POLYNÔME DE HUA, NOYAU DE BERGMAN DES DOMAINES DE CARTAN-HARTOGS ET PROBLÈME DE LU QIKENG

F. ZOHRA DEMMAD–ABDESSAMEUD

Résumé. Réduction du problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ à un problème algébrique sur les polynômes de Hua. Solution complète du problème de Lu Qikeng quand le domaine de base Ω est un domaine symétrique de dimension inférieure ou égale à 4.

Table des matières

Introduction

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Ce problème a été posé par Lu Qikeng en 1966. Le nom de *conjecture de Lu Qikeng* a été donné (par M. Skwarsczynski en 1969) à l'hypothèse suivant laquelle le noyau de Bergman d'un ouvert n'aurait pas de zéros. Un domaine U sera appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $\mu > 0$ et m entier positif, on considère le *domaine de Cartan–Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu} \right\}.$$

Les domaines de Cartan–Hartogs ont été introduits en 1998 par G. Roos et Weiping Yin ; ils généralisent les ellispsoïdes complexes, qui correspondent au cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. *Ces domaines sont en général non homogènes, mais les orbites du*

Date: 20 janvier 2007.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 32M15, 32A36.

Key words and phrases. Domaines de Cartan, noyau de Bergman, polynôme de Hua, conjecture de Lu Qikeng.

groupe d'automorphismes sont alors paramétrées par $[0,1[$. Le noyau de Bergman de ces domaines a été obtenu dans le cas général dans [5] ; cf. également [6].

Dans cet article, nous étudions le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan–Hartogs. Nous montrons (théorème 3.2) qu'il se réduit à la localisation, par rapport à la droite $\left\{\operatorname{Re}\eta = \frac{1}{2}\right\}$, des racines d'un polynôme P_μ^m ; ce polynôme, de degré égal à la dimension d de Ω, se déduit du polynôme de Hua de Ω par une transformation combinatoire.

Nous appliquons ensuite ce théorème à la solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ lorsque Ω est un domaine symétrique irréductible de dimension au plus 4. Les résultats font apparaître la situation suivante, dont on conjecture qu'elle se généralise pour toute base Ω : pour Ω et $m \geq 1$ fixés, il existe $\mu_{\Omega,m}$, $0 < \mu_{\Omega,m} \leq \infty$ tel que $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_{\Omega,m}$. La borne $\mu_{\Omega,m}$ est caractérisée comme la plus petite racine positive du polynôme $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$; on a $\mu_{\Omega,m} = +\infty$ pour m assez grand. De plus, si le domaine Ω n'est pas un domaine de Lu Qikeng, i.e. si $\mu > \mu_{\Omega,m}$, il est possible de préciser le nombre de racines de P_μ^m dans $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$, de vérifier que celles-ci sont toujours réelles et de décrire la variété des points de $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$ où le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'annule.

Les résultats obtenus lorsque la base Ω est un domaine symétrique irréductible de dimension au plus 4 fournissent un grand nombre d'exemples de domaines de Lu Qikeng et de domaines qui n'ont pas cette propriété. Contrairement au cas générique d'un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, qui n'est pas de Lu Qikeng (cf. [3]), « la plupart » des domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ sont des domaines de Lu Qikeng. En effet, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour $m \geq m_\Omega$ et pour tout $\mu > 0$, où m_Ω est un entier qui dépend de la base Ω ; pour $1 \leq m < m_\Omega$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_{\Omega,m}$.

Ce travail est organisé comme suit : Dans les sections 1 et 2, nous rappelons la définition du polynôme de Hua d'un domaine symétrique Ω et le calcul du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. La section 3 est essentiellement consacrée à la démonstration du théorème de réduction 3.2.

La section 4 décrit la solution complète du problème de Lu Qikeng pour $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ lorsque la base Ω est de dimension au plus 4 ; les résultats généralisent des résultats obtenus par Yin Weiping [7], Zhang Liyou et Park Jong-do (2006, non publié) lorsque $m = 1$ et que Ω est une boule hermitienne de dimension 3 ou 4. Pour alléger cette section, les résultats auxiliaires utilisés dans ces cas particuliers ont été regroupés dans l'annexe B. À partir de la dimension 3, les calculs ont été faits à l'aide de Mathematica ; s'agissant uniquement d'opérations algébriques sur les polynômes et de localisation de leurs racines, ces calculs peuvent être vérifiés avec tout autre logiciel de calcul symbolique.

Enfin, l'annexe A regroupe les critères utilisés pour la localisation des racines de polynômes par rapport à $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$. En degrés 3 et 4, ces critères sont déduits du critère de stabilité classique de Routh–Hurwitz et du critère de Liénard et Chipart.

Résumé in English language

The *Lu Qikeng problem* for a domain $U \subset \mathbb{C}^n$ consists in deciding whether the Bergman kernel $K_U(z,w)$ of this domain may vanish at some points of $U \times U$. A domain U is called a *Lu Qikeng domain* if its Bergman kernel is zero-free on $U \times U$.

Let Ω be an irreducible bounded circled homogeneous domain and $N(z,t)$ its generic norm. For $\mu > 0$ and m a positive integer, let

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z, z)^\mu\right\}.$$

The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is called *Cartan–Hartogs domain* (with *base* Ω, *exponent* μ, *fiber dimension* m).

The Bergman kernel of this domain may be explicitly computed from the generic norm and the *Hua polynomial* of Ω. If (a, b, r) are the numerical invariants (multiplicities and rank) of the domain Ω, its Hua polynomial is

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a},$$

where $(s+1)_k = \prod_{i=1}^{k}(s+i)$ denotes the raising factorial. This polynomial is related to the *Hua integral* by

$$\int_\Omega N(z,z)^s \omega(z) = \frac{\chi(0)}{\chi(s)} \int_\Omega \omega \qquad (\operatorname{Re} s > -1)$$

(cf. [5]). The decomposition

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}(\mu)(k+1)_j$$

of $\chi(k\mu)$ along raising factorials w.r. to k defines polynomials $C_j(\mu)$, which are of degree j in μ. For m a positive integer and $\mu > 0$, define

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu) \mu^j \eta^j.$$

Note that the degree of this polynomial w.r. to η or μ is equal to the dimension d of Ω.

The Bergman kernel of $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is then (cf. [5], [6])

$$\widehat{K}_{m,\mu}((z,Z),(w,W)) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_\mu^m(\eta),$$

where $\xi, \eta : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ are defined by

$$\xi((z,Z),(w,W)) = \frac{\langle Z, W\rangle}{N(z,w)^\mu}, \qquad \eta = \frac{1}{1-\xi}.$$

The range of ξ is the unit disc $\Delta \subset \mathbb{C}$ and the range of η is the half-plane $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.

Thus the Lu Qikeng problem for $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is reduced to the localization of the roots of P_μ^m :

Theorem. *The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if all roots of P_μ^m are located in $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$.*

Applying this theorem, the Lu Qikeng problem is completely solved in this paper for all m, $\mu > 0$ when the base is of dimension $d \le 4$. This provides a lot of examples of Lu Qikeng and no-Lu Qikeng domains. In contrast with the generic case of a bounded domain ("The Lu Qikeng conjecture fails generically", see [3]), "most" of the domains $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ are Lu Qikeng domains. Actually, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain for $m \geq m_\Omega$ and for all $\mu > 0$, where m_Ω is an integer depending on the base Ω; for $1 \leq m < m_\Omega$, there exists a positive real number μ_m such that the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only $0 < \mu \leq \mu_m$.

Results are as follows:

1. If Ω is the unit disc $\Delta \subset \mathbb{C}$, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain for all $m \geq 1$ and all $\mu > 0$. This is recalled here only for sake of completeness.

2. If Ω is the Hermitian ball of dimension 2, the domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $m = 1$, $\mu \leq 2$;
(2) $m = 2$, $\mu \leq 4$;
(3) $m \geq m_\Omega = 3$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, the result is due to H.P. Boas, Siqi Fu, E. Straube [4]; see also [7]. For $m > 1$, results are new.

3. If Ω is the Hermitian ball of dimension 3, for $1 \leq m \leq 5$, the polynomial q_m (of degree 2 or 3) defined by

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

has a unique positive root μ_m and

$$0 < \mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $1 \leq m \leq 5$, $0 < \mu \leq \mu_m$;
(2) $m \geq m_\Omega = 6$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, this result has been obtained by Weiping Yin [7], by a slightly different method. Results are new for $m > 1$.

4. If Ω is the Lie ball of dimension 3 (domain of type $IV_3 \simeq III_2$, symmetric matrices), the same type of result holds as in the preceding case, with different q_m and μ_m,

$$0 < \mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5,$$

but again $m_\Omega = 6$. Here the results are new for all m.

5. If Ω is the Hermitian ball of dimension 4, the polynomial q_m defined by

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

- has two positive roots $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$ for $m = 1, 2$;
- has one positive root μ_m for $3 \leq m \leq 7$;
- is positive for all $\mu > 0$ if $m \geq m_\Omega = 8$.

Moreover,

$$0 < \mu_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

The domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

(1) $1 \leq m \leq 7$, $0 < \mu \leq \mu_m$;
(2) $m \geq m_\Omega = 8$, for all $\mu > 0$.

For $m = 1$, this result has been obtained by Jong-do Park and Liyou Zhang (2006, unpublished). Results are new for $m > 1$.

6. If Ω is the Lie ball of dimension 4 (domain of type $IV_4 \simeq I_{2,2}$, 2×2 matrices), the same type of result as in the preceding case holds, with different q_m and μ_m,

$$0 < \mu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{23 - \sqrt{337}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7,$$

and $m_\Omega = 8$. Here the results are new for all m.

Results may be summarized in the following theorem:

Theorem. *Let Ω be an irreducible bounded circled homogeneous domain of dimension at most 4. Then the polynomial*

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

has 0, 1 or 2 positive roots. If q_m has no positive root, let $\mu_m = +\infty$; if q_m has one positive root, denote this root by $\mu_m = \mu_{m,1}$ and let $\mu_{m,2} = +\infty$; if q_m has two positive roots, denote these roots by $\mu_{m,1}$, $\mu_{m,2}$ and let $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$.

