T. de repres. 06/XI/20

Hay una versión "Mutatis Mutandis" del lema de Brauer, para anillos:

Lema de Brauer (versión anillos). Sea R un anillo (con $1 \in R$) y $K \trianglelefteq_{izq} R$ minimal, $K^2 \neq 0$.
Entonces $K = Re$ donde $e^2 = e$, y además eRe es un anillo de división (todo $x \neq 0$ tiene inverso)

Recordemos que un álgebra (resp. anillo) A se dice simple si $A^2 \neq 0$, $\forall I \triangleleft A$, $I = 0$ ó $I = A$

Si $1 \in A$, automáticamente se cumple $A^2 \neq 0$.

Para A álg. con unidad (o anillo) A se dice simple $\overset{def}{\iff}$ $\forall I \triangleleft A$, $I = 0$ ó $I = A$

R anillo, M un R-módulo se dice artiniano si toda sucesión $X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$ de submódulos es estacionaria ($\exists k$: $X_k = X_{k+1} = \cdots$). Esto equivale a que toda fam. de submódulos tiene un elemento minimal.

Si R anillo, ${}_R R$ = R visto como módulo sobre sí mismo. En general, los submódulos de ${}_R R$ son los ideales a izq. de R
R_R " " " " der. de R

R se dice artiniano sii ${}_R R$ es artiniano.

R será entonces artiniano si y solo si toda sucesión de ideales por la izq. es estacionaria, equivalentemente, toda fam. de ideales por la izq. de R tiene un elemento minimal.

Objetivo: describir los anillos artinianos simples.

R anillo ($1 \in R$) $\boxed{\text{simple}}$ artiniano. Tomemos $K \underset{izq}{\triangleleft} R$ minimal. Por Lema de Brauer $\boxed{K = Re}$, $e^2 = e$ tal que

$\Delta := eRe$ es anillo de división. (Falta chequear que $K^2 \neq 0$, completese esto !!)

(Problema. $K \underset{izq}{\triangleleft} R$, K minimal $\underset{?}{\Longrightarrow} K^2 \neq 0$)

$K = Re$

$$\begin{array}{ccccc} K & & \Delta & & K \\ \| & & \| & & \\ Re & \times & eRe & \longrightarrow & Re \\ re & \cdot & er'e & := & (rer')e \end{array}$$

Esta operación dota a K de estructura de Δ-esp. vect. (a derecha),

$\mathrm{End}_\Delta(K) = \{ T : K \to K \ / \ T \text{ es lineal} \}$,

$$R \xrightarrow{L} \boxed{\mathrm{End}_\Delta(K)}$$

$x \longmapsto L_x : K \longrightarrow K$

$1 \longmapsto L_1 \qquad re \longmapsto xre \in K$

$L_x \in \mathrm{End}_\Delta(K)$

ⓐ $L_x(z + z') = x(z + z') = xz + xz' = L_x(z) + L_x(z')$

ⓑ $L_x(z\lambda) \underset{?}{=} L_x(z)\lambda$ cuando $z \in K$, $\lambda \in \Delta$; $L_x(z\lambda) = x(z\lambda) = (xz)\lambda = L_x(z)\lambda$

$\forall x, x' \in R$

ⓒ $L_{xx'} = L_x \circ L_{x'}$ $\qquad L_{xx'}(z) = (xx')z = x(x'z) = L_x(L_{x'}(z)) =$
$= (L_x \circ L_{x'})(z)$

ⓓ $L_1 = 1_{\mathrm{End}_\Delta(K)}$

L es un hom. de anillos $\quad L : R \longrightarrow \overbrace{\mathrm{End}_\Delta(K)}$

$1 \longmapsto 1_{\mathrm{End}_\Delta(K)}$

$\boxed{L \neq 0}$, $\quad \mathrm{Ker}(L) \triangleleft L \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\mathrm{Ker}(L) = R} \\ \mathrm{Ker}(L) = 0 \end{cases}$

Conclusión: L es monomorf. $\rightarrow$ Problema de la lista

L es epimorf. NO EVIDENTE

Por ahora. $\quad$ R artiniano simple $(1\in R)$ $\quad$ $K = Re$

$\boxed{L : R \cong \mathrm{End}_\Delta(K)}$ donde K es un ideal por la izq. minimal $\quad$ $\Delta = eRe$.

