13-XI-20. "Teoría de representaciones"

K cuerpo, A una K-alg. $\quad r : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V) = \{ T : V \to V \,/\, T \text{ lineal} \}$

r hom. de K-álgebra $\Rightarrow$ r es una repr. de A en el espacio V

$\dim_K(V)$ = "grado de la representación.

Automaticamente V es un A-módulo para $A \times V \to V$

$a \cdot v := r(a)(v)$

Recíprocamente si V es un K-e.v que es un A-módulo $\quad A \times V \to V$

entonces $r : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$
$\quad a \longmapsto r(a) : V \longrightarrow V$
$\quad v \mapsto av$ $\quad r(a)(v) := av$

A-mod = cat. de A-módulos.

$\mathrm{Rep}_K(A)$ = cat. cuyos objetos son $\quad r : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ hom. de K-álgebras.

$$\mathrm{Obj}(\mathrm{Rep}_K(A)) = \{ r : A \to \mathrm{End}_K(V) \,/\, r \text{ es hom de } K\text{-álgebras} \}$$

$r_1, r_2 \in \mathrm{Obj}(\mathrm{Rep}_K(A))$, $\quad \hom_{\mathrm{Rep}_K(A)}(r_1, r_2) := \{$

A-mod = cat. de A-módulos.

$\operatorname{Rep}_K(A)$ = cat. cuyos objetos son $r : \underline{A} \longrightarrow \operatorname{End}_{\underline{K}}(V)$ hom. de K-álgebras.

$$\operatorname{Obj}(\operatorname{Rep}_K(A)) = \{ r : A \to \operatorname{End}_K(V) \ / \ r \text{ es hom de } K\text{-álgebras} \}$$

$r_1, r_2 \in \operatorname{Obj}(\operatorname{Rep}_K(A))$, $\quad \hom_{\operatorname{Rep}_K(A)}(r_1, r_2) := \{ f : V_1 \to V_2 \ / \ \text{lineales } r_2(a) f = f\, r_1(a) \ \forall a \in A \}$

$r_1 : A \longrightarrow \operatorname{End}_K(V_1)$; $\quad r_1(a) : V_1 \to V_1$

$r_2 : A \longrightarrow \operatorname{End}_K(V_2)$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "r_1(a)"'] & V_2 \arrow[d, "r_2(a)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{F} : A\text{-mod} \longrightarrow \operatorname{Rep}_K(A)$$
$$\underline{\underline{V}} \longmapsto r : A \to \operatorname{End}_K(V)$$
$$a \longmapsto r(a) : V \to V$$
$$v \longmapsto \underline{\underline{av}}$$

$$\mathcal{G} : \operatorname{Rep}_K(A) \longrightarrow A\text{-mod}.$$
$(r : A \to \operatorname{End}_K(V)) \longrightarrow V$ dotado dotado de estr. de A-mod.
$$a \cdot v := r(a)(v)$$

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = 1_{A\text{-mod}} \ ; \quad \mathcal{F} \circ \mathcal{G} = 1_{\operatorname{Rep}_K(A)}$$

Se comprueba

Si $\underline{r}: A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ representación, V es e.v. cuando $S \leq V$ ↳ subespacio

Se dice que S es r-invariante si $\forall a \in A$, $\boxed{r(a)(S) \subset S}$

Cuando S es r-invariante, $A \times V \longrightarrow V$ acción de A que hace de V un A-módulo.

$a \cdot v := r(a)(v)$

$\forall v \in S \ \forall a \in A \quad a \cdot v = r(a)(v) \in S$

$A \cdot S \subset S$

luego S es un submódulo de V (un A-submódulo).

r fija $\quad \{S \leq V \mid \underline{S \text{ es r-invariante}}\} \cong \{\underline{\text{los } A\text{-submódulos de } V}\}$ $\quad \boxed{A \cdot S \subset S}$,

$A \times V \to V$, si S un A-submódulo de V.

