10-XI-20. "Teoría de Representaciones"

Habíamos dem.: R anillo artiniano y simple $R \cong M_n(\Delta)$, $n \geq 1$, Δ anillo de división.

A álgebra sobre un cuerpo K, $\dim_K(A)$ finita, A simple, $A \cong M_n(\Delta)$

Δ K-álg. de división

$\dim_K(\Delta)$ finita

$\leq$ = "submódulo"

Def. Fijado R anillo, un R-mód. M se dice semisimple sii $\forall N \leq M,\ \exists N' \leq M : M = N \oplus N'$

a) Si M es módulo semisimple $\forall N \leq M$, N es semisimple

b) " " " " " $\forall N \leq M$, M/N es semisimple

$M \in R\text{-mod}$ (la cat. de R-mód), $\underline{\forall N \leq M}$, $M/\underline{N} := \{\bar{m} \ / \ m \in M\}$ $\quad \bar{m} = \{m' \ / \ m - m' \in N\}$

$m \sim m' \overset{def}{\iff} m - m' \in N \iff \bar{m} = \bar{m}'$

$p : M \longrightarrow M/N$, $m \longmapsto \bar{m}$ es un epimorfismo y $\forall f : M \longrightarrow X$ hom. de R-módulos / $N \subset \mathrm{Ker}(f)$

$\exists! \ F : M/N \longrightarrow X$ hom. de R-mód ; $F \circ p = f$

(Teoremas de isomorfía)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & M/N \arrow[d, dashed, "F"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Prop. Universal del mód. cociente

R anillo, se dice semisimple si ${}_RR$ es semisimple $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\forall I \trianglelefteq_{izq} R, \ \exists J \trianglelefteq_{izq} R \ / \ R = I \oplus J}$

Def R anillo, R se dice semiprimo si $\underbrace{\forall I \triangleleft R, \ (I^2 = 0 \Rightarrow I = 0)}$

$\left(\text{OJO} \quad I^2 = \{ \sum_i x_i y_i \ / \ x_i, y_i \in I \} \right)$

(equiv. $\forall I \triangleleft R$, $I^2 = 0 \Longrightarrow I = 0$)

Lema. Si R es semisimple $\Rightarrow$ R es semiprimo

Dem.: Sea $I \triangleleft R$ / $\boxed{I^2 = 0}$ Objetivo: $I = 0$

$I \trianglelefteq_{izq} R$ por ser R semisimple $\exists J \trianglelefteq_{izq} R$ / $\boxed{R = I \oplus J}$, $I \cap J = 0$

R semisimple

$IJ \subset IR \subset I$ por ser I ideal de R

$IJ \subset RJ \subset J$ " " J ideal a izq. de R

$\Big\}$ $IJ \subset I \cap J = 0 \Rightarrow \boxed{IJ = 0}$.

$1 \in R$, $\boxed{1 = i + j}$ donde $i \in I$, $j \in J$

$i = i^2 + ji$

$i = i^2 + ij$

$ij = ji$ luego $\boxed{ij = ji = 0}$

$1 = (i+j)^2 = i^2 + j^2 + \cancel{ij} + \cancel{ji} = i^2 + j^2$

$1 = i + j$

$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} i^2 = i \\ j^2 = j \end{cases}} \Rightarrow i^2 = 0 \Rightarrow \boxed{i = 0}$

$1 = i + j$

$1 = j$, $1 \in J \Rightarrow J = R$

$R = I \oplus J \Rightarrow \boxed{I = 0}$. ∎

$\left(\begin{array}{l} i^2 + j^2 = i + j \\ \underbrace{i^2 - i}_{I} = \underbrace{j - j^2}_{J} \end{array} \right.$ luego $i^2 - i \in I \cap J = 0 \Rightarrow i^2 = i \Rightarrow j^2 = j$ $\Big)$

Corolario R semisimple $\forall I \lhd R,\ I \neq 0,\quad Ann_I(I) = 0$

OJO: $Ann_I(I) = \{x \in I \ /\ xI = 0,\ Ix = 0\}$

$$\left(\begin{array}{l} xI = 0 \iff (xy = 0 \ \ \forall y \in I) \\ Ix = 0 \end{array} \right)$$

Dem:

¿ $\underbrace{Ann_I(I)}$ $\lhd R$? Si lo fuera $\left(Ann_I(I)\right)^2 = 0 \xRightarrow{\text{semiprimo}} Ann_I(I) = 0$