The polynomial P_μ^m has

- *no root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $0 < \mu \le \mu_m$;*
- *one root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $\mu_{m,1} < \mu \le \mu_{m,2}$;*
- *two roots in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if $\mu_{m,2} < \mu$.*

The Cartan–Hartogs domain $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ is a Lu Qikeng domain if and only if

$$0 < \mu \le \mu_m.$$

The values of the positive roots of q_m are given in the following table.

Type	$I_{1,1} \simeq II_2$	$I_{1,2}$	$I_{1,3} \simeq II_3$	$III_2 \simeq IV_3$	$I_{1,4}$	$I_{2,2} \simeq IV_4$
$\mu_{1,1}$	$+\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\simeq 1.07732$
$\mu_{1,2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	4	$\simeq 3.21549$
$\mu_{2,1}$	$+\infty$	4	$\frac{1+\sqrt{7}}{2}$	$\frac{3+\sqrt{73}}{8}$	$\simeq 1.41518$	$\simeq 1.21176$
$\mu_{2,2}$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 11.333$	$\simeq 9.08062$
μ_3	$+\infty$	$+\infty$	$1 + \sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$\simeq 1.61819$	$\simeq 1.41824$
μ_4	$+\infty$	$+\infty$	$2 + \sqrt{6}$	$\frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{\frac{43}{3}}\right)$	$\simeq 2.10335$	$\simeq 1.74173$
μ_5	$+\infty$	$+\infty$	$8 + \sqrt{70}$	$2\left(3 + \sqrt{10}\right)$	$\simeq 2.8029$	$\simeq 2.29476$
μ_6	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 4.22107$	$\simeq 3.42405$
μ_7	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\simeq 8.60867$	$\simeq 6.92986$

Proofs are by case-by-case computation and study of the polynomial P_μ^m. For base domain Ω of dimension 3 or 4, most computations have been done with Mathematica; these computations involve only algebraic operations on polynomials and localization of their roots, and they can be checked with any software for symbolic calculus. The localization of the roots of P_μ^m w.r. to $\left\{\operatorname{Re}\eta = \frac{1}{2}\right\}$ is easy in degree

1 or 2. In degrees 3 and 4, we use the following criteria, which result from the *Routh–Hurwitz criterion* (see [2, Chap. 15] and Propositions A.2, A.4).

Criterion (Degree 3)**.** *Let $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ be a polynomial with real coefficients and $\delta > 0$. Then all roots of P are located in $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \Delta_2 \equiv (\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta > 0.$$

Criterion (Degree 4)**.** *Let*

$$P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4$$

be a polynomial with real coefficients and $\varepsilon > 0$. Then all roots of P are located in $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P''\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$
$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0.$$

Sketch of proofs.

1. If Ω is the unit disc, P_μ^m has degree 1 and

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(m-1)\mu}{2} + 1$$

is always positive.

2. If Ω is the Hermitian ball of dimension 2, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 2; its roots (real or imaginary conjugate) lie in $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \ge 0, \qquad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \ge 0.$$

Computation shows that

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{m(m-3)}{4}\mu^2 + \tfrac{3(m-1)}{2}\mu + 2,$$
$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 + (m-1)\mu;$$

the results easily follows by inspection of the special cases $m = 1$ and $m = 2$.

3. If Ω is the Hermitian ball of dimension 3, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 3. According to the above criterion for degree 3, all roots of $P_\mu^m(\eta) = \alpha+\beta\eta+\gamma\eta^2+\delta\eta^3$ are located in $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,$$
$$\Delta_2 = (\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta > 0.$$

Direct computations show that the first condition implies the second. A study of the polynomials

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 + \tfrac{11(m-1)}{2}\mu + \tfrac{3m(m-3)}{2}\mu^2 + \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3$$

and their comparison give the results about the μ_m's. Computation of the third condition gives rise to a polynomial condition on μ and m, which again appears to be implied by

$$q_m(\mu) \ge 0.$$

4. If Ω is the Lie ball of dimension 3, the treatment is entirely analogous to the case of type $I_{1,3}$, with

$$q_m(\mu) = \tfrac{1}{8}(m-1)\left(m^2-5m-2\right)\mu^3 + \tfrac{9}{8}m(m-3)\mu^2 + \tfrac{13}{4}(m-1)\mu + 3.$$

5. If Ω is the Hermitian ball of dimension 4, the polynomial $P_\mu^m(\eta)$ has degree 4. According to the above criterion for degree 4, all roots of $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$ are located in $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ if and only if

$$\begin{aligned}
&P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\eta^2} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0,\\
&\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0.
\end{aligned}$$

The polynomial $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$ is equal to

$$\begin{aligned}
q_m(\mu) &= P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)\\
&= (4+m\mu)\left(6 + \tfrac{19m-25}{4}\mu + m(m-5)\mu^2 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^3\right).
\end{aligned}$$

This polynomial has

- two positive roots $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$ for $m = 1, 2$;
- one positive root μ_m for $3 \le m \le 7$;
- no positive root for $m \ge 8$.

A case-by-case study shows that $0 < \mu \le \mu_m$ implies

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad \tfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\eta^2} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0.$$

Also, the condition $\Delta_3 > 0$ applied to P_μ^m gives a polynomial condition (in general of degree 6 w.r.t. to μ), which is shown to be satisfied for all μ such that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta} P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$. Finally, P_μ^m has no root in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ if and only if $0 < \mu \le \mu_m$ (with $\mu_m = +\infty$ for $m \ge m_\Omega = 8$). It is also possible to check that the number of roots of P_μ^m in $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$ is 1 for $\mu_m < \mu \le \mu_{m,2}$, and 2 for $\mu > \mu_{m,2}$ (with $\mu_{m,2} = +\infty$ for $m \ge 3$); moreover, these roots are always real.

6. If Ω is the Lie ball of dimension 4, the treatment is entirely analogous to the case of type $I_{1,4}$, with

$$\begin{aligned}
q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23m(m-3)}{4}\mu^2\\
&\quad + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^4.
\end{aligned}$$

1. Polynômes du type de Hua

1.1. **Définition.** On considère un triplet (a, b, r) d'entiers naturels, avec $r > 0$. Le *polynôme du type de Hua* $\chi = \chi_{a,b,r}$ est le polynôme défini par :

$$\chi(s) = \chi_{a,b,r}(s) = \prod_{j=1}^{r} \left(s + 1 + (j-1)\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a}, \tag{1.1}$$

On a

$$\deg\chi = d = r + \tfrac{r(r-1)}{2}a + rb. \tag{1.2}$$

En effet, on a

$$\deg\chi = \sum_{j=1}^{r} (1 + b + (r-j)a) = r + rb + \tfrac{r(r-1)}{2}a.$$

Le polynôme χ est lié à l'*intégrale de Selberg* [1], pour $\operatorname{Re} s > -1$, par

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{r} (1-t_j)^s t_j^b \prod_{1 \le j < k \le r} |t_j - t_k|^a \ \mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_r = \tfrac{C(a,b,r)}{\chi(s)}, \tag{1.3}$$

où

$$C(a,b,r) = \prod_{j=1}^{r} \tfrac{\Gamma(b+1+(j-1)\frac{a}{2})\Gamma(j\frac{a}{2}+1)}{\Gamma(\frac{a}{2}+1)}.$$

1.2. **Polynômes de Hua des domaines hermitiens symétriques.** Soit Ω un domaine hermitien symétrique irréductible. On désigne par N la *norme* générique de Ω et par a, b, r ses invariants numériques. L'*intégrale de Hua* $\int_\Omega N(z,z)^s \omega(z)$ de Ω est donnée par

$$\int_\Omega N(z,z)^s \omega(z) = \tfrac{\chi(0)}{\chi(s)} \int_\Omega \omega \qquad (\operatorname{Re} s > -1) \tag{1.4}$$

(cf. [5]), où $\chi = \chi_{a,b,r}$.

Il est bien connu que le noyau reproduisant de l'espace à poids $H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$ est

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s},$$

où C_s est une constante dépendant de s. Nous rappelons ci-dessous la démonstration et précisons la relation entre C_s et $\chi(s)$.

Lemme 1.1. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $s > 0$, le noyau reproduisant de l'espace à poids $H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$ est*

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_\Omega N(z,t)^{-g-s} \chi(s), \tag{1.5}$$

où $C_\Omega = \frac{1}{\chi(0)\operatorname{vol}(\Omega)}$.

Démonstration. Si ϕ est un automorphisme de Ω on a

$$N\left(\phi\left(t\right), \phi\left(t\right)\right)^g = \left|J\phi\left(t\right)\right|^2 N\left(t,t\right)^g. \tag{1.6}$$

Ceci résulte des relations

$$\begin{aligned} B\left(\phi\left(z\right), \phi\left(t\right)\right) &= \mathrm{d}\,\phi\left(z\right) B\left(z,t\right) \mathrm{d}\,\phi^*\left(z\right), \\ \det B\left(z,z\right) &= N\left(z,z\right)^g. \end{aligned}$$

Soit

$$\|f\|_s^2 = \int_\Omega \left|f\left(t\right)\right|^2 N\left(t,t\right)^s \omega\left(t\right)$$

la norme de $H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$. Si ϕ est un automorphisme de Ω, on a par changement de variable dans l'intégrale et en appliquant (1.6),

$$\begin{aligned} \|f\|_s^2 &= \int_\Omega \left|f \circ \phi\right|^2 N\left(\phi\left(t\right), \phi\left(t\right)\right)^s \omega\left(\phi\left(t\right)\right) \\ &= \int_\Omega \left|f \circ \phi\right|^2 N\left(t,t\right)^s \left|J\phi\left(t\right)\right|^{\frac{2s}{g}} \left|J\phi\left(t\right)\right|^2 \omega\left(t\right) = \left\|\left(f \circ \phi\right)\, \left(J\phi\right)^{\frac{s}{g}+1}\right\|_s^2. \end{aligned}$$

L'application $f \longmapsto (f \circ \phi)\ (J\phi)^{\frac{s}{g}+1}$ est donc un automorphisme de l'espace de Hilbert $H\left(\Omega, N(z,z)^s\right)$. Le noyau reproduisant de cet espace vérifie donc la relation de transformation

$$K_{\Omega,s}(z,z) = \left|J\phi\,(z)\right|^{\frac{2s}{g}+2} K_{\Omega,s}(\phi\,(z)\,,\phi\,(z)).$$