Si V es un A-módulo,
Siendo $r: A \to \mathrm{End}_K(V)$
$r(a)(v) = av$
$\Bigg\}$ $\boxed{r(a)(S) \subset S}$ luego S es r-invariante

Definición. Una repr. $r: A \to \mathrm{End}_K(V)$ se dice irreducible si los únicos subespacios r-invariantes son $0, V$

Esto equivale a que el A-módulo V es simple (es decir, V no tiene más submódulos que 0 y V).

¿Cuando V es un A-módulo semisimple que podemos decir de la representación?

Suma directa de representaciones

$r_1 : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V_1)$, $\quad r_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V_2)$

$a \longmapsto r_1(a) : V_1 \to V_1$

$r = r_1 \oplus r_2 : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V_1 \oplus V_2)$

$a \longmapsto r(a) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$

$v_1 + v_2 \longmapsto r_1(a)(v_1) + r_2(a)(v_2)$

$v_i \in V_i \quad (i=1,2)$

Se comprueba que $r = r_1 + r_2$ es un hom de K-álgebras. Luego es una representación.

Definición. Diremos que una repr. $r : A \to \mathrm{End}_K(V)$ es "completamente reducible" si y solo si $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ (a nivel de espacios vect.)

$r = r_1 \oplus \dots \oplus r_n \qquad r_i : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V_i) \quad (i=1\dots n)$

r_i ES IRREDUCIBLE

Decir que r es completamente reducible equivale a que el A-módulo $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ de los módulos V_i, SIMPLES

r es completamente reducible $\iff V$ es un A-módulo semisimple.

Veremos (con ciertas hipótesis) que toda repr. es completamente reducible. El problema de determ. TODAS las repr. de un álgebra dada se reduce a determinar las irreps = repr. irreducibles.

Foco: Det. de repr. irreducibles de álgebras dadas.

Clasifi. Álg. de Lie simples dim finita
K = cuerpo base álg. cerrado
$\mathrm{char}(K) = 0$

14	52	76	133	248
G_2	F_4	E_6	E_7	E_8

G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, $\boxed{248}$ Excepcionales

X60 Genoma humano

MP3
24 días
+ noche.

Ejemplo.

$A = M_n(\Delta)$ donde Δ = K-alg. de divisón de dim. finita

$A \times M \to M$

$M_n(\Delta) \times \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$

$V = \boxed{\Delta^n \text{ es un } A\text{-módulo}}$

$(a_{ij})\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \quad \left(\mu_i = \sum_k a_{ik}\lambda_k\right)$

$\Delta^n = \left\{\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} ; \lambda_i \in \Delta\right\}$

¿ Es Δ^n A-módulo simple ?

Estrategia para la simplicidad de un A-módulo.

Sea M un A-módulo.

"En un A-módulo simple el submódulo generado por cada elemento $\neq 0$ del mód es el propio módulo".

Si M es simple, $\forall m \in M \setminus \{0\}$, $0 \neq Am \leq M$ (submódulo) $\Big\}$ $Am = M$

Si M es A-módulo y $\forall m \in M \setminus \{0\}$ resulta que $Am = M$ $\Big\} \overset{?}{\Rightarrow}$ M es simple

$0 \neq N \leq M$, sea $n \in N$, $n \neq 0$

$An = M$, $An \subset N$ $\Big\}$ $M \subset N \subseteq M$, $M = N$

$A = M_n(\Delta)$, $V = \Delta^n$, $v \in V \setminus \{0\}$. $v = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$ algún $\lambda_i \neq 0$

$\begin{pmatrix}0 & & \\ 0 & 1 & \\ & 0 & \ddots \; 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \lambda_i\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0 & & \\ & \lambda_i^{-1} & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = c_i$ (un 1 en el lugar i)

$c_i \in Av$ $\exists i \in \{1, \dots, n\}$

$A = M_n(\Delta)$, $V = \Delta^n$. $\underbrace{v \in V \setminus \{0\}}$. $v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ algún $\underbrace{\lambda_i \neq 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \lambda_i^{-1} & \\ & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = c_i \text{ (un 1 en el lugar } i)$$

$\underbrace{c_i \in Av \quad \exists i \in \{1,\dots,n\}}$

$$\begin{array}{c} i \\ \begin{pmatrix} 0 \cdots 1 0 \cdot 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in Av} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \in Av \qquad \begin{pmatrix} & 0 & \\ 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \}k \qquad c_k \in Av \;\; \forall k$$

$c_1, c_2, \dots, c_k, \dots c_n \in Av$

$$\boxed{Av = \Delta^n}$$

Δ^n vectores colum. es un A-módulo simple.