$\underbrace{\forall x \in Ann_I(I)},\ \forall y \in R$

$x \in Ann_I(I),\quad y \in Ann_I(I) \qquad xy$

$xI = 0$

¿ $xy \in Ann_I(I)$?

$$\left(\begin{array}{l} \forall x, y \in Ann_I(I) \\ \qquad x + y \in Ann_I(I) \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} (xy)I = x\underbrace{(yI)}_{\substack{\cap \\ I}} \in xI = 0 \\ (xy)I = 0 \\ I(xy) = \underbrace{(Ix)}_{0}y = 0 \cdot y = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (xy)I = I(xy) = 0 \\ xy \in Ann_I(I) \end{array}$$

Lema. Todo anillo artiniano tiene ideales minimales no nulos

Dem. R anillo artiniano $\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}_R R$ módulo artiniano $\iff$ $\begin{cases} I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots \text{ estación.} \\ \text{Toda fam. de ideales por la izq. posee elemento minimal.} \end{cases}$

$\left.\mathcal{F} = \{ I \triangleleft R \ / \ I \neq 0 \} \text{ es una fam. de ideales a izq.}\right\}$ Sea $I_0 \in \mathcal{F}$ minimal. es $I_0 \triangleleft R$ minimal $I_0 \neq 0$

Teorema. Sea R artiniano semisimple, entonces R es la suma directa de familia de ideales ($\neq 0$) minimales

Dem. $\mathbb{F}$ = familia de ideales minimales de R, $\mathbb{F} \neq \emptyset$, $I, J \in \mathbb{F}$ $I \neq J$,

$$\left.\begin{array}{l} I \cap J \subset I \\ I \cap J \subset J \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \neq I \cap J \subset \underset{\text{minimal}}{I} \implies I \cap J = I \\ 0 \neq I \cap J \subset \underset{\text{minimal}}{J} \implies I \cap J = J \end{array}\right\} I = J$$

Luego necesariamente $I \cap J = 0$ $\quad IJ \subset I \cap J = 0$ $\quad \boxed{IJ = 0}$

$\boxed{zI = 0}$; $\boxed{Iz = 0}$

Sea $I \in \mathbb{F}$ $\quad I \cap \Big(\sum_{\substack{J \neq I \\ J \in \mathbb{F}}} J \Big) \ni z$

$$\left.\begin{array}{l} z = j_1 + \dots + j_n, \quad j_q \in J_q \neq I \\ i \in I \quad zi = \underbrace{j_1 i}_{=0} + \dots + \underbrace{j_n i}_{=0} \end{array}\right\} \begin{array}{l} z \in \mathrm{Ann}_I(I) = 0 \\ \boxed{I \cap \sum_{\substack{J \neq I \\ J \in \mathbb{F}}} J = 0} \end{array}$$

Teorema. Sea R artiniano semisimple, entonces R es la suma directa de familia de ideales $(\neq 0)$ minimales

Dem. $\mathbb{F}$ = familia de ideales minimales de R, $\mathbb{F} \neq \emptyset$, $I, J \in \mathbb{F}$, $I \neq J$,

$$\left.\begin{array}{l} I \cap J \subset I \\ I \cap J \subset J \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 \neq I \cap J \subset \underset{\text{minimal}}{I} \Rightarrow I \cap J = I \\ 0 \neq I \cap J \subset \underset{\text{minimal}}{J} \Rightarrow I \cap J = J \end{array}\right\} I = J$$

Luego necesariamente $I \cap J = 0$ $\quad IJ \subset I \cap J = 0$ $\quad \boxed{IJ = 0}$

$\boxed{zI = 0}$; $\boxed{Iz = 0}$

Sea $I \in \mathbb{F}$

$$I \cap \Big(\sum_{\substack{J \neq I \\ J \in \mathbb{F}}} J \Big) \ni z \qquad \left.\begin{array}{l} z = j_1 + \dots + j_n, \quad j_q \in J_q \neq I \\ i \in I \quad zi = \underbrace{j_1 i}_{0} + \dots + \underbrace{j_n i}_{0} \end{array}\right\} z \in Ann_I(I) = 0$$

$$\boxed{I \cap \sum_{\substack{J \neq I \\ J \in \mathbb{F}}} J = 0}$$

$S := \sum_{I \in \mathbb{F}} I$ es directa $\qquad S = \bigoplus_{I \in \mathbb{F}} I \subset R \quad ¿=?$

