# Albert-Algebren
# über
# lokal geringten Räumen

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

dem Fachbereich Mathematik der
FernUniversität Hagen
vorgelegt von

**Günter Achhammer**

Hagen 1995

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Als Albert-Algebren über einem Körper $k$ werden die endlich-dimensionalen zentral-einfachen exzeptionellen Jordan-Algebren über $k$ bezeichnet. Diese sind mit den Formen der zerfallenden Albert-Algebra $H_3(\mathrm{Zor}(k))$ identisch, wobei $\mathrm{Zor}(k)$ die Algebra der Zornschen Vektormatrizen, also die zerfallende Oktonionenalgebra über $k$ bezeichne. Unter einer Form von $H_3(\mathrm{Zor}(k))$ versteht man dabei eine Jordan-Algebra $J$ über $k$, deren Erweiterung $J \otimes_k \overline{k}$ zum algebraischen Abschluß $\overline{k}$ von $k$ isomorph zu der zerfallenden Albert-Algebra $H_3(\mathrm{Zor}(\overline{k}))$ über $\overline{k}$ ist. Albert-Algebren stehen in engem Zusammenhang mit Azumaya-, d. h. assoziativen zentral-einfachen, Algebren vom Grad 3 über $k$. Dies wird anhand zweier von J. Tits gefundenen Konstruktionen von Albert-Algebren deutlich, die zunächst von Tits nur im Fall $\mathrm{char}\, k \neq 2$ definiert (vgl. [J1]), später aber von McCrimmon unabhängig von der Charakeristik ([M1]) formuliert wurden. In der ersten dieser sogenannten Tits-Konstruktionen geht man dabei von einer Azumaya-Algebra $A$ über $k$ vom Rang 3 aus und definiert mit Hilfe der Adjunkten, der reduzierten Norm und Spur von $A$ und eines invertierbaren Skalars aus $k$ eine Jordan-Struktur auf dem $k$-Vektorraum $A \oplus A \oplus A$, und in der zweiten Tits-Konstruktion legt man ein Paar $(B, *)$ zugrunde, wobei $B$ eine Azumaya-Algebra über einem Körper $K$ vom Grad 3 und $*$ eine Involution zweiter Art auf $B$ ist, so daß $k$ der Fixkörper von $*|_K$ ist, und definiert dann mit Hilfe der Adjunkten, der reduzierten Norm und Spur von $B$, der Involution $*$ und eines invertierbaren Elements aus $H(B, *)$ bzw. $k$ eine Jordan-Struktur auf dem $k$-Vektorraum $H(B, *) \oplus B$. McCrimmon zeigte, daß man eine Albert-Algebra, die eine Unteralgebra der Form $A^+$ bzw. $H(B, *)$, $A, H(B, *)$ wie eben beschrieben, enthält, als erste Tits-Konstruktion aus $A$ bzw. zweite Tits-Konstruktion aus $H(B, *)$ erhält, und daß in jeder Albert-Algebra eine Unteralgebra der Form $A^+$ oder $H(B, *)$ als Unteralgebra enthalten ist. Jede Albert-Algebra über einem Körper $k$ ist folglich eine erste oder zweite Tits-Konstruktion. Basierend auf der zweiten Tits-Konstruktion wurde dann von Petersson und Racine [P-R1] der Tits-Prozeß definiert, der die erste und zweite Tits-Konstruktion als Spezialfälle enthält, und mit dem aus Algebren allgemeineren Typs Jordan-Algebren konstruiert werden können. Der Tits-Prozeß spielt in der Theorie der Jordan-Algebren eine der Cayley-Dickson-Verdopplung in der Theorie der alternativen Algebren vergleichbare Rolle, denn Petersson und Racine [P-R2] bewiesen, daß alle einfachen Jordan-Algebren vom Grad 3 über einem Körper $k$ bis auf einige Ausnahmen im Fall $\mathrm{char}\, k = 3$ durch mehrfache Anwendung des Tits-Prozesses aus $k1$ konstruiert werden können.