Soit $z \in \Omega$ et $\phi \in \operatorname{Aut}\Omega$ tel que $\phi\,(z) = 0$; comme $N\,(0,0) = 1$, on déduit de (1.6)

$$N\,(z,z)^g = \left|J\phi\,(z)\right|^{-2},$$

d'où $K_{\Omega,s}(z,z) = C_s N(z,z)^{-g-s}$, avec $C_s = K_{\Omega,s}(0,0)$. On a donc

$$K_{\Omega,s}(z,t) = C_s N(z,t)^{-g-s},$$

les deux membres étant analytique-réels. En particulier, $K_{\Omega,s}(0,t) = C_s$ et $1 = C_s \int N(t,t)^s \omega$; d'où, en utilisant (1.4), $C_s = \frac{\chi(s)}{\chi(0)\operatorname{vol}\Omega} = C_\Omega \chi(s)$. □

2. Noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs

2.1. **Noyau de Bergman virtuel.** Soit V un espace vectoriel hermitien de dimension finie n, dont on note $\|\ \| = \|\ \|_V$ la norme hermitienne et $\omega_V(z) = \left(\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\left\|z\right\|^2\right)^n$ la forme volume associée. Soit Ω un domaine de V et $p : \Omega \to]0,+\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. L'espace des fonctions holomorphes sur Ω est noté $\operatorname{Hol}(\Omega)$. On note $H(\Omega)$ l'espace de Bergman

$$H(\Omega) = H\left(\Omega, \omega_V\right) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_\Omega^2 = \int_\Omega \left|f(z)\right|^2 \omega_V(z) < \infty \right\}$$

et $H(\Omega,p) = H(\Omega, p\omega_V)$ l'espace de Bergman à poids

$$H(\Omega, p\omega_V) = \left\{ f \in \operatorname{Hol}(\Omega) \mid \|f\|_{\Omega,p}^2 = \int_\Omega \left|f(z)\right|^2 p(z)\omega_V(z) < \infty \right\}.$$

Les produits scalaires de ces espaces de Hilbert sont notés respectivement $(\ |\ )_\Omega$ et $(\ |\ )_{\Omega,p}$. Le noyau de Bergman de Ω (noyau reproduisant de $H(\Omega)$) est noté $K_\Omega(z,t)$; il est entièrement déterminé par la fonction analytique-réelle $\mathcal{K}_\Omega$:

$$\mathcal{K}_\Omega(z) = K_\Omega(z,z) \qquad (z \in \Omega)\,,$$

qui est aussi appelée noyau de Bergman de Ω. De la même manière, le noyau de Bergman à poids de (Ω,p) (noyau reproduisant de $H(\Omega,p)$) est noté $K_{\Omega,p}(z,t)$ et est entièrement déterminé par $\mathcal{K}_{\Omega,p}(z) = K_{\Omega,p}(z,z)$.

Définition 2.1. *Soient Ω un domaine dans V et $p : \Omega \to]0,+\infty[$ une fonction continue sur Ω. On note $K_{\Omega,p^k}(z,w)$ (resp. $\mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z)$) le noyau de Bergman à poids de $\left(\Omega,p^k\right)$. On appelle* noyau de Bergman virtuel *de (Ω,p) la fonction définie par*

$$L_{\Omega,p}\,(z,w;r) = L_0\,(z,w;r) = \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z,w)r^k \quad (z,w \in \Omega,\ r \in \mathbb{C}). \tag{2.1}$$

La fonction $\mathcal{L}_0(z,r) = L_0(z,z;r)$, définie par

$$\mathcal{L}_{\Omega,p}\,(z,r) = \mathcal{L}_0\,(z,r) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{K}_{\Omega,p^k}(z)r^k \quad (z \in \Omega,\ r \geq 0) \tag{2.2}$$

est également appelée noyau de Bergman virtuel de (Ω,p).

2.2. **Noyau de Bergman de domaines de Hartogs.** Soit $\Omega \subset V$ et $p : \Omega \to]0, +\infty[$ une fonction continue positive sur Ω. On considère le domaine de Hartogs $\widehat{\Omega}_m(p)$ au-dessus de Ω, défini par

$$\widehat{\Omega}_m(p) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m \mid \|Z\|^2 < p(z)\right\}.$$

On munit ici $\mathbb{C}^m$ de la structure hermitienne standard et de la forme volume associée

$$\omega_m(Z) = \left(\tfrac{\mathrm{i}}{2\pi}\partial\overline{\partial}\,\|Z\|^2\right)^m.$$

Le domaine $\widehat{\Omega}_m(p)$ sera muni de la forme volume

$$\omega_V(z) \wedge \omega_m(Z).$$

Le théorème suivant montre comment calculer le noyau de Bergman des domaines de Hartogs $\widehat{\Omega}_m(p)$ $(m > 0)$ à partir du noyau de Bergman virtuel de (Ω, p).

Théorème 2.1. *Le noyau de Bergman $\widehat{K}_m$ (resp. $\widehat{\mathcal{K}}_m$) de $\widehat{\Omega}_m(p)$ est égal à*

$$\widehat{K}_m\left((z, Z), (w, W)\right) = L_m\left(z, w; \langle Z, W\rangle\right), \tag{2.3}$$

$$\widehat{\mathcal{K}}_m(z, Z) = \mathcal{L}_m\left(z, \|Z\|^2\right), \tag{2.4}$$

où

$$L_m(z, w; r) = \tfrac{1}{m!}\tfrac{\partial^m}{\partial r^m}L_0(z, w; r), \tag{2.5}$$

$$\mathcal{L}_m(z, r) = \tfrac{1}{m!}\tfrac{\partial^m}{\partial r^m}\mathcal{L}_0(z, r). \tag{2.6}$$

2.3. **Noyau de Bergman des domaines de Cartan-Hartogs.** Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z, t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Soit

$$\chi\left(k\mu\right) = \sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right)\tfrac{(k+1)_j}{j!} = \textstyle\sum_{j=0}^{d}\mu^j C_{d-j}\left(\mu\right)\left(k+1\right)_j \tag{2.7}$$

la décomposition de $\chi\left(k\mu\right)$ suivant les factorielles croissantes de k.

On considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right) = \left\{(z, Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\left(z, z\right)^\mu\right\}. \tag{2.8}$$

On note $\widehat{K}_{m,\mu}\left((z, Z), (w, W)\right)$ le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m\left(\mu\right)$ et

$$\widehat{\mathcal{K}}_{m,\mu}(z, Z) = \widehat{K}_{m,\mu}\left((z, Z), (z, Z)\right).$$

On note $L_{m,\mu}(z, w; r)$ le noyau de Bergman virtuel de $(\Omega, N(z, z)^\mu)$ et

$$\mathcal{L}_{m,\mu}(z, r) = L_{m,\mu}(z, w; r).$$

Théorème 2.2. *Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible. On a*

$$L_{0,\mu}\left(z, w, r\right) = \frac{C_\Omega}{N\left(z, w\right)^g}\sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right)\frac{1}{\left(1-\xi\right)^{j+1}}, \tag{2.9}$$

$$\mathcal{L}_{0,\mu}\left(z, r\right) = \frac{C_\Omega}{N\left(z, z\right)^g}\sum_{j=0}^{d} c_j\left(\mu\right)\frac{1}{\left(1-X\right)^{j+1}}, \tag{2.10}$$

où ξ et X sont les fonctions définies par

$$\xi(z,w,r) = \frac{r}{N(z,w)^{\mu}}, \qquad X(z,r) = \frac{r}{N(z,z)^{\mu}}$$

et $C_\Omega = \frac{1}{\chi(0)\,\mathrm{vol}\,\Omega}$.

Démonstration. D'après le lemme 1.1 et (2.7), on a

$$\begin{aligned} L_0\,(z,w;r) &= \sum_{k=0}^{\infty} K_{\Omega,p^k}(z,w) r^k = C_\Omega \sum_{k=0}^{\infty} N(z,w)^{-g-k\mu}\chi(k\mu) r^k \\ &= \frac{C_\Omega}{N(z,z)^g} \sum_{k=0}^{\infty} \chi(k\mu)\xi^k \end{aligned}$$

où $\xi = \frac{r}{N(z,w)^{\mu}}$. Si P est un polynôme décomposé sous la forme

$$P(k) = \sum_{j=0}^{d} c_j \tfrac{(k+1)_j}{j!},$$

on a, pour $|\xi| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k)\xi^k = \sum_{j=0}^{d} c_j \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}},$$

d'où le résultat pour $P(k) = \chi(k\mu)$ et $\chi\,(k\mu) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\frac{(k+1)_j}{j!}$. $\square$

Notations. On note $F_\mu = F_\mu^0$ la fonction rationnelle

$$F_\mu^0(\xi) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\frac{1}{(1-\xi)^{j+1}} \tag{2.11}$$

et $P_\mu = P_\mu^0$ le polynôme

$$P_\mu^0(\eta) = \sum_{j=0}^{d} c_j\,(\mu)\,\eta^j. \tag{2.12}$$

Plus généralement, pour m entier positif, on note F_μ^m la fraction rationnelle

$$F_\mu^m(\xi) = \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\,(\mu)\,\frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}} \tag{2.13}$$

et P_μ^m le polynôme

$$P_\mu^m(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j\,(\mu)\,\eta^j. \tag{2.14}$$

Théorème 2.3. *Le noyau de Bergman du domaine*

$$\widehat{\Omega}_m\,(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N\,(z,z)^{\mu} \right\}$$

est

$$\widehat{K}_{m,\mu}\,((z,Z),(w,W)) = \frac{1}{m!} \frac{C}{N\,(z,w)^{g+m\mu}} F_\mu^m(\xi), \tag{2.15}$$

où $\xi : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ *est définie par*

$$\xi\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{\langle Z,W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}. \tag{2.16}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} L_{0,\mu}(z,w,r) &= \frac{C}{N(z,w)^{g}} \sum_{j=0}^{d} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+1}}, \\ \xi(z,w,r) &= \frac{r}{N(z,w)^{\mu}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{m,\mu}(z,w,r) &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial r^m} L_{0,\mu}(z,w,r) \\ &= \frac{1}{m!} \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu) \frac{1}{(1-\xi)^{j+m+1}}. \end{aligned}$$

On en déduit le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$:

$$\widehat{K}_{m,\mu}\left((z,Z),(w,W)\right) = L_{m,\mu}(z,w;\langle Z,W\rangle) = \frac{1}{m!} \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} F_{\mu}^{m}(\xi).$$

□

Soit $\eta : \widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu) \to \mathbb{C}$ définie par

$$\eta\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{1}{1-\xi\left((z,Z),(w,W)\right)} = \frac{N(z,w)^{\mu} - \langle Z,W\rangle}{N(z,w)^{\mu}}. \tag{2.17}$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit encore

$$\widehat{K}_{m,\mu}\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{C}{N(z,w)^{g+m\mu}} \eta^{m+1} P_{\mu}^{m}(\eta). \tag{2.18}$$

Définition 2.2. *Le polynôme*

$$P_{\mu}^{m}(\eta) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{d} \frac{(j+m)!}{j!} c_j(\mu)\, \eta^j = \sum_{j=0}^{d} (m+1)_j C_{d-j}(\mu) \mu^j \eta^j$$

sera appelé polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$.

3. Problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs

Le *problème de Lu Qikeng* pour un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ consiste à déterminer si le noyau de Bergman $K_U(z,w)$ de ce domaine peut avoir des zéros. Un domaine U est appelé *domaine de Lu Qikeng* si son noyau de Bergman ne s'annule pas dans $U \times U$.

Soit Ω un domaine homogène borné cerclé irréductible, $N(z,t)$ sa norme générique, χ son polynôme de Hua. Pour $\mu > 0$ et m entier positif, on considère le *domaine de Cartan-Hartogs* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ construit au-dessus de Ω :

$$\widehat{\Omega}_m(\mu) = \left\{ (z,Z) \in \Omega \times \mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < N(z,z)^{\mu} \right\}.$$

Le noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ s'écrit

$$\widehat{K}_{m,\mu}\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{C}{N\left(z,w\right)^{g+m\mu}}\eta^{m+1}P_\mu^m(\eta), \tag{3.1}$$

où le polynôme P_μ^m est le *polynôme représentatif du noyau de Bergman*, défini à partir du polynôme de Hua χ par les relations

$$\chi\left(k\mu\right) = \sum_{j=0}^{d} \mu^j C_{d-j}\left(\mu\right)\left(k+1\right)_j, \tag{3.2}$$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d}(m+1)_j\mu^j C_{d-j}(\mu)\eta^j, \tag{3.3}$$

et la fonction η est définie par

$$\xi\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{\langle Z,W\rangle}{N(z,w)^\mu}, \tag{3.4}$$

$$\eta\left((z,Z),(w,W)\right) = \frac{1}{1-\xi\left((z,Z),(w,W)\right)}. \tag{3.5}$$

Lemme 3.1. *Soient ξ et η les fonctions définies sur $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$ par (3.4) et (3.5). Alors l'image de ξ est le disque unité Δ de $\mathbb{C}$ et l'image de η est le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.*

Démonstration. Le noyau de Bergman de Ω est

$$K(z,t) = C_0 N(z,t)^{-g},$$

avec $C_0 = (\operatorname{vol}\Omega)^{-1}$. De la propriété connue du noyau de Bergman :

$$|K(z,t)|^2 \leq K(z,z)K(t,t), \tag{3.6}$$

on déduit

$$|N(z,t)|^2 \geq N(z,z)N(t,t) \qquad (z,t \in \Omega). \tag{3.7}$$

Dans $\widehat{\Omega}_m(\mu) \times \widehat{\Omega}_m(\mu)$, on a donc

$$|\xi\left((z,Z),(t,T)\right)|^2 = \frac{|\langle Z,T\rangle|^2}{N(z,t)^{2\mu}} \leq \frac{\|Z\|^2}{N(z,z)^\mu}\frac{\|T\|^2}{N(t,t)^\mu} < 1.$$

La fonction ξ prend donc ses valeurs dans le disque unité Δ de $\mathbb{C}$. Comme

$$\xi\left((0,Z),(0,e^{i\theta}Z)\right) = e^{i\theta}\|Z\|^2,$$

l'image de ξ est égale à Δ. □

L'expression (3.1) du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ entraîne alors immédiatement

Théorème 3.2. *Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme P_μ^m ne s'annule pas dans $\left\{\operatorname{Re}\eta > \frac{1}{2}\right\}$.*

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est ainsi ramené à la localisation des racines du polynôme P_μ^m, qui a le même degré que le polynôme de Hua χ et s'en déduit algébriquement.

4. Solution du problème de Lu Qikeng pour une base de faible dimension

Dans cette section, nous donnons la solution complète du problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$, lorsque la base Ω est un domaine borné symétrique irréductible de dimension au plus 4.

4.1. **Cas où Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$.** Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu) &= \left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < \left(1-|z|^2\right)^{\mu}\right\}\\ &= \left\{(z,Z)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^m, \quad |z|^2+\|Z\|^{2/\mu}<1\right\}.\end{aligned}$$

On a (voir l'annexe B.1)

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{(m-1)\mu}{2}+1,$$

qui est positif pour tout $\mu>0$ et tout $m\geq 1$. La racine de P_μ^m est donc toujours inférieure à $\frac{1}{2}$; d'où

Théorème 4.1. *Si Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu>0$ et tout entier $m\geq 1$.*

Ce résultat facile et connu (voir par exemple [7]) n'est cité ici que pour comparaison avec les résultats qui suivront et parce qu'il illustre la méthode employée lorsque Ω est de dimension >1.

4.2. **Cas où Ω est de type $I_{1,2}$.** Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$ et le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega}_m(\mu) &= \left\{(z,Z)\in\Omega\times\mathbb{C}^m, \quad \|Z\|^2 < \left(1-\|z\|^2\right)^{\mu}\right\}\\ &= \left\{(z,Z)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^m, \quad \|z\|^2+\|Z\|^{2/\mu}<1\right\}.\end{aligned}$$

Le polynôme de Hua est

$$\chi(s)=(s+1)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe B.2)

$$P_\mu^m(\eta)=(1-\mu)(2-\mu)+3(m+1)\mu(1-\mu)\eta+(m+1)(m+2)\mu^2\eta^2.$$

D'après le théorème 3.2, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si le polynôme $P_\mu^m(\eta)$ a toutes ses racines dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z)\leq\frac{1}{2}\right\}$. D'après la proposition A.1 ces racines sont dans le demi plan $\left\{\operatorname{Re}(z)<\frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)>0, \tag{4.1}$$

$$\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right)>0. \tag{4.2}$$

On a (annexe B.2)

$$\tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right)=3+(m-1)\mu;$$

la condition (4.2) est donc vérifiée pour tout $\mu>0$ et tout $m\geq 1$.

On a d'autre part (annexe B.2)

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{m(m-3)}{4}\mu^2 + \tfrac{3(m-1)}{2}\mu + 2.$$

Si $m \geq 3$, tous les coefficients de ce polynôme en μ sont non négatifs et on a $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ pour tout $\mu > 0$.

Si $m = 1$, on a

$$P_\mu^1\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 - \tfrac{\mu^2}{2},$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_1 = 2$.

Si $m = 2$, on a

$$P_\mu^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 + \tfrac{3}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2,$$

qui est strictement positif si et seulement si $\mu < \mu_2 = 4$. Les conditions (4.2) et (4.1) sont donc vérifiées pour $\mu < \mu_m$, μ_m étant la racine positive de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, le domaine est de Lu Qikeng si et seulement si $\mu \leq \mu_m$. En conclusion :

Théorème 4.2. *Soit Ω la boule unité de $\mathbb{C}^2$. Le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng*
- *pour $m = 1$, si et seulement si $\mu \leq 2$;*
- *pour $m = 2$, si et seulement si $\mu \leq 4$;*
- *pour $m \geq 3$, quel que soit $\mu > 0$.*

Si $m = 1$, ce résultat est dû à H.P. Boas, Siqi Fu, E. Straube ([4]) ; voir aussi [7]. Pour $m > 1$, les résultats du théorème sont nouveaux.

4.3. **Cas où Ω est de type $I_{1,3}$.** Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 3. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe B.3)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu) + (m+1)\mu(1-\mu)(11-7\mu)\eta \\ &\quad + 6(m+1)(m+2)(1-\mu)\mu^2\eta^2 + (m+1)(m+2)(m+3)\mu^3\eta^3. \end{aligned}$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6 + \tfrac{11(m-1)}{2}\mu + \tfrac{3m(m-3)}{2}\mu^2 + \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3.$$

Pour $1 \leq m \leq 5$, soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition B.3)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

Du théorème B.7, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,3}$:

Théorème 4.3. *Soit Ω une boule hermitienne de dimension 3. Si $m \geq 6$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0, +\infty[$. Si $1 \leq m \leq 5$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Weiping Yin ([7]) par une méthode différente mais essentiellement équivalente. Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

4.4. **Cas où Ω est de type IV_3.** Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3 (isomorphe au domaine symétrique associé à l'espace $\mathcal{S}_2(\mathbb{C})$ des matrices symétriques $(2,2)$). Les invariants numériques sont $a=1$, $b=0$, $r=2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe B.4)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2}-\mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2}-7\mu\right)\eta \\ &\quad + 3(m+1)(m+2)\left(\tfrac{3}{2}-2\mu\right)\mu^2\eta^2 + (m+1)(m+2)(m+3)\mu^3\eta^3. \end{aligned}$$

On a

$$P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{(m-1)\left(m^2-5m-2\right)}{8}\mu^3 + \tfrac{9m(m-3)}{8}\mu^2 + \tfrac{13(m-1)}{4}\mu + 3.$$

Pour $1 \le m \le 5$, soient q_m les polynômes définis par

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

et soit μ_m l'unique racine positive du polynôme q_m. On a (cf. proposition B.8)

$$0 < \mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5.$$

Du théorème B.12, on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_3 :

Théorème 4.4. *Soit Ω une boule de Lie de dimension 3. Si $m \ge 6$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0,+\infty[$. Si $1 \le m \le 5$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$.*

Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

4.5. **Cas où Ω est de type $I_{1,4}$.** Le domaine Ω est la boule hermitienne de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)(s+3)(s+4).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe B.5)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) = (1-\mu)(2-\mu)&(3-\mu)(4-\mu) \\ &+ 5(m+1)(1-\mu)(5-3\mu)(2-\mu)\mu\eta \\ &+ 5(m+1)_2(1-\mu)(7-5\mu)\mu^2\eta^2 \\ &+ 10(m+1)_3(1-\mu)\mu^3\eta^3 + (m+1)_4\mu^4\eta^4 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = (4+m\mu)\Big[6 + \tfrac{1}{4}(19m-25)\mu &+ m(m-5)\mu^2 \\ &+ \tfrac{1}{16}(m^3-10m^2+15m+10)\mu^3\Big]. \end{aligned}$$

Pour $1 \le m \le 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right)$. On a (cf. proposition B.13)

$$0 < \mu_1 = \sqrt{\tfrac{3}{2}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (B.18), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type $I_{1,4}$:

Théorème 4.5. *Soit Ω une boule hermitienne de dimension 4. Si $m \geq 8$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0, +\infty[$. Si $1 \leq m \leq 7$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Pour $m = 1$, ce résultat a été obtenu par Liyou Zhang et Jong-do Park (2006, non publié). Les résultats du théorème sont nouveaux pour $m > 1$.

