es base?

(a) Linealmente indep. $\left(\boxed{\sum_{x \in X} \lambda_x \varphi_x = 0 \ \text{finitas}}, \quad \lambda_x \in R \right) \overset{?}{\Rightarrow} \forall x, \ \lambda_x = 0$

$\left(\sum_x \lambda_x \varphi_x\right)(y) = 0$

Tomo $y \in X$ arbitrario $0 = \sum_{x \in X} \lambda_x \varphi_x : X \to R$, $y \mapsto \sum_{x \in X} \lambda_x \varphi_x(y) = \lambda_y = 0$

$\lambda_y = 0$, y arbitr.

(b) Sist. de gen. Sea $\varphi \in R^{(X)}$ cualq. $\varphi : X \to R$ $\varphi(x) \in R$ $\varphi \overset{?}{=} \sum_{x \in X} \varphi(x) \varphi_x$; $\boxed{y \in X}$ $\left(\sum_{x \in X} \varphi(x) \varphi_x\right)(y) = \sum_x \varphi(x) \varphi_x(y) = \varphi(y)$

$\sum_{x \in X} \varphi(x) \varphi_x = \varphi$

OK $\{\varphi_x\}_{x \in X}$ es base de $R^{(X)}$

$R^{(X)} := \boxed{\left\{ \sum_{x \in X} \lambda_x \varphi_x \ / \ \lambda_x \in R, \ \lambda_x \neq 0 \text{ una cantidad finita} \right\}}$

$X \xrightarrow{i} R^{(X)}$ es inyectiva
$x \longmapsto \varphi_x$

Si $\varphi_x = \varphi_{x'}$
$\varphi_x(x) = \varphi_{x'}(x)$
$1 = \varphi_{x'}(x)$
luego $x' = x$

$X \overset{i}{\cong} \{\varphi_x\}_{x \in X} \subset R^{(X)}$; $R^{(X)}$ contiene una copia de X $\{\varphi_x\}_{x \in X}$

$R^{(X)}$ tiene por base X

$R^{(X)} := \left\{ \underbrace{\sum_{x \in X} \lambda_x x}_{\text{comb. lineales "formales" de elementos de } X} \ / \ \lambda_x \in R, \ \lambda_x \neq 0 \text{ cantidad finita} \right\}$

$\begin{cases} \left(\sum_x \lambda_x x\right) + \left(\sum_x \mu_x x\right) := \sum_x (\lambda_x + \mu_x) x \\ r \sum_x \lambda_x x = \sum_x (r\lambda_x) x \end{cases}$

R anillo, si K cuerpo. $K^{(X)}$ = esp. vect. libre generado por X = $\{ \sum_x \lambda_x x / \lambda_x \in K, \ldots \text{finitud} \}$.

Definición del álgebra grupo.

G grupo. K cuerpo cualq. vamos a construir una K-álgebra KG denominada álg. grupo

$KG = \left\{ \sum_{g \in G} \lambda_g \cdot g \ / \ \lambda_g \in K, \text{ sumas finitas} \right\}$ = e. vect. libre generado por G

$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum \lambda_g g\right) + \left(\sum \mu_g g\right) = \sum (\lambda_g + \mu_g) g \\ \mu \cdot \sum_g \lambda_g g = \sum_g (\mu \lambda_g) g \\ \left(\sum_g \lambda_g g\right)\left(\sum_h \mu_h h\right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h \underbrace{(gh)}_{\text{producto en } G} \end{array} \right\}$ dota a KG de estructura de K-álgebra

ALGEBRA GRUPO

Fijado K cuerpo

$\mathrm{Grp} \longrightarrow K\text{-álg}$
$G \longmapsto KG$
$\left(\theta : G \to G', \ g \mapsto \theta(g)\right) \longmapsto \left(\theta' : KG \to KG'\right)$ hom. de K-álg.
$\theta'\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) := \sum_{g \in G} \lambda_g \theta(g)$

Define un funtor de Grp en K-álg

Ejemplos de álg. grupo.

$G = \mathbb{Z}_2 = \{1, \pi\}$ donde $\pi^2 = 1$,

$\cdot$	1	π
1	1	π
π	π	1

K cualquiera

$K\mathbb{Z}_2 = \{ \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 \pi \ / \ \lambda_0, \lambda_1 \in K \}$ La tabla de mult. de $K\mathbb{Z}_2$ = tabla de $\mathbb{Z}_2$

(*) $\mathrm{Char}(K) \neq 2$, $(\frac{1}{2} \in K)$.