Die Hauptergebnisse dieser Arbeit lassen sich nun folgendermaßen beschreiben. Zunächst wird analog der Vorgehensweise von Petersson [P] bei der Cayley-Dickson-Verdopplung der Tits-Prozeß auf geringte Räume übertragen, wobei durch die hier betrachtete Situation auch über affinen Schemata, also über Ringen, eine Verallgemeinerung des ursprünglichen Tits-Prozesses erzielt wird. Dann wird gezeigt, daß jede Albert-Algebra über einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$, die eine Unteralgebra der Form $\mathcal{A}^+$ oder $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *)$ enthält, wobei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 und $(\mathcal{B}, *)$ eine $\mathcal{O}'_X$-Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 mit einer Involution $*$ ist, so daß $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *) = \mathcal{O}_X$ gilt, und $\mathcal{O}'_X$ eine lokal freie $\mathcal{O}_X$-Algebra vom Rang 2 ist, ein Tits-Prozeß ist. Als Anwendungen ergeben sich insbesondere explizit exzeptionelle Jordan-Algebren über Ringen.

Im wesentlichen umfassen die einzelnen Paragraphen folgenden Inhalt.
In Paragraph 1 werden zunächst die Begriffe Jordan-Algebra, Albert-Algebra und kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt über geringten Räumen definiert. Aus dem entsprechenden Satz über Ringen wird gefolgert, daß eine kubische Form $(N, \#, 1)$ mit Adjunkter und Basispunkt auf dem unterliegenden $\mathcal{O}_X$-Modul eine Jordan-Algebra-Struktur induziert. Die entsprechende Jordan-Algebra wird mit $\mathcal{J}(N, \#, 1)$ bezeichnet. Weiter wird bewiesen, daß für eine Albert-Algebra $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ über einem lokal geringten Raum $X$ $(N, \#, 1)$ eindeutig bestimmt ist. Zuletzt wird mit Hilfe des treuflachen Abstiegs gezeigt, daß es zu einer Albert-Algebra über einem Schema immer eine kubische Form $(N, \#, 1)$ mit Adjunkter und Basispunkt gibt, so daß $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ gilt.

In Paragraph 2 wird der Tits-Prozeß auf geringte Räume übertragen. Dazu wird (analog wie in der Situation über Ringen, vgl. [P-R1]) ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}'_X)$, eine assoziative $\mathcal{O}'_X$-Algebra $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}^+ = \mathcal{J}(N, \#, 1)$, eine Involution $*$ auf $\mathcal{B}$, ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{O}_X$ bzw. $\mathcal{A}$ insbesondere eine Untergarbe der Garbe der hermiteschen Elemente von $\mathcal{O}'_X$ bzw. $\mathcal{B}$ ist, so vorgegeben, daß diese Daten geeignete Bedingungen erfüllen. Dann wird gezeigt, daß man nicht nur auf $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ (analog wie in [P-R1]), sondern auch auf $\mathcal{A} \oplus \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1 mit passenden Eigenschaften ist, eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt definieren kann, so daß also eine $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra-Struktur auf $\mathcal{A} \oplus \mathcal{P}$ erklärt wird. Aus dem Tits-Prozeß wird dann als Spezialfall eine entsprechende Verallgemeinerung der ersten Tits-Konstruktion gefolgert. Außerdem wird gezeigt, daß sich wie im klassischen Fall jeder Tits-Prozeß in eine erste Tits-Konstruktion einbetten läßt.

In Paragraph 3 werden die oben erwähnten Aussagen über Albert-Algebren bewiesen. Als entscheidendes Hilfsmittel wird dazu gezeigt, daß eine Albert-Algebra über einem lokalen Ring, die eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 als Unteralgebra enthält, analog wie in der Situation über einem Körper eine klassische erste Tits-Konstruktion ist.

In Paragraph 4 werden Beispiele für den Tits-Prozeß behandelt. Insbesondere erhält man dabei aus Azumaya-Algebren über Kurven vom Geschlecht Null bzw. dem $n$-dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^n_R$ über einem Ring mittels der ersten Tits-Konstruktion Albert-Algebren über Kurven vom Geschlecht Null bzw. $\mathbb{P}^n_R$. Die globalen Schnitte dieser Albert-Algebren über dem $\mathbb{P}^n_R$ liefern dann explizit

Jordan-Algebren über $R$, und es wird mit Hilfe der Glennie-Identität $G_8$ verifiziert, daß ein Teil dieser Algebren exzeptionell ist. Als Unteralgebren solcher erhält man z. B. 16-dimensionale exzeptionelle Algebren, die sich kanonisch als Unteralgebren der zerfallenden Albert-Algebra $H_3(\mathrm{Zor}(R))$ auffassen lassen.