4.6. **Cas où Ω est de type IV_4.** Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est (voir annexe B.6)

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ &\quad + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ &\quad + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23m(m-3)}{4}\mu^2 \\ &\quad + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^4. \end{aligned}$$

Pour $1 \leq m \leq 7$, soit μ_m la plus petite racine positive du polynôme q_m défini par $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$ On a (cf. proposition B.19)

$$0 < \mu_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{23 - \sqrt{337}} < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4 < \mu_5 < \mu_6 < \mu_7.$$

Du théorème (B.24), on déduit la solution complète du problème de Lu Qikeng lorsque Ω est de type IV_4 :

Théorème 4.6. *Soit Ω une boule de Lie de dimension 4. Si $m \geq 8$, le domaine de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng pour tout $\mu \in]0, +\infty[$. Si $1 \leq m \leq 7$, le domaine $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est un domaine de Lu Qikeng si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

Les résultats de ce théorème sont entièrement nouveaux.

Annexe A. Localisation des racines

Le problème de Lu Qikeng pour les domaines de Cartan-Hartogs $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ a été ramené à la localisation des racines du polynôme P_μ^m par rapport au demi-plan $\left\{\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}\right\}$ (théorème 3.2). Nous rappelons ci-dessous le *critère de Routh–Hurwitz* qui permet de déterminer quand un polynôme à coefficients réels a toutes ses racines dans le demi-plan $\{\operatorname{Re} z < 0\}$. Dans les paragraphes suivants, nous en déduisons les critères utilisés pour résoudre le problème de Lu Qikeng pour un domaine de Cartan–Hartogs dont la base Ω est de dimension au plus 4.

A.1. **Critère de Routh–Hurwitz.** Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n; \tag{A.1}$$

on suppose $a_0 > 0$. Le polynôme P est dit *stable* si toutes ses racines ont des parties réelles négatives.

L'étude de la stabilité des polynômes intervient dans la théorie du contrôle. En effet, l'équation caractéristique d'un système d'équations différentielles linéaires est un polynôme et la stabilité du système se traduit par le fait que toutes les racines de l'équation caractéristique soient dans le demi-plan négatif.

En 1875, le mécanicien anglais Routh a élaboré un algorithme qui permet de déterminer si un polynôme est stable (et plus généralement de localiser ses racines par rapport à $\{\operatorname{Re} z = 0\}$). Vingt ans plus tard, le mathématicien allemand Hurwitz a donné un critère équivalent, dans une forme différente, utilisant les déterminants (*déterminants de Hurwitz*)

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_0 & a_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Critère (Critère de Routh–Hurwitz)**.** *Toutes les racines du polynôme (A.1) ont des parties réelles négatives si et seulement si les n déterminants de Hurwitz sont positifs :*

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \cdots, \quad \Delta_n > 0.$$

En 1914, les mathématiciens français Liénard et Chipart ont établi un critère de stabilité, différent de celui de Routh-Hurwitz, en constatant que lorsque les coefficients $a_0, a_1, \cdots, a_n$ sont positifs, les conditions sur la positivité des Δ_i ne sont pas indépendantes. Par exemple, pour $n = 4$, les conditions de stabilité se réduisent à $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_4 > 0$ et $\Delta_3 > 0$.

A.2. **Polynômes de degré 2.** Soit

$$Q(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \tag{A.2}$$

Proposition A.1. *Le polynôme du second degré P a ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable, c'est-à-dire si*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0. \tag{A.3}$$

Il est également facile d'établir cette proposition directement, sans recours au critère de Routh–Hurwitz.

A.3. **Polynômes de degré** 3. Soit

$$Q\left(z\right) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_0 > 0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 \Delta_2.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement si on a

$$a_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_3 > 0.$$

Comme $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3$, cette condition équivaut à

$$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \Delta_2 > 0. \tag{A.4}$$

Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si le polynôme $Q(z) = P\left(\frac{1}{2} + z\right)$ est stable. On a

$$Q\left(z\right) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3,$$

avec $a_3 = P\left(\frac{1}{2}\right)$, $a_2 = P'\left(\frac{1}{2}\right)$ et

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{4} + \frac{\delta}{8} & \gamma + \frac{3}{2}\delta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \frac{3}{4}\delta & \delta \\ \alpha - \frac{\gamma}{4} - \frac{\delta}{4} & \gamma + \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta + \gamma + \delta & \delta \\ \alpha & \gamma + \delta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit

Proposition A.2. *Soit $P(z) = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3$ un polynôme de degré 3 à coefficients réels avec $\delta > 0$. Ce polynôme a toutes ses racines dans $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si on a*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \tag{A.5}$$

$$\Delta_2 = \left(\gamma + \delta\right)\left(\beta + \gamma + \delta\right) - \alpha\delta > 0. \tag{A.6}$$

A.4. **Polynômes de degré** 4**.** Soit

$$Q\left(z\right)=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$$

un polynôme à coefficients réels avec $a_0>0$. Les déterminants de Hurwitz sont

$$\Delta_1=a_1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & 0\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix},$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}a_1 & a_3 & 0 & 0\\ a_0 & a_2 & a_4 & 0\\ 0 & a_1 & a_3 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & a_4\end{vmatrix}=a_4\Delta_3.$$

Le polynôme Q est stable si et seulement tous les Δ_j sont positifs. Les conditions $\Delta_3>0$ et $\Delta_4>0$ sont équivalentes à

$$\Delta_3>0,\quad a_4>0. \tag{A.7}$$

D'autre part, on a

$$\Delta_3=a_3\Delta_2-a_1^2a_4$$

et les conditions (A.7) et $a_3>0$ entraînent donc $\Delta_2>0$. Finalement, $\Delta_2=a_1a_2-a_0a_3$ et $a_2>0$ entraîne $a_1>0$ si les conditions précédentes sont réalisées. Le critère de Routh–Hurwitz est ainsi équivalent au critère de Liénard et Chipart, qui s'écrit ici

Proposition A.3. *Le polynôme à coefficients réels*

$$Q\left(z\right)=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$$

($a_0>0$) *est stable si et seulement si on a*

$$a_2>0,\quad a_3>0,\quad a_4>0,\quad \Delta_3>0. \tag{A.8}$$

Soit

$$P(z)=\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 à coefficients réels avec $\varepsilon>0$. Soit

$$Q\left(z\right)=a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4$$

le polynôme $Q(z)=P\left(\frac{1}{2}+z\right)$. On a

$$\begin{aligned}
&a_4=P\left(\tfrac{1}{2}\right)=\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{4}\gamma+\tfrac{1}{8}\delta+\tfrac{1}{16}\varepsilon,\\
&a_3=P'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\beta+\gamma+\tfrac{3}{4}\delta+\tfrac{1}{2}\varepsilon,\\
&a_2=\tfrac{1}{2}P''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\gamma+\tfrac{3}{2}\delta+\tfrac{3}{2}\varepsilon,\\
&a_1=\tfrac{1}{6}P'''\left(\tfrac{1}{2}\right)=\delta+2\varepsilon,\\
&a_0=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Le polynôme de Hurwitz Δ_3 relatif à Q est

$$\begin{aligned}\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} &= a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_0a_3^2 \\ &= (\delta+2\varepsilon)\left(\gamma+\tfrac{3}{2}\delta+\tfrac{3}{2}\varepsilon\right)\left(\beta+\gamma+\tfrac{3}{4}\delta+\tfrac{1}{2}\varepsilon\right) \\ &\quad - (\delta+2\varepsilon)^2\left(\alpha+\tfrac{\beta}{2}+\tfrac{\gamma}{4}+\tfrac{\delta}{8}+\tfrac{\varepsilon}{16}\right) - \varepsilon\left(\beta+\gamma+\tfrac{3}{4}\delta+\tfrac{1}{2}\varepsilon\right)^2.\end{aligned}$$

On a

$$\Delta_3 = (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta)-\varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha. \tag{A.9}$$

On a finalement, en appliquant cette relation et la proposition A.3 :

Proposition A.4. *Soit*

$$P(z) = \alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\varepsilon z^4$$

un polynôme de degré 4 *à coefficients réels avec* $\varepsilon > 0$. *Les racines du polynôme* P *sont toutes situées dans* $\left\{\operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\right\}$ *si et seulement si* P *vérifie les conditions*

$$P\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P'\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \quad P''\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0, \tag{A.10}$$

$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta)-\varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha > 0. \tag{A.11}$$

Annexe B. Tables

On trouvera ci-dessous pour les types indiqués de domaines bornés symétriques :

– le polynôme de Hua

$$\chi(s) = \prod_{j=1}^{r}\left(s+1+(j-1)\tfrac{a}{2}\right)_{1+b+(r-j)a} \ ;$$

– les coefficients $C_j(\mu)$ de la décomposition

$$\chi(k\mu) = \sum_{j=0}^{d}\mu^j C_{d-j}(\mu)\,(k+1)_j \ ;$$

– le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$

$$P_\mu^m(\eta) = \sum_{j=0}^{d}(m+1)_j C_{d-j}(\mu)\mu^j\eta^j \ ;$$

– ses polynômes dérivés $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\,\eta^k}P_\mu^m(\eta)$ $(1 \le k < d)$;

– leurs valeurs pour $\eta = \frac{1}{2}$;

– en dimension 3, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_2 = (\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta) - \alpha\delta$$

associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha+\beta\eta+\gamma\eta^2+\delta\eta^3$;

– en dimension 4, le déterminant de Hurwitz

$$\Delta_3 \equiv (\varepsilon+\delta+\gamma+\beta)\left[(\varepsilon+\delta+\gamma)(\varepsilon+\delta)-\varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon+\delta)^2\alpha$$

associé au polynôme $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}+\eta\right) = \alpha+\beta\eta+\gamma\eta^2+\delta\eta^3+\varepsilon\eta^4$;

– éventuellement, les valeurs ci-dessus pour des valeurs particulières de m.