$e = \frac{1}{2}(1 + \pi) \in K\mathbb{Z}_2$; $\boxed{e^2 = \frac{1}{4}(1 + \pi^2 + 2\pi) = \frac{2 + 2\pi}{4} = \frac{1}{2}(1 + \pi) = e}$

$f = \frac{1}{2}(1 - \pi) \in K\mathbb{Z}_2$; $f^2 = f$; $e + f = 1$ Sist. completo, ortogonal de idempotentes

$\boxed{ef = \frac{1}{4}(1 + \pi)(1 - \pi) = \frac{1}{4}(1 - \pi^2) = 0}$

$A = K\mathbb{Z}_2$, $\quad e = \frac{1}{2}(1+\pi)$; $f = \frac{1}{2}(1-\pi)$ $\qquad e+f=1$

$A = A\cdot 1 = Ae + Af \qquad Ae \cap Af \ni w \qquad w = ae = a'f$, $\quad ae^2 = a'fe \qquad e^2=e$, $ef=fe=0$

$A = Ae \oplus Af \qquad w = ae = 0$

luego $Ae \cap Af = 0$

$$\boxed{G \text{ grupo abeliano} \iff KG = K\text{-álg. conmutativa} \quad \left(\sum_g \lambda_g g\right)\left(\sum_h \mu_h h\right)} = \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{g,h} \lambda_g \mu_h (hg) = \left(\sum_h \mu_h h\right)\left(\sum_g \lambda_g g\right)$$

$g,h \in G$, $\quad g,h \in KG$

$gh = gh$

Nuestra $A = K\mathbb{Z}_2$ es conmut.

$$\boxed{A = \underset{\overset{\shortparallel}{eA}}{Ae} \oplus \underset{\overset{\shortparallel}{fA}}{Af} = eA \oplus fA} \qquad ¿\boxed{Ae = Ke} \ \boxed{Af = Kf}?$$

$Ke \subset Ae$; $\quad a \in A$ cualq. $\boxed{a = \lambda_0 1 + \lambda_1 \pi}$

$\boxed{ae} = (\lambda_0 1 + \lambda_1 \pi)\frac{1}{2}(1+\pi) = \frac{1}{2}\left(\lambda_0 1 + \lambda_0 \pi + \lambda_1 \pi + \lambda_1 \underset{1}{\pi^2}\right) = \frac{1}{2}\left((\lambda_0+\lambda_1)\cdot 1 + (\lambda_0+\lambda_1)\pi\right) =$

$= (\lambda_0+\lambda_1)\frac{1+\pi}{2} = (\lambda_0+\lambda_1)e \in \boxed{Ke} \qquad Ae \subset Ke$

$A = Ke \oplus Kf \qquad e^2=e$, $f^2=f$, $\quad ef=fe=0$

$$A = Ke \oplus Kf \cong K \times K$$

$\alpha e + \beta f \longmapsto (\alpha, \beta)$

$e \longmapsto (1,0)$

$f \longmapsto (0,1)$

$(1,0)^2 = (1,0)$

$(0,1)^2 = (0,1)$

$(1,0)(0,1) = (0,0)$

$(1,0)+(0,1) = \boxed{(1,1)}$

<u>Conclusión</u>: Si $\mathrm{char}(K) \neq 2 \qquad K\mathbb{Z}_2 \cong K \times K$ con oper. por componentes

$\cong K \oplus K$ semisimple.

— Si $\mathrm{char}(K) = 2$, $\quad ¿A = K\mathbb{Z}_2$? $\qquad A = \{\lambda_0 1 + \lambda_1 \pi \ / \ \lambda_i \in K, \ \pi^2 = 1\}$

$K[x]$ la K-álg. de pol. en $x \qquad \dfrac{K[x]}{(x^2-1)}$ en ella $\bar{x}^2 \overset{?}{=} \bar{1}$

$K[x] \xrightarrow{\phi} A \qquad$ <u>hom. de K-álgebras</u>

¿es epimorfismo?

$x \longmapsto \pi$

$\sum_i a_i x^i \longmapsto \sum_i a_i \pi^i$

los generadores de A están en $\mathrm{Im}(\phi)$ luego $A = \mathrm{Im}(\phi)$

ϕ epim. $\qquad \dfrac{K[x]}{\mathrm{Ker}(\phi)} \cong A \qquad \mathrm{Ker}(\phi) = (x^2-1)$

$1 \longmapsto 1$

$x \longmapsto \pi$

$x^2 - 1 \longmapsto \pi^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$(x^2-1) \subset \mathrm{Ker}(\phi)$

$A \cong \dfrac{K[x]}{(x^2-1)}$ <u>Indescomponible.</u>

<u>Lema.</u> $K[x]/(x^2-1)$ es indescomp.

