T. de repr. 3-XI-20.

$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow$ lista de problemas

Condiciones de cadena

Si V es un e.vect. de dim(V) finita:

(a) $W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_n \subset W_{n+1} \subset \cdots$ todos $W_i \leq V$ subespacios

$\exists k ;\ W_k = W_{k+1} = W_{k+2} = \cdots\cdots$

$\dim(W_1) \leq \dim(W_2) \leq \cdots \leq \dim(W_k) = \dim(W_{k+1}) = \cdots\cdots$

(b) $W_1 \supset W_2 \supset \cdots\cdots \supset W_n \supset W_{n+1} \supset \cdots\cdots$ todos los $W_i \leq V$

$\exists k /\ W_k = W_{k+1} = \cdots$

(a) se llama condición de cadena ascendente
(b) " " " " " descendente

Definición. Fijemos R anillo conmut. ($1 \in R$). Sea M un R-módulo.
Diremos que M satisface la CCA (= cond. de cadena ascendente) si toda sucesión

$$N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k \subset N_{k+1} \subset \cdots \qquad N_i \leq M \ \forall i$$

es estacionaria, es decir, $\exists q$: $N_q = N_{q+1} = N_{q+2} = \cdots$
En honor a E. NOETHER un M que satisface la CCA se llama NOETHERIANO.

Diremos que M satisface la CCD (= cond. de cadena descendente) si toda sucesión

$$N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k \supset N_{k+1} \supset \cdots \qquad N_i \leq M \ \forall i.$$

es estacionaria, es decir, $\exists q$: $N_q = N_{q+1} = \cdots$
En honor a ARTIN, un M que satisface CCD se llama artiniano.

Ejemplos: $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$ los $\mathbb{Z}$-submódulos de $\mathbb{Z}$ son precisamente los ideales de $\mathbb{Z}$.

$$(2) \underset{\neq}{\supset} (2^2) \underset{\neq}{\supset} (2^3) \supset \cdots \supset (2^n) \underset{\neq}{\supset} (2^{n+1}) \underset{\neq}{\supset}$$

no estacionaria
$\mathbb{Z}$ no es $\mathbb{Z}$-mód artiniano.

¿ Será $\mathbb{Z}$ módulo noetheriano ?

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots$$

$$(k_1) \subset (k_2) \subset \cdots (k_n) \subset (k_{n+1}) \subset \cdots$$

$$(k_i) \subset (k_{i+1})$$

$$k_i \in (k_{i+1}) \iff k_{i+1} \mid k_i$$

$k_2 \mid k_1$

$k_3 \mid k_2$

$\vdots$

$k_{i+1} \mid k_i$

$\vdots$

Vamos a ver que la sucesión es estacionaria.

Dem.:

$$\boxed{\begin{array}{l} I := \bigcup_{n\geq 1} I_n \\ I = (z) \end{array}}$$

¿ Es ideal de $\mathbb{Z}$?

$\forall a, b \in I, \quad a+b \in I$

$\forall a \in I, n \in \mathbb{Z} \quad na \in I$

$\left.\begin{array}{l} I + I \subset I \\ \mathbb{Z} I \subset I \end{array}\right\} \to$ ok

$a \in I, \quad a \in I_{n_1}$

$b \in I, \quad b \in I_{n_2}$

$n_3 = \max(n_1, n_2)$

$I_{n_1}, I_{n_2} \subset I_{n_3}$

$a, b \in I_{n_3}$

$a+b \in I_{n_3} \subset I$

$a+b \in I$

$\Rightarrow z \in I_k \quad (\exists k \geq 1)$

$(z) \subset I_k$

$I \subset I_k \subset I_{k+1}$

$$I_{k+p} = I \quad \forall p \geq 0$$

Se pueden buscar ejemplos que cumplan todas las posibilidades.

Definición. Un anillo R se dice noetheriano si ${}_RR$ es R-mód. noetheriano
" " " " artiniano si ${}_RR$ $\to$ es R-mód artiniano

${}_RR = R$ visto como R-módulo a izq.