Resulta que $\forall$ A-módulo SIMPLE M, se tiene un isomorf. $M \cong \Delta^n$

Cualq. álg. $\underbrace{\text{de dim finita, simple}}_{\cong M_n(\Delta)}$ tiene (salvo $\cong$) un único módulo simple.

Equivalentemente, Toda irrep. de una k-álg. simple de dim. finita es isomorfa a la representación asociada al módulo Δ^n

$$A = \underbrace{M_n(\Delta)}$$

$$r : A \xrightarrow{(*)} \mathrm{End}_K(\Delta^n)$$

$$(a_{ij}) \longmapsto r(a_{ij}) : \Delta^n \longrightarrow \Delta^n$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \longmapsto (a_{ij}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{M_{n_1}(\Delta_1)} \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q)$$

Δ_i es un K-álg. de división $\dim_K(\Delta_i)$ finita.

módulos simples: $\Delta_1^{n_1}$, $\Delta_2^{n_2}$, $\Delta_q^{n_q}$

Resulta que cada $\Delta_i^{n_i}$ es un A-módulo simple. Fácil

Salvo $\cong$ no hay más A-módulos simples que ellos

¿Qué representaciones irreducibles tiene $A = M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q)$

solo tiene q-módulos simples: $\Delta_1^{n_1}, \ldots, \Delta_q^{n_q}$

Solo hay 'q' irreps

$$A \xrightarrow{r_1} \mathrm{End}_K(\Delta_1^{n_1})$$

$$(a_1, \ldots, a_q) \longmapsto r_1(a_1, \ldots, a_q) : \Delta_1^{n_1} \longrightarrow \Delta_1^{n_1}$$

$a_i \in M_{n_i}(\Delta_i)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_1} \end{pmatrix} \longmapsto a_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n_1} \end{pmatrix}$$

Una K-álg. semisimple de dim finita tiene 1 irrep por cada sumando directo del álgebra.

$$A \xrightarrow{\pi_1} M_{n_1}(\Delta_1) \xrightarrow{\text{repr. }(*)} \mathrm{End}_K(\Delta_1^{n_1})$$

Para A semisimple $\dim(A)$ finita sus repr. irreducibles han quedado descritas: son los $\Delta_i^{n_i}$ uno por cada sumando directo de A.

T. de representaciones de grupos

Sea G un grupo, K un cuerpo, V un e.v. sobre K. $GL(V) = \{T: V \to V \,/\, T \text{ lineal y con } T^{-1}\}$ (grupo para $\circ$)

$\rho: G \longrightarrow GL(V)$ ρ hom. de grupos

Se dice entonces que ρ es una repr. de G en el espacio V = el espacio de la representación

$\dim_K(V)$ = grado de la representación.

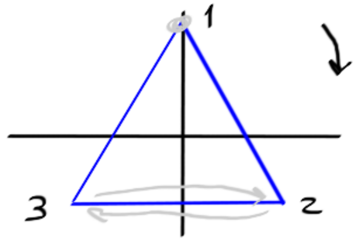
Si $S \leq V$ tal que $\rho(g)(S) \subset S \Rightarrow$ Se dice que S es ρ-invariante

$0, V$ siempre son ρ-invariantes para toda representación.

ρ se dice irrep cuando los únicos subesp. ρ-invariantes son 0 y V.