Vamos a ver que $\dim_\Delta(K)$ es finita.

$T : K \longrightarrow K$ lineal

$\mathrm{rang}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T))$.

$I = \{ T \in \mathrm{End}_\Delta(K) \ / \ \mathrm{rang}(T) \text{ es finito} \}$

$I \neq 0$, (existe $T \in I$, $T \neq 0$).

$\{k_i\}_{i\in I}$ base de K como e.v. $\quad$ fijo $\boxed{k_{i_0}}$

$T : K \longrightarrow K$ $\quad$ $\mathrm{rang}(T) = 1$

$\forall i \in I \quad k_i \longmapsto k_{i_0}$

$T\left(\sum_i \lambda_i k_i\right) = \sum_i \lambda_i k_{i_0}$

$\boxed{I \lhd \mathrm{End}_\Delta(K)}$

$T, S \in \mathrm{End}_\Delta(K)$, si $\underbrace{\mathrm{rang}(T) \text{ ó } \mathrm{rang}(S) \text{ finito}}$

$\mathrm{rang}(T \circ S)$ es finito

$\underbrace{I \cdot \mathrm{End}_\Delta(K) \subset I}$, $\quad$ $\underbrace{\mathrm{End}_\Delta(K)\, I \subset I}$

$L : \underset{\text{simple}}{R} \cong \underset{\underline{\text{simple}}}{\mathrm{End}_\Delta(K)} \rhd \underline{I \neq 0}$

$\Downarrow$

$\boxed{I = \mathrm{End}_\Delta(K)}$

OJO: en general si $f : A \cong B$ es isom. de anillos.

$\forall J \lhd A$, $f(J) \lhd B$ y recíproc. $\quad$ Sup. A es simple

$\boxed{J \lhd B \text{ cualq.}}$ $\quad$ $f^{-1}(J) \lhd A \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(J) = 0 \Rightarrow \boxed{J = 0} \\ f^{-1}(J) = A \Rightarrow \boxed{J = B} \end{cases}$

$L: \underset{\text{simple}}{R} \cong \underset{\text{simple}}{End_\Delta(K)} \triangleright I \neq 0$

$\Downarrow$

$\boxed{I = End_\Delta(K)}$

$I = \{T \in End_\Delta(K) \,/\, rang(T) \text{ finito}\}$

Toda $T \in End_\Delta(K)$, $T \in I \Rightarrow rang(T)$ finito $\Rightarrow$

$1_K \in End_\Delta(K)$

$rang(1_K)$ finita

$dim(Im(1_K))$ finita

$dim_\Delta(K)$ finita.

$L: R \cong End_\Delta(K)$,

$dim_\Delta(K)$ finita.

Fijo una base B de K

isom. de anillos.

$End_\Delta(K) \cong M_n(\Delta)$

$T \longmapsto M_B(T)$

$\boxed{R \cong M_n(\Delta)}$

$R \ni 1$, artiniano, simple

son ($\cong$ a) matrices $n \times n$ con coef. en un anillo de división Δ.

Wedderburn – Artin.

Teorema de Wedderburn-Artin

Para un anillo unitario R son equivalentes:

(1) R es simple, artiniano.

(2) $R \cong M_n(\Delta)$ donde Δ es un anillo de división.

(1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (1) más sencillo.

$\boxed{M_n(\Delta) \quad \text{simple artiniano}}$

Versión del T. Wedderburn-Artin para álgebras.