À partir de la dimension 3, les calculs ont été faits à l'aide de MATHEMATICA ; ils peuvent être vérifiés avec tout autre logiciel de calcul symbolique.

B.1. **Type $I_{1,1}$.** Le domaine Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \chi(s) &= s+1, \\ C_1(\mu) &= 1-\mu, \quad C_0(\mu) = 1, \\ P_\mu^m(\eta) &= 1-\mu+(m+1)\mu\eta, \\ P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 1+\tfrac{m-1}{2}\mu. \end{aligned}$$

B.2. **Type $I_{1,2}$.** Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^2$. On a

$$\begin{aligned} \chi(s) &= (s+1)(s+2), \\ C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu) = 3(1-\mu), \quad C_2(\mu) = (1-\mu)(2-\mu), \\ P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)+3(m+1)\mu(1-\mu)\eta+(m+1)_2\mu^2\eta^2. \end{aligned}$$

B.2.1. *Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.* On a

$$q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = (2+m\mu)\left(1+\tfrac{m-3}{4}\mu\right).$$

Proposition B.1. *Pour $m \geq 3$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 2$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m ($\mu_1 = 2 < \mu_2 = 4$) et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

B.2.2. *Signe de $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$.*

$$\tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3+(m-1)\mu.$$

Proposition B.2. *Pour tout $m \geq 1$ et pour tout $\mu > 0$, on a $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.*

B.3. **Type $I_{1,3}$.** Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^3$. On a

$$\begin{aligned} \chi(s) &= (s+1)(s+2)(s+3), \\ C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu) = 6(1-\mu), \\ C_2(\mu) &= (1-\mu)(11-7\mu), \quad C_3(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu), \\ P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)+(m+1)(1-\mu)(11-7\mu)\mu\eta \\ &\qquad +6(m+1)_2(1-\mu)\mu^2\eta^2+(m+1)_3\mu^3\eta^3. \end{aligned}$$

B.3.1. *Signe de $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.* On a

$$\begin{aligned} P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= q_m(\mu) = [4+(m-1)\mu]\, r_m(\mu), \\ r_m(\mu) &= \tfrac{1}{8}\left(12+8(m-1)\mu+(m^2-5m-2)\mu^2\right). \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\begin{aligned} r_1(\mu) &= \tfrac{3}{4}\left(2-\mu^2\right), \\ r_2(\mu) &= \tfrac{1}{2}(3+2\mu-2\mu^2), \\ r_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}(3+4\mu-2\mu^2), \\ r_4(\mu) &= \tfrac{3}{4}(2+4\mu-\mu^2), \\ r_5(\mu) &= \tfrac{1}{4}\left(6+16\mu-\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m :

$$\mu_1 = \sqrt{2} < \mu_2 = \tfrac{1+\sqrt{7}}{2} < \mu_3 = 1 + \sqrt{\tfrac{5}{2}} < \mu_4 = 2 + \sqrt{6} < \mu_5 = 8 + \sqrt{70}.$$

Proposition B.3. *Pour* $m \geq 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $m \leq 5$*, le polynôme* q_m *admet une seule racine positive* μ_m *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$*.*

B.3.2. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right)$*.* On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu} \tfrac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 11 + 6\,(m-1)\,\mu + \tfrac{1}{4}\left(3m^2 - 9m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} &q_1^1(\mu) = 11 - 2\mu^2, \\ &q_2^1(\mu) = 11 + 6\mu - 2\mu^2, \\ &q_3^1(\mu) = 11 + 12\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2. \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} &0 < \mu_1^1 = \sqrt{\tfrac{11}{2}} < \mu_2^1 = \tfrac{3+\sqrt{31}}{2} < \mu_3^1 = 12 + \sqrt{166}, \\ &0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \leq m \leq 3). \end{aligned}$$

Proposition B.4. *Pour* $m \geq 4$*, on a* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $m \leq 3$*, le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^1\right]$*.*

B.3.3. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$*.*

$$\tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2} \tfrac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\,(4 + (m-1)\mu)\,.$$

Proposition B.5. *On a*

$$\tfrac{\mathrm{d}^2\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 0$$

pour tout $\mu > 0$ *et tout* $m \geq 1$*.*

B.3.4. *Déterminant de Hurwitz* Δ_2*.* Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma + \delta)\,(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$\begin{aligned} &S_m(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^3} R_m(\mu) = [4 + (m-1)\mu]\,(3 + m\mu) T_m(\mu), \\ &T_m(\mu) = 5m + 4 + (m^2 - 2m - 2)\mu. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 2)$: $T_1(\mu) = 9 - 3\mu$, $T_2(\mu) = 14 - 2\mu$.

Proposition B.6. *Pour* $m \geq 3$*, on a* $R_m(\mu) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $m \leq 2$*, le polynôme* R_m *admet une unique racine positive* ν_m *(*$\nu_1 = 3$*,* $\nu_2 = 7$*) et on a* $\nu_m > \mu_m$*.*

B.3.5. *Localisation des racines de P_μ^m.*

Théorème B.7. *Soit Ω la boule hermitienne de dimension 3 et soit P_μ^m le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$. Pour $m \geq 6$, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ quel que soit $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, les racines du polynôme P_μ^m sont toutes dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$, où μ_m désigne l'unique racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions B.3, B.4, B.6 et en appliquant la proposition A.2, on conclut que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

B.4. **Type IV_3.** Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 3. Les invariants numériques sont $a = 1$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)\left(s+\tfrac{3}{2}\right)(s+2).$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(k\mu)$ sont

$$\begin{aligned}
&C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 3\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right),\\
&C_2(\mu) = (1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right),\\
&C_3(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right).
\end{aligned}$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned}
P_\mu^m(\eta) = {}&(1-\mu)(2-\mu)\left(\tfrac{3}{2} - \mu\right) + (m+1)\mu(1-\mu)\left(\tfrac{13}{2} - 7\mu\right)\eta\\
&+ 3(m+1)_2\left(\tfrac{3}{2} - 2\mu\right)\mu^2\eta^2 + (m+1)_3\,\mu^3\eta^3.
\end{aligned}$$

B.4.1. *Signe de $P_\mu^m(\frac{1}{2})$.* On a

$$\begin{aligned}
P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) &= q_m(\mu) = [3 + (m-1)\mu]\, r_m(\mu),\\
r_m(\mu) &= \tfrac{1}{8}\left(8 + 6(m-1)\mu + (m^2 - 5m - 2)\mu^2\right).
\end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\begin{aligned}
r_1(\mu) &= \tfrac{1}{4}\left(4 - 3\mu^2\right),\\
r_2(\mu) &= \tfrac{1}{4}(4 + 3\mu - 4\mu^2),\\
r_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}(1 + 2\mu)(2 - \mu),\\
r_4(\mu) &= \tfrac{1}{4}\left(4 + 9\mu - 3\mu^2\right),\\
r_5(\mu) &= \tfrac{1}{4}(4 + 12\mu - \mu^2).
\end{aligned}$$

Racines positives de q_m $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\mu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{3}} < \mu_2 = \tfrac{3+\sqrt{73}}{8} < \mu_3 = 2 < \mu_4 = \tfrac{9+\sqrt{129}}{6} < \mu_5 = 2(3+\sqrt{10}).$$

Proposition B.8. *Pour $m \geq 6$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. Pour $m \leq 5$, le polynôme q_m admet une seule racine positive μ_m et $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif ou nul si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$.*

B.4.2. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^1(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{13}{2} + \tfrac{9}{2}(m-1)\mu + \tfrac{1}{4}\left(3m^2 - 9m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$q_1^1(\mu) = \tfrac{13}{2} - 2\mu^2,$$
$$q_2^1(\mu) = \tfrac{1}{2}(1+\mu)(13-4\mu),$$
$$q_3^1(\mu) = \tfrac{13}{2} + 9\mu - \tfrac{1}{2}\mu^2.$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \leq m \leq 3)$:

$$0 < \mu_1^1 = \tfrac{\sqrt{13}}{2} < \mu_2^1 = \tfrac{13}{4} < \mu_3^1 = 9 + \sqrt{94},$$
$$0 < \mu_m < \mu_m^1 \qquad (1 \leq m \leq 3).$$

Proposition B.9. *Pour* $m \geq 4$*, on a* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu \geq 0$*. Pour* $m \leq 3$*, le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^1\right]$.

B.4.3. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\tfrac{1}{(m+1)_2\mu^2}\tfrac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3(3 + (m-1)\mu).$$

Proposition B.10. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \geq 1$ *et tout* $\mu > 0$.