Ejemplos.
Sea k un cuerpo y A con $1 \in A$, una k-álg. de dim. finita $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{como anillo } A \text{ es artiniano} \\ \text{" " } A \text{ es noetheriano.} \end{cases}$

Dem. ${}_AA$ los A-submódulos de ${}_AA$ son los ideales a izq.

$I_1 \subset I_2 \subset \dots \quad I_n \subset I_{n+1} \subset \dots \qquad I_i \trianglelefteq_{izq} A \quad \forall i$

los I_k son subespacios vectoriales. $\dim(I_k) \leq \dim A, \ \forall k$ luego la sucesión de ideales es estacionaria.

Lema de Brauer. Sea A una F-álgebra, $1 \in A$ (donde F es el cuerpo base).
Sea $K \trianglelefteq_{izq} A$ minimal, $K^2 \neq 0$. Entonces: $\exists e \in A$: $e^2 = e$, $K = Ae$, eAe es álg. de división

(se dice que B es un álg. de división si $\forall b \in B, b \neq 0, \exists b' \in B$: $bb' = b'b = 1$)
$(eAe = \{eae : a \in A\}$
$(K^2 = \{xy : x, y \in K\})$
$(Ae = \{ae : a \in A\})$

$$\left.\begin{array}{l} eae + ea'e = e(a+a')e \\ (eae)(ea'e) = e(aea')e \in eAe \quad (e^2 = e) \\ \lambda(eae) = e(\lambda a)e \end{array}\right\} eAe \text{ es un álgebra}$$

Lema de Brauer. Sea A una F-álgebra, $1 \in A$ (donde ...). Sea $K \underset{izq}{\lhd} A$ minimal, $K^2 \neq 0$. Entonces: $\exists e \in A$: $e^2 = e$, $K = Ae$, eAe es alg. de división

---

Dem.: $K^2 \neq 0 \Rightarrow \exists \underline{u \in K} \,/\, Ku \neq 0$; $Ku = \{zu : z \in K\} \neq 0$

$\boxed{0 \neq Ku \underset{izq}{\lhd} A}$

i) $Ku + Ku \subset Ku$

ii) $K(Ku) \subset Ku$?

$A(Ku) \subset \underline{\underline{Ku}}$

i) $k_1u + k_2u = (k_1 + k_2)u \quad \forall k_1, k_2 \in K$

ii) $\underline{\forall \lambda \in K}$, $\underline{\underline{k}}u \in Ku \quad \lambda(ku) = (\lambda k)u$, $\lambda k \in K$

iii) $a \in A$ wlog. $ku \in Ku$, $k \in K$. $a(ku) = (ak)u \in \underline{\underline{Ku}}$, $ak \in K$

$\boxed{0 \neq Ku \subset K} \Rightarrow$ (minimalidad de K) $\boxed{Ku = K} \ni u$

$eu = u \quad \exists e \in K$

$\boxed{reu = ru \quad \forall r \in A}$ en particular $\boxed{(re - r)u = 0, \quad \forall r \in K}$

$\underbrace{re - r}_{\in K} \in \operatorname{Lann}_K(u) \overset{def}{:=} \{z \in K : zu = 0\}$. (1) $\operatorname{Lann}_K(u) \underset{izq}{\lhd} A$

$zu = 0$, $\boxed{z \in K}$

$(az)u = a(zu) = 0$

$az \in \operatorname{Lann}_K(u)$

$\forall z_1, z_2 \in \operatorname{Lann}_K(u)$,

$z_1 + z_2 \in \operatorname{Lann}_K(u)$

$\forall \lambda \in F$, $\forall z \in \operatorname{Lann}_K(u)$

$\lambda z \in \operatorname{Lann}_K(u)$

$\forall a \in A$, $\forall z \in \operatorname{Lann}_K(u)$, $az \in \operatorname{Lann}_K(u)$

$\underbrace{re-r}_{\in K} \in \mathrm{Lann}_K(u) \overset{def}{:=} \{z\in K : zu=0\}$.