Si A es una K-álgebra, (K, cuerpo), $\dim_K(A)$ finita, A es simple.

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1}$$

$$\dim(I_1) \geq \dim(I_2) \geq \dots$$

$\boxed{\exists n / \quad I_n = I_{n+1} = \dots}$ por culpa de las dimen.

Entonces: $A \cong M_n(\Delta)$ donde Δ es un K-álgebra de división de dim. finita

$\boxed{\dim(A) = \dim(M_n(\Delta)) = n^2 \cdot \dim_K(\Delta)} \Rightarrow \boxed{\dim_K(\Delta) \text{ finita}}$

finita   finita

Recíprocamente, si Δ es un alg. de división sobre K, $\dim_K(\Delta)$ finita. $M_n(\Delta)$ es una K-alg simple de dim. finita.

Ejemplo.
$K = \mathbb{R}$.

i) $\Delta = \underline{\mathbb{R}}$ es una $\mathbb{R}$-álg. de división. $n \geq 1$

$M_n(\mathbb{R})$ es una $\mathbb{R}$-álg. simple

$\dim(M_n(\mathbb{R})) = n^2$

---

ii) $\Delta = \underline{\mathbb{C}}$ es una $\mathbb{R}$-álg de división. $n \geq 1$.

$M_n(\mathbb{C})$ es una $\mathbb{R}$-álg. simple

$\dim(M_n(\mathbb{C})) = 2n^2$

---

iii) $\Delta = \underline{\mathbb{H}}$ es una $\mathbb{R}$-álg. de <u>división</u>. $n \geq 1$

$M_n(\mathbb{H})$ es un $\mathbb{R}$-álg simple

$\dim(M_n(\mathbb{H})) = 4n^2 = (2n)^2$

¿Cuáles son las $\mathbb{R}$-álg de división de dim. finita?

<u>Frobenius</u>. Toda $\mathbb{R}$-álg. de división y de dim. finita es $\cong$ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \mathbb{C} & \mathbb{H} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 4 \end{array}$$

<u>Corolario</u>. Toda $\mathbb{R}$-álg. simple de dim. finita es $\cong$ a

(1) $M_n(\mathbb{R})$; (2) $M_n(\mathbb{C})$; (3) $M_n(\mathbb{H})$

$M_n(\mathbb{R}) \not\cong M_{n'}(\mathbb{C}) \not\cong M_{n''}(\mathbb{H})$. $M_n(\mathbb{R}) \not\cong M_k(\mathbb{H})$

Justif. que $\mathbb{H}$ es de división

$q := \lambda_0 1 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$

$\bar{q} = \lambda_0 1 - \lambda_1 i - \lambda_2 j - \lambda_3 k$

$q\bar{q} = \|q\|^2$

$\boxed{q \neq 0.}$ $\boxed{q \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} = 1}$

$M_n(\mathbb{R}) \cong M_m(\mathbb{R}) \Rightarrow n = m$

$M_n(\mathbb{C}) \cong M_m(\mathbb{C}) \Rightarrow n = m$

$M_n(\mathbb{H}) \cong M_m(\mathbb{H}) \Rightarrow n = m$

Si $\Delta, \Delta' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$

$$M_n(\Delta) \cong M_{n'}(\Delta') \Longrightarrow n = n', \quad \Delta = \Delta'$$

Observación. El problema de determ. salvo $\cong$ las K-álg. simples de dim. finita, la teoría de Wedderburn-Artin reduce el problema al de determinar las K-álg. de división de dim. finita

$A \cong M_n(\Delta)$

$\dim_K(\Delta)$ finita

Δ de división

$K = \mathbb{R}$, Frobenius ; $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

$K = \mathbb{C}$, ?

En general si K es alg. cerrado.