B.4.4. *Déterminant de Hurwitz* Δ_2. Soient $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$ et $R_m(\mu)$ le polynôme défini par

$$R_m(\mu) = \Delta_2 = (\gamma + \delta)(\beta + \gamma + \delta) - \alpha\delta.$$

On a

$$S_m(\mu) = \tfrac{1}{(m+1)_2\mu^3}R_m(\mu) = [3 + (m-1)\mu]\, s_m(\mu),$$
$$s_m(\mu) = \tfrac{35m+27}{4} + \tfrac{3(m-1)(4m+3)}{2}\mu + m\,(m-1)\left(m^2 - 2m - 2\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 2)$:

$$s_1(\mu) = \tfrac{1}{2}(31 - 6\mu^2),$$
$$s_2(\mu) = \tfrac{1}{4}\left(97 + 66\mu - 16\mu^2\right).$$

Proposition B.11. *Pour* $m \geq 3$*, on a* $R_m(\mu) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$*. Pour* $1 \leq m \leq 2$*, le polynôme* R_m *admet une unique racine positive* ν_m *et on a* $\nu_m > \mu_m$.

B.4.5. *Localisation des racines de* P_μ^m.

Théorème B.12. *Soit* Ω *un domaine symétrique de type* IV_3 *et soit* P_μ^m *le polynôme représentatif du noyau de Bergman de* $\widehat{\Omega}_m(\mu)$*. Pour* $m \geq 6$*, les racines du polynôme* P_μ^m *sont dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ *quel que soit* $\mu > 0$*. Pour* $m \leq 5$*, les racines du polynôme* P_μ^m *sont toutes dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ *si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$*,où* μ_m *désigne l'unique racine positive de* $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions B.8, B.9, B.11 et en appliquant la proposition A.2, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

B.5. **Type** $I_{1,4}$**.** Le domaine Ω est la boule unité de $\mathbb{C}^4$. On a

$$\begin{aligned}
\chi(s) &= (s+1)(s+2)(s+3)(s+4),\\
C_0(\mu) &= 1, \quad C_1(\mu) = 10(1-\mu), \quad C_2(\mu) = 5(1-\mu)(7-5\mu),\\
C_3(\mu) &= 5(1-\mu)(5-3\mu)(2-\mu),\\
C_4(\mu) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu),\\
P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)(4-\mu)\\
&\quad + 5(m+1)(1-\mu)(5-3\mu)(2-\mu)\mu\eta\\
&\quad + 5(m+1)_2(1-\mu)(7-5\mu)\mu^2\eta^2\\
&\quad + 10(m+1)_3(1-\mu)\mu^3\eta^3 + (m+1)_4\mu^4\eta^4.
\end{aligned}$$

B.5.1. *Signe de* $P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
q_m(\mu) &= P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) = (4+m\mu)r_m(\mu),\\
r_m(\mu) &= 6 + \tfrac{19m-25}{4}\mu + m(m-5)\mu^2 + \tfrac{m^3-10m^2+15m+10}{16}\mu^3.
\end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 7)$:

$$\begin{aligned}
r_1(\mu) &= (\mu-4)\left(\mu^2 - \tfrac{3}{2}\right),\\
r_2(\mu) &= 6 + \tfrac{13}{4}\mu - 6\mu^2 + \tfrac{1}{2}\mu^3,\\
r_3(\mu) &= 6 + 8\mu - 6\mu^2 - \tfrac{1}{2}\mu^3,\\
r_4(\mu) &= 6 + \tfrac{51}{4}\mu - 4\mu^2 - \tfrac{13}{8}\mu^3,\\
r_5(\mu) &= 6 + \tfrac{35}{2}\mu - \tfrac{5}{2}\mu^3,\\
r_6(\mu) &= 6 + \tfrac{89}{4}\mu + 6\mu^2 - \tfrac{11}{4}\mu^3,\\
r_7(\mu) &= 6 + 27\mu + 14\mu^2 - 2\mu^3.
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes q_m $(1 \le m \le 7)$:

m	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_m = \mu_{m,1}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1.41518	1.68819	2.10335	2.8029	4.22107	8.60867
$\mu_{m,2}$	4	11.333					

Proposition B.13. *Pour* $m \ge 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \le 2$, *le polynôme* q_m *admet deux racines positives* $\mu_m = \mu_{m,1} < \mu_{m,2}$, *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \le \mu_m$ *ou* $\mu \ge \mu_{m,2}$. *Pour* $3 \le m \le 7$, *le polynôme* q_m *admet une seule racine positive* μ_m *et* $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ *est positif ou nul si et seulement si* $0 < \mu \le \mu_m$.

B.5.2. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
q_m^1(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)\mu}\tfrac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\tfrac{1}{2}\right) = (5+(m-1)\mu)r_m^1(\mu),\\
r_m^1(\mu) &= 10 + 5(m-1)\mu + \tfrac{m^2-5m-4}{2}\mu^2.
\end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 5)$:

$$\begin{aligned} r_1^1(\mu) &= 2(5 - 2\mu^2), \\ r_2^1(\mu) &= 5(1 + \mu)(2 - \mu), \\ r_3^1(\mu) &= 5(2 + 2\mu - \mu^2), \\ r_4^1(\mu) &= 10 + 15\mu - 4\mu^2, \\ r_5^1(\mu) &= 2(5 + 10\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

Racines de q_m^1 $(1 \leq m \leq 5)$:

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\sqrt{\frac{5}{2}}$	2	$\sqrt{3}+1$	$\frac{1}{8}\left(\sqrt{385}+15\right)$	$\sqrt{30}+5$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1$ $(1 \leq m \leq 5)$.

Proposition B.14. *Pour* $m \geq 6$, *on a* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 5$, *le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^1\right]$.

B.5.3. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^2(\mu) = \frac{1}{(m+1)_2 \mu^2} \frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(3m^2 - 9m - 4\right)\mu^2 + 30\,(m-1)\,\mu + 70.$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 3)$:

$$\begin{aligned} q_1^2(\mu) &= 10\left(7 - \mu^2\right), \\ q_2^2(\mu) &= 10\left(7 + 3\mu - \mu^2\right), \\ q_3^2(\mu) &= 2\left(35 + 30\mu - 2\mu^2\right). \end{aligned}$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \leq m \leq 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\sqrt{7}$	$\frac{1}{2}\sqrt{37}+\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{295}+\frac{15}{2}$

On a $0 < \mu_m < \mu_m^1 < \mu_m^2$ $(1 \leq m \leq 3)$ et $\mu_m^2 < \mu_{m,2}$ $(1 \leq m \leq 2)$.

Proposition B.15. *Pour* $m \geq 4$, *on a* $\frac{\mathrm{d}^2 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 3$, *le polynôme* q_m^2 *possède une seule racine positive* μ_m^2 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^2\right]$.

B.5.4. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1}{(m+1)_3 \mu^3} \frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left((m-1)\,\mu + 5\right).$$

Proposition B.16. *On a* $\frac{\mathrm{d}^3 P_\mu^m}{\mathrm{d}\, \eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$ *et tout* $m \geq 1$.

B.5.5. *Déterminant de Hurwitz* Δ_3. Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\left[(\varepsilon + \delta + \gamma)(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon + \delta)^2 \alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}
G_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6} F_m(\mu) = (5 + (m-1)\,\mu)^2 (4 + m\mu)\, S_m(\mu) \\
S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{3} s_j(m)\mu^j, \\
s_0(m) &= 2\left(53 + 140m + 63m^2\right), \\
s_1(m) &= -75 - 189m + 55m^2 + 81m^3, \\
s_2(m) &= 2m\left(-5 - 52m - 15m^2 + 8m^3\right), \\
s_3(m) &= 5 + 15m + 20m^2 - 4m^3 - 5m^4 + m^5.
\end{aligned}$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.
Cas particuliers :

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 32\,(\mu - 2)\,(\mu + 2)\,(\mu - 4), \\
S_2(\mu) &= 1170 + 415\mu - 521\mu^2 + 35\mu^3, \\
S_3(\mu) &= 40\,(4 - \mu)\left(16\mu + \mu^2 + 13\right), \\
S_4(\mu) &= 3242 + 5233\mu + 354\mu^2 - 127\mu^3.
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \leq m \leq 4)$:

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	2	2.15132	4	8.19532
$\sigma_{m,2} \simeq$	4	13.8558		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ $(m = 1, 2)$ et $\mu_m^1 < \sigma_m$ $(m = 3, 4)$, où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

Proposition B.17. *Pour* $m > 4$, *on a* $F_m(\mu) > 0$ *pour tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \leq 4$, *on a* $F_m(\mu) > 0$ *et* $\frac{\mathrm{d}\, P_\mu^1}{\mathrm{d}\, \eta}\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$ *si et seulement si* $\mu \leq \mu_m^1$.

B.5.6. *Localisation des racines de* P_μ^m.

Théorème B.18. *Les racines du polynôme* P_μ^m *sont toutes situées dans le demi-plan* $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$

- *pour* $m \geq 8$ *et pour tout* $\mu > 0$;
- *pour* $1 \leq m \leq 7$, *si et seulement si* $0 < \mu \leq \mu_m$, *où* μ_m *est la plus petite racine positive de* $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions (B.13, B.14, B.15) et en appliquant la proposition B.17, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta < \frac{1}{2}\right\}$ pour $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\mathrm{Re}\,\eta \leq \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \leq \mu_m$. □

B.6. **Type IV_4.** Le domaine Ω est la boule de Lie de dimension 4. Les invariants numériques sont $a = 2$, $b = 0$, $r = 2$. Le polynôme de Hua est

$$\chi(s) = (s+1)(s+2)^2(s+3).$$

Les coefficients de la décomposition de $\chi(\mu k)$ sont

$$C_0(\mu) = 1, \quad C_1(\mu) = 2(4-5\mu), \quad C_2(\mu) = (1-\mu)(23-25\mu),$$
$$C_3(\mu) = (1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu), \quad C_4(\mu) = (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu).$$

Le polynôme représentatif du noyau de Bergman de $\widehat{\Omega}_m(\mu)$ est

$$\begin{aligned} P_\mu^m(\eta) &= (1-\mu)(2-\mu)^2(3-\mu) + (m+1)(1-\mu)(7-5\mu)(4-3\mu)\mu\eta \\ &\quad + (m+1)_2(1-\mu)(23-25\mu)\mu^2\eta^2 + 2(m+1)_3(4-5\mu)\mu^3\eta^3 \\ &\quad + (m+1)_4\mu^4\eta^4. \end{aligned}$$

B.6.1. *Signe de $P_\mu^m(\frac{1}{2})$.* Soit

$$\begin{aligned} q_m(\mu) &= P_\mu^m\left(\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 12 + 14(m-1)\mu + \tfrac{23}{4}m(m-3)\mu^2 \\ &\quad + (m-1)(m^2-5m-2)\mu^3 + \tfrac{1}{16}\left(m^3 - 10m^2 + 15m + 10\right)\mu^4. \end{aligned}$$

Cas particuliers $(1 \leq m \leq 7)$:

$$\begin{aligned} q_1(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 - 23\mu^2 + 2\mu^4\right), \\ q_2(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 28\mu - 23\mu^2 - 16\mu^3 + 2\mu^4\right), \\ q_3(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 56\mu - 32\mu^3 - 3\mu^4\right), \\ q_4(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 84\mu + 46\mu^2 - 36\mu^3 - 13\mu^4\right), \\ q_5(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 112\mu + 115\mu^2 - 16\mu^3 - 25\mu^4\right), \\ q_6(\mu) &= \tfrac{1}{2}\left(24 + 140\mu + 207\mu^2 + 40\mu^3 - 33\mu^4\right), \\ q_7(\mu) &= 12 + 84\mu + 161\mu^2 + 72\mu^3 - 14\mu^4. \end{aligned}$$

Racines positives des polynômes q_m $(1 \leq m \leq 7)$:

m	1	2	3	4	5	6	7
$\mu_{m,1} \simeq$	1.07732	1.21176	1.41824	1.74173	2.29476	3.42405	6.92986
$\mu_{m,2} \simeq$	3.21549	9.08062					

On note $\mu_m = \mu_{m,1}$ $(1 \leq m \leq 7)$.