$\boxed{(1) \quad \mathrm{Lann}_K(u) \triangleleft_{izq} A}$

$zu=0$, $\boxed{z\in K}$

$(az)u = a(zu) = 0$

$az \in \mathrm{Lann}_K(u)$

$\forall z_1, z_2 \in \mathrm{Lann}_K(u)$, $z_1+z_2 \in \mathrm{Lann}_K(u)$

$\forall \lambda \in F$, $\forall z \in \mathrm{Lann}_K(u)$ $\lambda z \in \mathrm{Lann}_K(u)$

$\forall a\in A, \forall z \in \mathrm{Lann}_K(u)$, $az \in \mathrm{Lann}_K(u)$

$\mathrm{Lann}_K(u) \subset K \leftarrow$ es ideal a izq minimal $\Longrightarrow$

- $\mathrm{Lann}_K(u) = \{0\}$ (*)
- $\mathrm{Lann}_K(u) = K$ (**)

Si $\mathrm{Lann}_K(u) = K \Rightarrow \boxed{\mathrm{Lann}_K(u) K = 0} \Rightarrow \boxed{K \cdot K = 0}$!! contradice que $K^2 \neq 0$ $\{xy / x,y\in K\}$

Necesariamente $\mathrm{Lann}_K(u) = \{0\}$. Mirando atrás tenemos, $re - r \in \mathrm{Lann}_K(u) = \{0\}$, $\forall r \in K$. $\boxed{re = r \quad \forall r\in K}$

Como $e\in K$, $e^2 = e$ idempotente, $e \neq 0$ (ya que $K\neq 0$)

$\boxed{0 \neq Ae \subset K}$ ($Ae \ni e$) ya que $e \in K \triangleleft_{izq} A$. Concluimos que $Ae = K$. Nos falta decir que eAe es álg. de división.

Sea $0 \neq b \in eAe$, $0 \neq Ab \subset Ae = K$ ($Ab \ni b$), $0 \neq \underbrace{Ab}_{\text{ideal a izq}} \subset K$ ideal izq min. $Ab = K = Ae \ni e$

$\boxed{eb = e^2ae \quad \boxed{eb = eae = b}} \Leftarrow \boxed{b = eae}$ donde $a\in A$

$xb = (xea)e \in Ae$

$\underline{e = r\boxed{b},\ r\in A}$

$e = r\boxed{eb}$

la unidad en eAe $= e = ee = (ere)b$

Sea $0 \neq b \in eAe$, $0 \neq Ab \subset Ae = K$, $0 \neq Ab \subset K \trianglelefteq_{izq} A$ minimal

$\boxed{b = eae}$ donde $a \in A$

$xb = (xea)e \in Ae$

$\boxed{Ab = K = Ae \ni e}$

$e = rb$ $\exists r \in A$.

$e = reb$

$e = ee = ereb$

$e = (ere)b$ $b' := ere$

$\boxed{e = b'b}$

$\forall b \in eAe$, $b \neq 0$, tiene inv. a izq.

Como $b = eae$

$\boxed{eb = e^2ae = eae = b}$

$\boxed{e \text{ es la unidad en } eAe}$

$e \cdot (ewe) = e^2we = ewe$

$(ewe) \cdot e = ewe^2 = ewe$

Observación. Si R es una F-álg. $1 \in R$, $\forall r \in R, r \neq 0, \exists r' \in R : r'r = 1$ ent. R es de división

Todo elem. $\neq 0$ es cancelable a izq.

Si p.q. $a \neq 0$, $a \in R$, $\boxed{ax = ay \text{ en } R} \Rightarrow \boxed{x = y}$

Sea $r \neq 0$, $\exists r' / r'r = 1$

$r'rr' = r' = r' \cdot 1$

$r'(rr') = r' 1$

$r' \neq 0$

$\boxed{rr' = 1}$

si $r' = 0$, $\boxed{0 = 1}$!! queda descartado de la asignatura. $\{0\}$

Observaciones.

1) Sea Δ un anillo de división, tengo M un esp. vect. sobre Δ a derech. $M \times \Delta \longrightarrow M$, $(m,\lambda) \longmapsto m\lambda$

$End_\Delta(M) = \{ T : M \to M \,/\, T \text{ es lineal} \}$ es un anillo. (prod = composición).