Ejemplo. $\Delta_3 = \{1, g, g^2, s, sg, sg^2\}$ "Grupo del triángulo"

Δ_3 = grupo con dos generadores s, g sujeto a $\boxed{s^2 = g^3 = 1, \quad sg = g^2 s}$



$g = (1\ 2\ 3)$, $g^2 = (1\ 3\ 2)$, $g^3 = 1$

$s = (2\ 3)$, $s^2 = 1$, $\boxed{sg} = (2\ 3)(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{(1\ 3)}$

$g^2 s = (1\ 3\ 2)(2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)$

Vamos a dar una representación en $V = K^2$, $\quad \rho : \Delta_3 \to GL_2(K) =$ matrices 2x2 inv.

$$GL(V) = \{ T : K^2 \to K^2 \,/\, T \text{ lineales inversibles} \} \cong GL_2(K) = \{ \text{matrices } 2\times 2 \text{ inversibles con coef. en } K \}$$

hom. de grupos

$\rho : \Delta_3 \to GL_2(K)$

$$\boxed{\begin{matrix} g \longmapsto G \\ s \longmapsto S \end{matrix}}$$

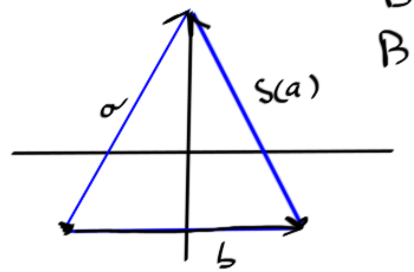
$$\boxed{\begin{matrix} S^2 = Id = G^3 \\ \boxed{SG = G^2 S} \\ S, G \in GL_2(K) \end{matrix}}$$

S = matriz de la simetría respecto al eje Y

G = " " giro de 120°

B = base

$B = \{a, b\}$



Matriz de S

$$a \overset{S}{\longmapsto} a - b$$
$$b \longmapsto -b$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de G

$$a \overset{G}{\longmapsto} b - a$$
$$b \longmapsto -a$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad G^3 = Id$$

$$\boxed{\begin{matrix} \rho(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \rho(s) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

$$SG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad G^2 S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que ρ es inyectiva $\equiv$ ACCIÓN FIEL

Repr. de Δ_3 en K^2 para cualq. K

Definición de G-módulo.

Sea G un grupo, K un cuerpo, V un esp. vect. sobre K

Si $G \times V \longrightarrow V$

$(g, v) \longmapsto gv$ = acción de g sobre v sujeta a:

$g(v+v') = gv + gv'$ $\forall g \in G$, $\forall v, v' \in V$

$g(\lambda v) = \lambda g v$ $\forall g \in G$, $\forall \lambda \in K$, $\forall v \in V$

$g(g' v) = (g g') v$ $\forall g, g' \in G$, $\forall v \in V$

$1 \cdot v = v$ $\forall v \in V$

Se dice que V es un G-módulo

Si V es un G-módulo puedo definir $\rho : G \longrightarrow GL(V)$

$g \longmapsto \rho(g) : V \longrightarrow V$

$v \longmapsto gv$

Se comprueba que ρ es una representación de G.

Si partimos de una repr. $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ puedo dotar a V de estructura de G-módulo.

$G \times V \longrightarrow V$

$(g, v) \longmapsto g \cdot v := \rho(g)(v)$

dota a V de estruct. de G-módulo.

Def. Si G es un grupo.
W, V dos K-espacios, ambos son G-módulos.
Una aplicación lineal $f: W \to V$ se llamará hom de G-módulos cuando

$$f(gw) = g \cdot f(w) \quad \forall g \in G,\ \forall w \in W$$

W subesp. de V
Los dos son G-mód.
$i: W \to V$ es un hom de G-mód.
diremos que W es un G-submód de V

G-mód categoría
Análog. podríamos def. $\mathrm{Rep}_K(G)$ con objetos $\rho: G \to GL(V)$ hom. de grupo.