$S \lhd R$, $\exists H \lhd_{izq} R \;/\; R = S \oplus H$, $\quad SH \subset S \cap H = 0$ suma directa

$SH = 0 \qquad H \subset Rann_R(S) \overset{def}{=} \{ r \in R \,/\, Sr = 0 \} \lhd R$ bilátero

$r', r \in Rann_R(S) \qquad r + r' \in Rann_R(S)$

$r \in Rann_R(S)$, $\forall a \in R$ $\;¿ar \in Rann_R(S)?$ $\rightarrow$ $S(ar) = (Sa)r \subset Sr = 0$

$¿ra \in Rann_R(S)?$ $\rightarrow$ $S(ra) = (\underbrace{Sr}_{0})a = 0$

$\boxed{S := \sum_{I\in \mathbb{F}} I \text{ es directa}}$

$S = \bigoplus_{I\in\mathbb{F}} I \subset R$ ¿$\equiv$?

$\sum_{J\neq I,\ J\in\mathbb{F}} J$

$S \lhd R$, $\exists H \lhd_{izq} R$ / $R = S\oplus H$

$SH \subset S\cap H = 0$ suma directa

$SH = 0$

$H \subset \mathrm{Rann}_R(S) \overset{def}{=} \{r\in R / Sr = 0\} \lhd R$ bilátero

$r', r \in \mathrm{Rann}_R(S)$ $\quad r + r' \in \mathrm{Rann}_R(S)$

$r\in \mathrm{Rann}_R(S)$, $\forall a \in R$ ¿$ar \in \mathrm{Rann}_R(S)$? $\rightarrow$ $S(ar) = (Sa)r \subset Sr = 0$

¿$ra \in \mathrm{Rann}_R(S)$? $\rightarrow$ $S(ra) = (\underbrace{Sr}_{0})a = 0$

$\boxed{S\cap \mathrm{Rann}_R(S) = 0}$ ya que: $(S\cap \mathrm{Rann}_R(S))^2 = (S\cap \mathrm{Rann}_R(S))(S\cap\mathrm{Rann}_R(S))$

$\subset S\,\mathrm{Rann}_R(S) = 0$

$[R = S\oplus H \subset S\oplus \mathrm{Rann}_R(S) \subset R]$

$\downarrow$

directa ya que $S\cap \mathrm{Rann}_R(S) = 0$

$R = S\oplus \mathrm{Rann}_R(S)$

Luego $\mathrm{Rann}_R(S)$ es anillo semisimple artiniano.

$\Downarrow$

$\mathrm{Rann}_R(S)$ tiene un ideal minimal. L

Pero $L \lhd R$ por ser $\mathrm{Rann}_R(S)$ sumando de R

$I' \lhd I \lhd R \not\Rightarrow I' \lhd R$

$\left.\begin{array}{l} I' \lhd I \lhd R \\ R = I \oplus ? \end{array}\right\} \Rightarrow I' \lhd R$

Conclusión

$L \in \mathbb{F}$, $L\subset S$, $L \subset \mathrm{Rann}_R(S)$

$L = 0$!!! contradic

$\Big[R = S \oplus H \subset S \oplus \mathrm{Rann}_R(S) \subset R \Big]$ $\quad \subset \supset \mathrm{Rann}_R(S) = 0$

$\downarrow$

directa ya que $S \cap \mathrm{Rann}_R(S) = 0$

$$\boxed{R = S \oplus \underbrace{\mathrm{Rann}_R(S)}}$$

Luego $\mathrm{Rann}_R(S)$ es anillo semisimple artiniano.

$\Downarrow$

$\mathrm{Rann}_R(S)$ tiene un ideal minimal. L

Pero $L \trianglelefteq R$ por ser $\mathrm{Rann}_R(S)$ sumando de R

$I' \trianglelefteq I \trianglelefteq R \not\Rightarrow I' \trianglelefteq R$

$\left. \begin{array}{l} I' \trianglelefteq I \trianglelefteq R \\ R = I \oplus\, ? \end{array} \right\} \Rightarrow I' \trianglelefteq R$

Conclusión $L \in \mathcal{F}$, $L \subset S$, $L \subset \mathrm{Rann}_R(S)$

$\underbrace{L = 0 \,!!!}$ contradicción

Si $\underbrace{\mathrm{Rann}_R(S) \neq 0} \Rightarrow \underbrace{L = 0}$ contradicción.