$\forall S, T \in End_\Delta(M)$, $\dim(Im(S))$ ó $\dim(Im(T))$ sean finitas $\Rightarrow \dim(Im(S \circ T))$ finita.

Sup. $\boxed{\dim(Im(S)) \text{ es finita}}$ $\quad Im(S)$ tiene base $\{m_1, \dots, m_k\}$

$Im(S \circ T) \subset Im(S) \quad \Rightarrow \quad \dim(Im(S \circ T)) \leq \dim(Im(S)) = k$

$S(T(m)) \in Im(S)$

Sup. $\dim(Im(T))$ es finita $\quad Im(T)$ tiene base $\{ \underline{\underline{m_1', \dots, m_q'}} \}$

¿ $\dim(Im(S \circ T))$ es finita?

$\forall z \in Im(S \circ T) \quad z = S(T(w)) \quad w \in M$

$T(w) = m_1'\lambda_1 + \dots + m_q'\lambda_q \quad (\lambda_i \in \Delta)$

$ST(w) = S(m_1')\lambda_1 + \dots + S(m_q')\lambda_q$

$Im(S \circ T)$ tiene como sist. de generadores $\{S(m_1'), \dots, S(m_q')\}$

luego $Im(S \circ T)$ tiene dim finita.

Lo último: $T, S \in End_\Delta(M)$. $\dim(Im(T))$ finita $\Rightarrow$ $\dim(Im(T\circ S))$ finita, $\dim(Im(S\circ T))$ finita.

Corolario: $A = End_\Delta(M)$ es anillo simple $\Rightarrow$ M es de dim. finita.

OJO: A, es anillo, A se dice simple si y solo si $\begin{cases} A^2 \neq 0 \quad (\exists x, y \in A : x \cdot y \neq 0) \\ \forall I \lhd A, \ (I = 0, \ I = A) \end{cases}$

A, es álgebra, " " " " " " " $\begin{cases} A^2 \neq 0 \\ \forall I \lhd A, \ (I = 0, \ I = A) \end{cases}$

Para un anillo A, I es un ideal si $\left.\begin{array}{l} I + I \subset I \\ AI \subset I \\ IA \subset I \end{array}\right\}$

Para un álgebra A, I es un ideal de A si $\left.\begin{array}{l} I + I \subset I \\ FI \subset I \\ AI \subset I \\ IA \subset I \end{array}\right\}$
F = cuerpo base

Los ideales de las álgebras son subesp. vectoriales

Si A es anillo con unidad $1 \in A$ $\Big\}$ A se dice simple si $\boxed{\forall I \lhd A, \ I = 0, \ I = A}$
$1 \cdot 1 = 1 \neq 0$
($A^2 \neq 0$ ya se tiene automátic.)

Un alg. A se dice simple si y solo si $\forall I \lhd A, \ I = 0$, o $I = A$

Visualización del Lema de Brauer. F cuerpo, $A = M_n(F)$

i fijado. $\boxed{K = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} : a_{ni} \in F \right\}}$, $m \in K$, $m = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} E_{ji}$

E_{ji} = matriz elemental con un 1 en (j,i) y lo demás cero.

$A = \bigoplus_{i,j=1}^{n} F E_{ji}$, $\{E_{ji}\}_{j,i=1}^{n}$ base de A.

$\begin{cases} \underbrace{E_{ji} E_{ik}}_{} = E_{jk} \\ \underbrace{E_{ji} E_{kl}}_{} = 0 \text{ si } i \neq k \end{cases}$

$\boxed{K = \bigoplus_{j=1}^{n} F E_{ji}}$

E_{pq} arbitraria.

$\boxed{E_{pq} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} E_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \underbrace{E_{pq} E_{ji}}_{} = a_{qi} E_{pi} \in K}$

$\boxed{A K \subset K}$

$\dot{A} I \subset I$ ideal a izq

$K \trianglelefteq_{izq} A$

Tarea: K es minimal

$K^2 \neq 0$, $\exists e^2 = e$, $K = Ae$, $e \in K$

$E_{ii} E_{ii} = E_{ii}$ idemp.

¿$A E_{ii} = K$?