Proposition B.19. *Pour $m \geq 8$, $P_\mu^m(\frac{1}{2})$ est positif pour tout $\mu > 0$. On a :*

(1) $P_\mu^1(\frac{1}{2}) \geq 0$ *pour* $0 < \mu \leq \mu_{m,1}$ *et* $\mu_{m,2} \leq \mu$ $(1 \leq m \leq 2)$*;*

(2) $P_\mu^m(\frac{1}{2}) \geq 0$ *si* $0 < \mu \leq \mu_m = \mu_{m,1}$ $(3 \leq m \leq 7)$*.*

B.6.2. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^1(\mu) = \frac{1}{(m+1)\mu}\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) = [4+(m-1)\mu]\,r_m^1,$$
$$r_m^1(\mu) = 7+4(m-1)\mu+\frac{1}{2}\left(m^2-5m-4\right)\mu^2.$$

Cas particuliers $(1 \le m \le 5)$:

$$r_1^1(\mu) = 7-4\mu^2,$$
$$r_2^1(\mu) = 7+4\mu-5\mu^2,$$
$$r_3^1(\mu) = 7+8\mu-5\mu^2,$$
$$r_4^1(\mu) = (1+2\mu)(7-2\mu),$$
$$r_5^1(\mu) = 7+16\mu-2\mu^2.$$

Racines positives de q_m^1 $(1 \le m \le 5)$:

m	1	2	3	4	5
μ_m^1	$\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\simeq 1.649$	$\simeq 2.22829$	$\frac{7}{2}$	$\simeq 8.41588$

On a $0 < \mu_{m,1} < \mu_m^1 < \mu_{m,2}$ $(1 \le m \le 2)$ et $0 < \mu_m < \mu_m^1$ $(3 \le m \le 5)$.

Proposition B.20. *Pour* $m \ge 6$, *on a* $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $\mu \ge 0$. *Pour* $m \le 6$, *le polynôme* q_m^1 *possède une seule racine positive* μ_m^1 *et est positif sur* $\left[0, \mu_m^1\right]$.

B.6.3. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right)$. On a

$$q_m^2(\mu) = \frac{1}{(m+1)_2\mu^2}\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) = 46+24(m-1)\mu+\left(3m^2-9m-4\right)\mu^2.$$

Cas particuliers :

$$q_1^2(\mu) = 2(23-25\mu^2),$$
$$q_2^2(\mu) = 2\left(23+12\mu-5\mu^2\right),$$
$$q_3^2(\mu) = 2\left(23+24\mu-2\mu^2\right).$$

Racines positives de q_m^2 $(1 \le m \le 3)$:

m	1	2	3
μ_m^2	$\simeq 2.14476$	$\simeq 3.65764$	$\simeq 12.892$

On a $\mu_1^m < \mu_2^m$ $(1 \le m \le 3)$.

Proposition B.21. *On a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \ge 4$ *et tout* $\mu > 0$. *Pour* $m \le 3$, *le polynôme* q_m^2 *possède une seule racine positive* μ_m^2 *et est positif si* $0 < \mu < \mu_m^2$. *En particulier, on a* $\frac{\mathrm{d}^2\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^2}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour* $1 \le m \le 7$ *et* $0 < \mu \le \mu_m$.

B.6.4. *Signe de* $\frac{\mathrm{d}^3\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{1}{(m+1)_3\mu^3}\frac{\mathrm{d}^3\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left[4+(m-1)\mu\right].$$

Proposition B.22. *On a* $\frac{\mathrm{d}^3\,P_\mu^m}{\mathrm{d}\,\eta^3}\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ *pour tout* $m \ge 1$ *et tout* $\mu > 0$.

B.6.5. *Déterminant de Hurwitz* Δ_3. Pour $P_\mu^m(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3 + \varepsilon\eta^4$, soit

$$F_m(\mu) = \Delta_3 \equiv (\varepsilon + \delta + \gamma + \beta)\left[(\varepsilon + \delta + \gamma)(\varepsilon + \delta) - \varepsilon\beta\right] - (2\varepsilon + \delta)^2 \alpha.$$

On a

$$\begin{aligned}
G_m(\mu) &= \tfrac{1}{(m+1)(m+1)_3\mu^6} F_m(\mu) = (4 + (m-1)\mu)^2 S_m(\mu),\\
S_m(\mu) &= \sum_{j=0}^{4} s_j(m)\mu^j,\\
s_0(m) &= 160 + 481m + 225m^2,\\
s_1(m) &= 16\,(m-1)\left(9 + 31m + 15m^2\right),\\
s_2(m) &= 2m\left(-35 - 196m - 22m^2 + 47m^3\right),\\
s_3(m) &= 8\,(m-1)\left(-2 - 8m - 15m^2 - 3m^3 + 2m^4\right),\\
s_4(m) &= m\left(5 + 15m + 20m^2 - 4m^3 - 5m^4 + m^5\right).
\end{aligned}$$

Pour $m > 4$, les coefficients $s_j(m)$ sont tous positifs.
Cas particuliers :

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 2\left(433 - 206\mu^2 + 16\mu^4\right),\\
S_2(\mu) &= 2\,(1+\mu)\left(1011 + 37\mu - 315\mu^2 + 35\mu^3\right),\\
S_3(\mu) &= 4\left(907 + 1896\mu + 672\mu^2 - 320\mu^3 - 30\mu^4\right),\\
S_4(\mu) &= 4\left(1421 + 4476\mu + 3674\mu^2 + 276\mu^3 - 127\mu^4\right).
\end{aligned}$$

Racines positives des polynômes S_m $(1 \le m \le 4)$:

m	1	2	3	4
$\sigma_m = \sigma_{m,1} \simeq$	1.62651	2.12869	3.22913	7.03204
$\sigma_{m,2} \simeq$	3.19835	8.47286		

On a $\mu_m^1 < \sigma_{m,1} < \sigma_{m,2}$ $(m = 1, 2)$ et $\mu_m^1 < \sigma_m$ $(m = 3, 4)$, où μ_m^1 est la racine positive de q_m^1.

Proposition B.23. *Pour $m > 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ pour tout $\mu > 0$. Pour $m \le 4$, on a $F_m(\mu) > 0$ et $\frac{\mathrm{d}\,P_\mu^1}{\mathrm{d}\,\eta}\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$ si et seulement si $\mu \le \mu_m^1$.*

B.7. **Localisation des racines de P_μ^m.**

Théorème B.24. *Les racines du polynôme P_μ^m sont toutes situées dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$*
- *pour $m \ge 8$ et pour tout $\mu > 0$;*
- *pour $1 \le m \le 7$, si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$, où μ_m est la plus petite racine positive de $q_m(\mu) = P_\mu^m\left(\frac{1}{2}\right)$.*

Démonstration. En rassemblant les résultats des propositions B.19, B.20, B.21, B.22 et en appliquant la proposition B.23, on voit que toutes les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta < \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu < \mu_m$. Comme l'ensemble des racines varie continûment en fonction de μ, les racines du polynôme P_μ^m sont dans le demi-plan $\left\{\operatorname{Re}\eta \le \frac{1}{2}\right\}$ si et seulement si $0 < \mu \le \mu_m$. $\square$

Références

[1] Selberg A., Bemerkninger om et multiplet integral, *Norske Mat. Tidsskr.* **26**(1944), 71-78.

[2] Gantmacher F.R., *Théorie des matrices, t.2, Questions spéciales et applications*, Dunod, Paris, 1965.

[3] Boas, Harold P., The Lu Qi-Keng conjecture fails generically, *Proc. Amer. Soc.*, **124** (1996), 2021-2027.

[4] Boas H., Fu Siqi, Straube E., The Bergman kernel function: explicit formulas and zeroes, *Proc. Amer. Math. Soc.,* **127**(3) (1999), 805-811.

[5] Yin Weiping, Lu Keping, Roos Guy, New classes of domains with explicit Bergman kernel, *Science in China* Ser. A Mathematics, **47**(2004), 352-371; `arXiv:math.CV/0301322`.

[6] Roos, Guy, Weighted Bergman kernels and virtual Bergman kernels, *Proceedings SCV 2004 Beijing*, *Science in China* Ser. A Mathematics, **48** Supp. (2005), 225-237; `arXiv:math.CV/0410109`.

[7] Yin Weiping, Lu Qi-Keng conjecture and Hua domain (dedicated to Lu Qi-Keng on the occasion of his 80th birthday), `arXiv:math.CV/0605428 v2`, 29 May 2006.

Département de mathématiques, Faculté des Sciences, Université Saad Dahlab, Route de Soumâa, BP 270, Blida, Algérie

E-mail address: `fz_demmad@mail.univ-blida.dz, fz_demmad@yahoo.fr`