Concluimos $\mathrm{Rann}_R(S) = 0 \Longrightarrow R = S = \bigoplus_{I \in \mathcal{F}} I$, ∎

Nota. Cada sumando I es ideal minimal $\Rightarrow I$ como anillo, $\begin{cases} I \text{ artiniano} \\ I \text{ simple.} \end{cases}$

$R = I \oplus \Big(\bigoplus_{\substack{J \neq I \\ J \in \mathcal{F}}} J \Big)$ si $\left. \begin{array}{l} \boxed{I' \trianglelefteq I} \trianglelefteq R \\ I \text{ sumando de } R \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I' \trianglelefteq R \\ I' \subset I \text{ minimal} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{I' = 0} \\ \boxed{I' = I} \end{cases}$

I es un anillo simple, artiniano, $I \cong M_n(\Delta)$

$$R = \bigoplus_{I \in \mathbb{F}} I \quad , \quad \text{cada } I \cong M_n(\Delta).$$

Si $R = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$, $\boxed{|\mathcal{A}| \text{ infinito.}}$

$$R = \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha \supsetneq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A} - \{\alpha_1\}} I_\alpha \supsetneq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A} - \{\alpha_1, \alpha_2\}} I_\alpha \supsetneq \cdots \supsetneq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}} I_\alpha \supsetneq \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A} - \{\alpha_1, \dots, \alpha_q, \alpha_{q+1}\}} I_\alpha \supsetneq \cdots$$

Se contradice que R sea artiniano

<u>Conclusión</u>. R semisimple artiniano $\Longrightarrow R \cong I_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus I_{\alpha_q}$ ($\oplus$ finita)

I_{α_i} simple artiniano

$I_{\alpha_i} \cong M_{n_i}(\Delta_i)$ $\quad n_i \geq 1$, Δ_i anillo de división

$$\boxed{R \cong M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \cdots \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q)}$$

Δ_i anillo de división

$n_i \geq 1$.

<u>Recíprocamente</u>. cada $\bigoplus_{i=1}^{q} M_{n_i}(\Delta_i)$ es un anillo semisimple artiniano.

$\boxed{17:40}$

R Anillo art. simple	$R \cong M_n(\Delta)$ $\quad$ Δ anillo de división.
A una K-álgebra simple $\dim_K(A)$ finita K cuerpo	$A \cong M_n(\Delta)$ $\quad$ Δ K-álg. de división $\dim_K(\Delta)$ finita $\dim_K(A) = n^2 \dim_K(\Delta)$ "Mutatis mutandi"
R Anillo artin. semisimple	$R \cong M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q)$. $\quad$ Δ_j un anillo de división.
A K-álg. semisimple $\dim_K(A)$ finita K cuerpo	$A \cong M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q)$, $\quad$ Δ_j un K-álg. de división y $\dim_K(\Delta_j)$ finita $\dim(A) = \sum_{i=1}^{q} n_i^2 \dim_K(\Delta_i)$ "Mutatis mutandi".

Recordando: K alg. cerrado, si Δ una K-álg. de división $\dim_K(\Delta)$ finita $\Rightarrow$ $\Delta \cong K$

$\rightarrow K = \mathbb{C}$, Δ una $\mathbb{C}$-álg. de división y $\dim_{\mathbb{C}}(\Delta)$ finita $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta \cong \mathbb{C}}$

Una $\mathbb{C}$-álg. de división Δ tal que $\Delta \not\cong \mathbb{C}$, $\Delta = \mathbb{C}[x]$ NO ES DE DIVISIÓN
DOM. DE INTEGRIDAD

$\dim(\mathbb{C}[x]) = \aleph_0$

$\{1, x, x^2, \dots\}$ base

$\Delta = \mathbb{C}(x) = \left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \ / \ \begin{array}{l} q(x) \neq 0 \\ p(x) \in \mathbb{C}[x] \end{array} \right\}$

cuerpo de las funciones racionales en la indet. x.