Sup. A un K-alg. simple, $\dim_K(A)$ finita, K = alg. cerrado

T. de Wedderburn - Artin $\Rightarrow$ $A \cong M_n(\Delta)$, Δ es un K-alg. de división, $\dim_K(\Delta)$ finita $\}$?

---

1) Polinomio minimal. Sea $\mathcal{U}$ una K-alg. K cuerpo cualquiera, $\boxed{\dim_K(\mathcal{U}) \text{ finita}}$

$a \in \mathcal{U}$ arbitrario, $1 \in \mathcal{U}$, $\underbrace{\{1, a, a^2, a^3, \ldots, a^n, a^{n+1}, \ldots\}}$ $\subset \mathcal{U}$

"Existe n tal que $\{1, a, a^2, \ldots, a^n\}$ es L. dependiente"

$\boxed{\text{" } \forall n, \ \{1, a, a^2, \ldots, a^n\} \text{ es L. Indep "}}$ $\underset{\text{Claro}}{\Rightarrow}$ $\dim_K(\mathcal{U})$ finita.

$\exists$ $\lambda_0 1 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \cdots + \lambda_n a^n = 0$, no todos los $\lambda_i = 0$.

Tomemos una comb. lineal $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i = 0$ con n mínimo. Entonces $\boxed{\lambda_n \neq 0}$; $\lambda_n a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i = 0$ $\lambda_n \neq 0$

$(a^0 = 1)$

$$\underbrace{\boxed{1 a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} a^i = 0}}_{m_a}$$

polinomio minimal = pol. MONICO que tiene a a es raíz de él y es de grado mínimo.

m_a = polinomio minimal de a. λ = indeterminada

$m_a = m_a(\lambda)$, $m_a(a) = 0$

$\to$ $\exists$ $\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_n a^n = 0$, no todos los $\lambda_i = 0$.

Tomemos una comb. lineal $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i a^i = 0$ con n mínimo. Entonces $\boxed{\lambda_n \neq 0}$; $\lambda_n a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i = 0$ $\quad \lambda_n \neq 0$

$(a^0 = 1)$

$$\underbrace{\boxed{1 a^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} a^i = 0}}_{m_a}$$

polinomio minimal = pol. MONICO que tiene a a en raíz de él y e de grado mínimo.

m_a = polinomio minimal de a. $\quad \lambda$ = indeterminada

$m_a = m_a(\lambda)$, $\quad m_a(a) = 0$

$m_a(\lambda) \in K[\lambda]$, $\quad K$ = alg. cerrado.

$m_a(\lambda) = m_1(\lambda) m_2(\lambda) \cdots m_q(\lambda)$ donde $\boxed{m_i(\lambda) = \overset{0}{\underset{\neq}{}} a_i \lambda + b_i}$ $\quad \boxed{a_i, b_i \in K}$

de primer grado.

$$\boxed{0 = m_a(a) = \boxed{m_1(a) m_2(a) \cdots m_q(a)}}$$ en $\mathcal{U}$

$m_1(a) m_2(a) \cdots m_q(a) = 0$

Si $\underline{\mathcal{U}}$ fuera un K-álg. de división

$\exists j \,/\, m_j(a) = 0 \qquad a_j \cdot a + b_j = 0$

$$\boxed{a = -b_j/a_j \in K}$$

$K \subset \mathcal{U}$ $\qquad K = \mathcal{U}$

$\lambda = \lambda \cdot 1 \in \mathcal{U}$

$\left.\begin{array}{l} K \text{ alg. cerrado} \\ \text{Si } \mathcal{U} \text{ es de dim finita} \\ \mathcal{U} \text{ de división} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{U} \cong K \cdot 1$

Salvo $\cong$ la única K-álg. de división y dim finita es K
K alg. cerrado!