<u>Dem.</u> $K[x]/(x^2-1)$ tiene por base $\bar{1}$, $\bar{x}$, $\quad \underset{\bar{1}}{\bar{x}^2}$, $\underset{\bar{x}}{\bar{x}^3}$, $\dots$ $\underset{1}{\bar{x}^4}$

$\dfrac{K[x]}{(x^2-1)} = K\bar{1} \oplus K\bar{x} \qquad \dim_K\left(\dfrac{K[x]}{(x^2-1)}\right) = 2$, $\quad \boxed{\{\bar{1}, \bar{x}\}}$

Si $0 \neq I \trianglelefteq \dfrac{K[x]}{(x^2-1)}$, $\quad \dim_K(I) = 1$, $\quad \{I = K(\alpha_0 \cdot \bar{1} + \alpha_1 \bar{x})\} \qquad \alpha_0, \alpha_1 \in K$.

$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = \lambda \alpha_1 \\ \boxed{\alpha_1 = \lambda \alpha_0} \end{array}\right\} \qquad \alpha_0 = \lambda^2 \alpha_0$

$I \ni \bar{x}(\alpha_0 \bar{1} + \alpha_1 \bar{x}) = \alpha_0 \bar{x} + \alpha_1 \bar{1} = \lambda(\alpha_0 \bar{1} + \alpha_1 \bar{x})$

$\alpha_0(1 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow I = 0 \ !!! \\ \lambda^2 = 1, \ \mathrm{char}(K) = 2, \quad \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad (\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda + 1 = 0 \end{cases}$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 \quad \forall a,b \in K \qquad \lambda = 1 \Downarrow \alpha_0 = \alpha_1$

$I = K\alpha_0(\bar{1} + \bar{x}) = K(\bar{1} + \bar{x})$

<u>El único no nulo, propio</u> es $K(\bar{1} + \bar{x})$

<u>Moraleja.</u> Siempre que podamos tomamos $K = \mathbb{C}$ álg. cerrado, $\mathrm{char}(\mathbb{C}) = 0$

$Grp \to K\text{-álg.}$
$G \longmapsto KG$ álg. grupo.

* Supongamos que $\rho: G \to GL(V)$ una repr. de G en el K-esp. vect. V
Queremos construir $r: \underline{KG} \longrightarrow End_K(V)$ una repr. de KG en el mismo V.
$\forall g \in G$. $\rho(g): V \to V$ lineal biyectiva. Como define $r(\sum_g \lambda_g g) := \sum_g \lambda_g \rho(g)$ ok

Si ρ es hom. de grupos, la r es hom de K-álg. $\leftarrow$ Se comprueba!!
$r(g) = \rho(g)$ $\quad (r|_G = \rho)$

Recíprocamente
Supongamos $r: KG \to End_K(V)$ representación.
$r|_G : G \longrightarrow \underbrace{End_K(V)}$, $\forall g \in G$, $r(g): V \to V$ lineal ¿es inversible?

$\exists h \in G / \; gh = hg = 1$ $\quad r(gh) = r(hg) = r(1) = 1$
$r(g)r(h) = r(h)r(g) = 1$ luego $r(g)$ es inversible

$\rho = r|_G : G \longrightarrow GL(V)$ será una representación de G en V

$Rep_K(G) \xrightarrow{\mathcal{A}} Rep_K(KG)$ $\quad Rep_K(KG) \xrightarrow{\mathcal{B}} Rep_K(G)$, $\quad \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = 1_{Rep_K(G)}$
$\rho \longmapsto r$ como en * $\quad r \longmapsto r|_G$ $\quad \mathcal{A} \circ \mathcal{B} = 1_{Rep_K(KG)}$

La teoría de repr. de un grupo G equivale a la de su álg grupo KG
Describir las irreps de un grupo G " " describir las irreps de KG

Teorema de Maschke. Sea G un grupo finito, y K cuerpo, $char(K) \nmid |G|$
$|G|$ = cardinal de G. Entonces KG es semisimple

Dem.: $(\forall I \trianglelefteq_{izq} KG, \exists J \trianglelefteq_{izq} KG / \; KG = I \oplus J) \Leftrightarrow KG$ es $\oplus$ álg. simples.
$\boxed{\dim(KG) = |G|}$ Base de KG es G

${}_A A = V \oplus (?)$ como A-módulos. Tomamos W subesp. vect. de A

Sea $A = KG$, V un A-submódulo de A,
tal que $A = V \oplus W$ (a nivel de espacios vectoriales).