$\underbrace{A E_{ii} = K}$.

$$\boxed{K = \bigoplus_{j=1} F \underbrace{E_{ji}}}$$

$$\left(\sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{pq} E_{pq}\right) \cdot E_{ii} = \sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{pq} (E_{pq} \underbrace{E_{ii}}) = \sum_{p=1}^{n} \lambda_{pi} E_{pi} \in K \quad ; \qquad A E_{ii} \subset K$$

elemento 'general' de A

Sea $E_{ji} \in K$. (j arbitrario)

↳ forma parte de la base de K

$$E_{ji} \overset{?}{\in} A E_{ii} \quad ; \quad \underbrace{E_{ji}} = \underbrace{\overset{A}{\underset{\psi}{E_{ji}}}\ \overset{E_{ii}}{\underset{\shortparallel}{E_{ii}}}}$$

$\underbrace{\text{Cualq. de la base}}_{E_{ji}}$ de K está en $A E_{ii}$

$$\boxed{K = A E_{ii}}$$

¿ $E_{ii} \underline{A} E_{ii}$ es un álgebra de división ?

$$E_{ii}\left(\sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{pq} E_{pq}\right) E_{ii} = \sum_{p,q=1}^{n} \lambda_{pq} (\underbrace{E_{ii} E_{pq}} \underbrace{E_{ii}}) = \lambda_{ii} E_{ii}^{3} = \lambda_{ii} E_{ii}$$

$$E_{ii} A E_{ii} = F E_{ii} \cong F$$

$$\begin{pmatrix} \ddots & & \\ & \lambda & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \longmapsto \lambda$$

Teorema. Sea R anillo (unitario). M un R-módulo. Entonces son equivalentes:

(1) M es noetheriano

(2) Todo submódulo N de M es finitamente generado ($\exists\, n_1, \dots, n_k \in N : \forall x \in N$ se expresa $x = r_1 n_1 + r_2 n_2 + \dots + r_k n_k$, donde $r_i \in R$)

---

(2) $\Rightarrow$ (1)

$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_i \subset N_{i+1} \subset \dots$ cadena asc. de submod. de M

$N = \bigcup_{i \geq 1} N_i$ es un submódulo de M. $\{n_1, \dots, n_k\}$ sist. de gen. de N

Cada $n_i \in N_{j_i}$ $(i = 1 \dots k)$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 \in N_{j_1} \\ n_2 \in N_{j_2} \\ \vdots \\ n_k \in N_{j_k} \end{array}\right\}$$

$h = \max(\{j_1 \dots j_k\})$

$\underline{n_1, n_2, \dots, n_k \in N_h}$

$N \subset N_h \subset N$

$N = N_h \subset N_{h+1} \subset N$

$N = N_{h+p} \quad \forall p \geq 0$

Luego M es noetheriano.

Teorema Un modulo M es noetheriano sii toda familia de submódulos tiene un elemento maximal

Dem: Sup. M noeth. $\mathcal{F}$ = familia cualq. de submódulos.

$N_1 \in \mathcal{F}$ arbitrario, Si N_1 es maximal OK

Si no, $\exists N_2 \in \mathcal{F}$; $N_1 \subsetneq N_2$. Si N_2 es maximal OK

Si no, $\exists N_3 \in \mathcal{F}$; $N_2 \subsetneq N_3$

Reiterando: o bien $\exists N_k \in \mathcal{F}$, maximal. OK

$$\left(\forall N_k \in \mathcal{F}, \ \exists N_{k+1} \in \mathcal{F}, \ N_k \subsetneq N_{k+1} \right)$$ contradice que M es noetheriano.

Recíprocamente. Asumimos que toda fam. de sub. tiene un elemento maximal.

$N_1 \subset N_2 \dots \subset N_i \subset N_{i+1} \subset \dots$ cadena de submódulos $\mathcal{F} = \{N_i\}_{i=1}^{\infty}$

sea N_k elemento maximal de $\mathcal{F}$ $N_k = N_{k+1} = N_{k+2} = \dots$ por maximalidad de N_k.

Teorema: Sea M un R-módulo. Ent. son equiv.:

(1) M es artiniano.

(2) Toda familia de submódulos tiene un elemento minimal.