$\Delta \not\cong \mathbb{C}$

$\mathbb{C}[x] \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{C}(x)$

$p(x) \longrightarrow \frac{p(x)}{1}$

$\dim(\mathbb{C}(x)) \geq \underset{\aleph_0}{\underset{\shortparallel}{\dim \mathbb{C}[x]}}$

$k = \mathbb{R}$, Δ una $\mathbb{R}$-álg. de división $\dim_{\mathbb{R}}(\Delta)$ finita

Frobenius: $\Delta \cong \mathbb{R}$
$\Delta \cong \mathbb{C}$
$\Delta \cong \mathbb{H}$

Problema. Salvo isomorf. ¿cuántas álgebras complejas semisimples de $\dim_{\mathbb{C}} \leq 4$ hay?

dim = 1 .... $\mathbb{C}$

dim = 2 .... $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$

dim = 3 .... $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^3$

$$\underset{\downarrow \atop 2}{A} \cong \underset{\downarrow \atop n_1^2}{M_{n_1}(\mathbb{C})} \oplus \underset{\downarrow \atop n_2^2}{M_{n_2}(\mathbb{C})} \oplus \cdots \oplus \underset{\downarrow \atop n_q^2}{M_{n_q}(\mathbb{C})}$$

$\boxed{2 = n_1^2 + \cdots + n_q^2}$

$2 = 1^2 + 1^2$ $n_1 = 1, n_2 = 1$

$A \cong M_1(\mathbb{C}) \oplus M_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$\dim = 4$.

$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$

$A = \underbrace{M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus M_{n_q}(\mathbb{C})}$

$\downarrow$

4

$4 = 1^2+1^2+1^2+1^2$

$4 = 2^2 \qquad n_1 = 2$

$A = M_2(\mathbb{C})$

Teoremilla.

Si A es $\mathbb{C}$-alg. $\dim_{\mathbb{C}}(A) \leq 4$, semisimple

$A \cong \mathbb{C},\ \mathbb{C}^2,\ \mathbb{C}^3,\ \mathbb{C}^4,\ M_2(\mathbb{C})$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

Problema. A es una $\mathbb{R}$-álgebra, $\dim_{\mathbb{R}}(A) \leq 4$, A semisimple ¿A quienes puede ser $\cong A$?

$M_{n_1}(\Delta_1)\oplus\cdots\oplus M_{n_q}(\Delta_q)$

cada $\Delta_j \cong \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

$\dim(A) = 1$, $\quad \mathbb{R}$

$\dim(A) = 2$, $\quad \mathbb{R}^2, \mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ como e.v. solo

$(1,0)(0,1) = (0,0)$

$\dim(A) = 3$, $\quad \mathbb{R}^3, \mathbb{C}\oplus\mathbb{R}$

$\dim(A) = 4$, $\quad \mathbb{R}^4, \mathbb{C}^2, \mathbb{H}, \mathbb{R}^2\oplus\mathbb{C}, M_2(\mathbb{R})$

Teorema (Wedderburn - Artin) R artiniano simple $R \cong M_n(\Delta)$ Δ anillo de división.

Unicidad: $M_n(\Delta) \cong M_{n'}(\Delta') \Longrightarrow$ $n = n'$, $\Delta \cong \Delta'$

El n y el Δ son únicos (el Δ salvo $\cong$, el n es único).

Teorema. R artiniano semisimple

$$R \cong M_{n_1}(\Delta_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_q}(\Delta_q) \quad q\text{-sumandos}$$

$$R \cong M_{n_1'}(\Delta_1') \oplus \cdots \oplus M_{n_{q'}'}(\Delta_{q'}') \quad q'\text{-sumandos}$$

<u>Salvo el orden</u> $q = q'$, $n_i = n_i'$, $\Delta_i \cong \Delta_i'$

Hablamos que dado una K-álgebra A, con <u>K cuerpo</u>, V un esp. vect. sobre K una representación de A en V

$r : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$. Imaginemos que ocurre $\exists S \leq V$ (subespacio) que cumple $\boxed{r(a)(S) \subset S \ \forall a \in A}$

hom. de K-álgebras

$r(a) : V \longrightarrow V$

Cuando esto ocurre decimos que S es <u>r-invariante</u>.

$0 \leq V$, $r(a)(0) = 0 \ \forall a$ $\quad$ 0 siempre es r-invariante

$V \leq V$, $r(a)(V) \subset V \ \forall a$ $\quad$ V " " r-invariante

Una representación de A en el espacio V; $r: A \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ tal que los únicos subespacios r-invariantes son $0, V$ se dirá representación IRREDUCIBLE (irrep)

$r(a): V \longrightarrow V$

$$A \times V \longrightarrow V$$
$$a \cdot v := r(a)(v)$$

V es A-módulo

$$\left(r \text{ es irrep} \right) \Leftrightarrow \left(V \text{ es un } A\text{-módulo simple} \right)$$