Sea $\boxed{p: A \to A}$; $\left.\begin{array}{l} p(v) = v, \; \forall v \in V \\ p(w) = 0, \; \forall w \in W \end{array}\right\}$ proyección.

$p: A \to A$ solo es aplic. lineal. $\boxed{Ker(p) = W}$, $\boxed{Im(p) = V}$ $\quad \boxed{p^2 = p}$
No puedo decir que p sea hom de A-módulos.

Si $p \in hom_A(A,A)$ $\quad Ker(p) \leq A$, $W \leq A$ $\quad A = V \oplus W$ suma directa de A-módulos.
$Im(p) \leq A$, $V \leq A$

Definamos
$q: A \to A$; $\quad q(x) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underset{G}{g}\, \underbrace{p(\overset{\in V}{g^{-1}x})}_{\in V}$ $\Big\}$ La fórmula tiene sentido. ¿q es hom de A-módulos?
Propiedades de q

$\boxed{\frac{1}{|G|} \in K}$ p.q. $char(K) \nmid |G|$

$\boxed{q(x+y) = q(x) + q(y)}$ $\forall x, y \in A$. ok $\quad$ p es lineal. $\quad$ $p(x+y) = p(x) + p(y)$
$g \cdot (x+y) = gx + g(y)$
$q(\lambda x) = \lambda q(x)$ $\quad \forall x \in A, \forall \lambda \in K$ $\quad$ p es lineal. $\quad$ $g(\lambda v) = \lambda (g v)$.

¿ $q(hx) = h q(x)$ $\quad \forall h \in G, \forall x \in A$?

$q(hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g p(g^{-1}hx) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hh^{-1} g p(g^{-1}hx) = \frac{h}{|G|} \sum_g \underset{k}{h^{-1}g}\, p((h^{-1}g)^{-1}x) = h \cdot \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} k p(k^{-1}x)} =$

$= h q(x)$; $\quad$ q si es hom de K-álg. $\quad Ker(q), Im(q)$ son A-módulos.

Comprobar que: $\boxed{Im(q) = V, \quad q^2 = q}$; $\quad$ ¿ $A = Im(q) \oplus Ker(q)$?
$z \in Im(q) \cap Ker(q)$, $\quad z = q(a)$, $0 = q(z) = q(q(a)) = q(a) = z$

$A = V \oplus Ker(q)$
a nivel de A-módulos.

$Im(q) \cap Ker(q) = 0$

$a \in A$, $\quad a = \underset{Im(q)}{q(a)} + \underset{Ker(q)}{[a - q(a)]}$

$q(a - q(a)) = q(a) - q^2(a) = q(a) - q(a) = 0$

Ejemplo. Determinar el álgebra grupo de Δ_3 tomando $K = \mathbb{C}$.

$\Delta_3 = \{1, g, g^2, s, sg, sg^2\}$ $\quad |\Delta_3| = 6$

no abeliano. $\quad \underbrace{g^3 = 1,\ s^2 = 1,\ sg = gs^2}$ ó $gs = sg^2$

$\mathbb{C}\Delta_3 \quad \dim(\mathbb{C}\Delta_3) = 6 \quad$ $\operatorname{char}(\mathbb{C}) = 0 \nmid 6$ T. Masche se aplica.

$\mathbb{C}\Delta_3$ semisimple de dim $= 6$.

$\mathbb{C}\Delta_3 \cong \bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(\Delta_i)$. $\quad \Delta_i$ una $\mathbb{C}$-álg. de división y $\dim(\Delta_i)$ finita $\Big\}$ $\Delta_i \cong \mathbb{C}$

$\mathbb{C}\Delta_3 \cong \bigoplus_i \underline{M_{n_i}(\mathbb{C})}$

$\mathbb{C}\Delta_3 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$\mathbb{C}\Delta_3 \cong \overbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}^{6}$ álg. conmutativa. DESCARTADO

$\mathbb{C}\Delta_3 \cong M_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$\mathbb{C}^{2}$ $\quad \mathbb{C}^{1}$ $\quad \mathbb{C}^{1}$

grado 2 $\quad$ grado 1 $\quad$ grado 1

$g \mapsto (\ \ )$ $\quad g \mapsto 1$

$s \mapsto ($ $\quad s \mapsto 1$

3 irreps. en $\mathbb{C}\Delta_3$

3 irreps en Δ_3 (salvo $\cong$)

1

$\Delta_3 \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ $\quad$ repr. trivial.

$s \longmapsto 1$

$g \longmapsto 1$

$\Delta_3 \longrightarrow GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ $\quad$ repr.

$s \longmapsto -1$

$g \longmapsto 1$

)