$\rho_i: G \to GL(V_i)$ $(i=1,2)$

$$\hom_{\mathrm{Rep}_K(G)}(\rho_1, \rho_2) := \{ f: V_1 \to V_2 \,/\, f \text{ lineal y } \rho_2(g) f = f \rho_1(g) \ \forall g \in G \}$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_1(g)"'] & V_2 \arrow[d, "\rho_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Hay un isom de categorías

$$G\text{-mód} \xrightarrow{F} \mathrm{Rep}_K(G) \xrightarrow{\mathcal{G}} G\text{-mód}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G} \circ F = 1_{G\text{-mód}} \\ F \circ \mathcal{G} = 1_{\mathrm{Rep}_K(G)} \end{array}\right\}$$

Una repr. $\rho: G \to GL(V)$ es irrep $\iff$ V es un G-mód simple, es decir, V no tiene más G-submódulos que 0 y V

Suma directa de G-módulos

$G \times V_1 \to V_1$ $\quad$ V_1 es G-mod

$G \times V_2 \to V_2$ $\quad$ V_2 es G-mod.

$$\left.\begin{array}{l} G \times \widetilde{(V_1 \oplus V_2)} \longrightarrow V_1 \oplus V_2 \\ g \cdot (v_1 + v_2) := g v_1 + g v_2 \end{array}\right\} \text{ Dota a } V_1 \oplus V_2 \text{ de estruct. de G-módulos.}$$

Un G-módulo V se dice semisimple si es suma directa de simples. (equivalentemente: para todo S submód de V $V = S \oplus S'$, S' otro submódulo)

Suma directa de representaciones

$\rho_i : G \longrightarrow GL(V_i)$, $i = 1, 2$ $\quad$ podemos definir $\rho \stackrel{def}{=} \rho_1 \oplus \rho_2 : G \longrightarrow GL(V_1 \oplus V_2)$

$$g \longmapsto \rho(g) : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1 \oplus V_2$$
$$v_1 + v_2 \longmapsto \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)$$

Una representación ρ que es $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$, ρ_i irrep; se dice que ρ es completamente reducible

---

El problema de det. todas las repr. de un grupo, se reduce a determinar las irrep.

Módulo libre generado por un conjunto.

R anillo (con unidad), X conjunto.

$$R^{(X)} = \{\varphi : X \to R \;/\; \mathrm{sop}(\varphi) \text{ finito}\} \qquad \mathrm{sop}(\varphi) = \{x \in X \;/\; \varphi(x) \neq 0\}$$

tiene estruct. de R-módulo.

Módulo <u>libre</u> <u>generado</u> por un conjunto. R anillo (con unidad), X conjunto.

$R^{(X)} = \{\varphi : X \to R \,/\, \underline{\mathrm{sop}(\varphi)\ \text{finito}}\}$ $\mathrm{sop}(\varphi) = \{x \in X \,/\, \varphi(x) \neq 0\}$

tiene estruct. de R-módulo.

Suma $\varphi_1 : X \to R$, $\varphi_2 : X \to R$, $\mathrm{sop}(\varphi_i)$ finito $(i=1,2)$

$$\varphi_1 + \varphi_2 : X \longrightarrow R \qquad x \longmapsto \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

$\mathrm{sop}(\varphi_1+\varphi_2)$ finito

$(\varphi_1+\varphi_2)(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi_1(x) \neq 0$ ó $\varphi_2(x) \neq 0$; $\mathrm{sop}(\varphi_1+\varphi_2) \subset \underbrace{\mathrm{sop}(\varphi_1)}_{\text{finito}} \cup \underbrace{\mathrm{sop}(\varphi_2)}_{\text{finito}}$

$(R^{(X)}, +)$ grupo abeliano.

$$R \times R^{(X)} \longrightarrow R^{(X)}$$
$$(r, \varphi) \longmapsto r\varphi : X \to R, \quad x \longmapsto r\varphi(x)$$

$\boxed{\mathrm{Sop}(r\varphi) \subset \mathrm{sop}(\varphi)}$ finit.

$(r\varphi)(x) \neq 0 \Rightarrow \varphi(x) \neq 0$

$\mathrm{Sop}(r\varphi)$ finito

$(R^{(X)}, +, \cdot)$ es un R-módulo