→ Sobre un K alg. cerrado, la única K-alg. de división de dim. finita es K

Pregunta. $\left.\begin{array}{l}\boxed{K \text{ alg. cerrado}} \\ A \text{ un } K\text{-alg. de dim. finita} \\ \text{simple}\end{array}\right\} \Rightarrow$ $A \cong M_n(\Delta)$ $\quad$ Δ es de división y $\dim_K(\Delta)$ finita, $\Delta \cong K$

$\boxed{A \cong M_n(K)}$

"No nos salimos del cuerpo base"

$K = \mathbb{R}$, $\quad \Delta = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

$K = \mathbb{Q}$,

Representaciones de $\boxed{A = M_n(\Delta)}$, $\quad \Delta$ división, $\dim(\Delta)$ finita. $\quad K$: cuerpo base

$\left(r : A \to \mathrm{End}_K(V)\right)$ hom. de K-álgebras $\Big\}$ equivalentemente

$\left.\begin{array}{l} A \times V \longrightarrow V \\ (a, v) \longmapsto a\cdot v := r(a)(v) \end{array}\right\}$ ent. V es un A-módulo.

$r(a) : V \to V$

$M_n(\Delta) \times \Delta^n \to \Delta^n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_i a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_i a_{ni} x_i \end{pmatrix}$$

$a_{ij} \in \Delta$

A

Δ^n es $M_n(\Delta)$-módulo.

Δ^n es un A-módulo.

Δ^n es simple

$r : M_n(\Delta) \to \mathrm{End}_K(\Delta^n)$

monomorf.

A simple dim. finita | A semi-simple dim. finita }

Definición. Fijemos un anillo R (siempre $1 \in R$), sea M un R-módulo, se dice que M es semisimple si $\forall N \leq M$, $\exists N' \leq M$; $\boxed{M = N \oplus N'}$

$\downarrow$ submódulo

Si $R = K$ cuerpo. M un R-módulo es un e.v. $N \leq M$, $\exists N' \leq M$; $M = N \oplus N'$

Propiedades.

1) Si M es R-módulo semisimple $N \leq M$ N arbitrario $\overset{?}{\Rightarrow}$ N es semisimple.

Dem, ¿N es semisimple? ¿$X \leq N$ arbitrario, $\exists X' \leq N$ / $N = X \oplus X'$?

Tomemos $X \leq N$ arbitrario ; $X \leq M$ Si, luego $\boxed{M = X \oplus Y}$ por ser M semisimple.

$N = X \oplus (Y \cap N)$

Sea $n \in N$ arbitrario, $n \in M$, $n = x + y$ donde $x \in X$, $y \in Y$, ¿$y \in Y \cap N$?

$\underbrace{n - x}_{N} = y \in N \cap Y$

$N = X \oplus (Y \cap N)$

Semisimplicidad es hereditaria por submódulos.

2) Sea M semisimple, $N \leq M$, entonces M/N es semisimple.

<u>Dem.</u>:

Supongamos A, B dos R-módulos isomorfos

$$\left.\begin{array}{l} A \overset{f}{\cong} B \\ A \text{ semisimple} \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} B \text{ es semisimple}$$

$X \leq B$ cualq.

$f^{-1}(X) \leq A = f^{-1}(B)$

$A = f^{-1}(X) \oplus Z, \quad Z \leq A$

$\boxed{B} = f(A) = \underline{\underline{X}} \oplus \underline{\underline{f(Z)}} \quad f(Z) \leq B$

$N \leq M, \quad M = N \oplus N', \quad \underline{\underline{N' \leq M}}$

$M/N \cong N'$ es semisimple

<u>1er Teorema de isomorf.</u>

M/N es semisimple.

$$\boxed{\text{Si } M = N \oplus N' \overset{?}{\Longrightarrow} M/N \cong N'}$$

$$\boxed{\text{Martes: } 16{:}00}$$

$M \xrightarrow{p} N'$

$n + n' \longmapsto n'$

$n + 0 \longmapsto 0$

$\mathrm{Ker}(p) = N$

$\mathrm{Im}(p) = N'$

$p =$ proy. en el sumando N'

$M/\mathrm{Ker}(p) \cong \mathrm{Im}(p)$

$M/N \cong N'$