Der Anhang dient als Ergänzung, in dem Polynomabbildungen über geringten Räumen betrachtet werden. Insbesondere wird gezeigt, daß die angegebene Definition den Begriff der Polynomabbildung über Ringen (vgl. [Ro]) verallgemeinert. Weiter wird der Differentialkalkül entwickelt, so weit er in den vorhergehenden Paragraphen benötigt wird, und es wird bewiesen, daß sich lineare bzw. quadratische bzw. kubische Abbildungen mit Polynomabbildungen vom Grad 1 bzw. 2 bzw. 3 identifizieren lassen.

Es wird von den üblichen Standardbezeichnungen Gebrauch gemacht. Insbesondere werden Terminologie und Begriffe aus der algebraischen Geometrie im Sinne von R. Hartshorne [H] verwendet.

Herrn Prof. Dr. H.P. Petersson möchte ich für die Überlassung des Themas und die engagierte Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit meinen besonderen Dank aussprechen. Herrn Prof. Dr. M. Knus danke ich für wertvolle Hinweise zu der Theorie der Azumaya-Algebren.

# 1 Jordan-Algebren über geringten Räumen

Im folgenden bezeichne $X$ einen geringten Raum, $\mathcal{O}_X$ die zugehörige Strukturgarbe und $\mathcal{M}$ einen $\mathcal{O}_X$-Modul. Definition und alle verwendeten Eigenschaften von Polynomabbildungen sind im Anhang erläutert. $\mathcal{O}_X$-Algebren, die Basiserweiterungen von $\mathcal{O}_X$ bezeichnen, seien immer kommutativ, assoziativ und unitär.

Ist $f : \mathcal{M} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})$ eine quadratische Abbildung und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra, dann wird die quadratische Abbildung, die als Komposition der Morphismen

$$\mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{f_\mathcal{A}} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}) \otimes \mathcal{A} \xrightarrow{\text{kan}} \mathcal{E}nd_{\mathcal{A}}(\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})$$

entsteht, als die Erweiterung von $f$ auf $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ bezeichnet.

## 1.1 Definition

$(\mathcal{J}, U, 1)$ ist eine (quadratische, unitäre) Jordan-Algebra über $X$, falls $\mathcal{J}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $1 \in H^0(X, \mathcal{J})$ ist, und folgende gemäß A.31 äquivalente Bedingungen gelten:

a) 1) $U : \mathcal{J} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}),\ x \mapsto U_x$, ist eine quadratische Abbildung.

2) $U_1 = \mathrm{id}_\mathcal{J}$.

3) $U_{U_x(y)} = U_x \circ U_y \circ U_x \quad$ für $x, y \in \mathcal{J}$[†].

4) $U_x \circ U_{y,z}(x) = U_{x,U_x(z)}(y) \quad$ für $x, y, z \in \mathcal{J}$[†].

5) Für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ gelten die Aussagen 3) und 4) für die Erweiterung von $f$ auf $\mathcal{J} \otimes \mathcal{A}$.

b) 1) $U \in \mathrm{Pol}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}, \mathrm{Pol}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J}, \mathcal{J}))$.

2) $U_1 = \mathrm{id}_\mathcal{J}$.

3) $U_{U_x(y)} = U_x \circ U_y \circ U_x \quad$ für $x, y \in \mathcal{J}$[‡].

4) $U_x \circ U_{y,z}(x) = U_{x,U_x(z)}(y) \quad$ für $x, y, z \in \mathcal{J}$[‡].

Quadratische Jordan-Algebren über Ringen seien wie üblich definiert (vgl. [J3], 1.3.4).

---

[†] D. h., es gibt eine offene Teilmenge $V$ von $X$ mit $x, y, z \in \mathcal{J}(V)$.

[‡] D. h., es gibt eine $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ und eine offene Teilmenge $V$ von $X$ mit $x, y, z \in (\mathcal{J} \otimes \mathcal{A})(V)$.

## 1.2 Bemerkung

$(\mathcal{J}, U, 1)$, bestehend aus einem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{J}$, einer quadratischen Abbildung $U : \mathcal{J} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J})$ und einem globalen Schnitt $1 \in H^0(X, \mathcal{J})$, ist eine Jordan-Algebra über $X$

a) genau dann, wenn $(\mathcal{J}(V), U(V), 1|_V)$ für jede offene Teilmenge $V \subset X$ eine Jordan-Algebra über $\mathcal{O}(V)$ ist,

b) genau dann, wenn $(\mathcal{J}_P, U_P, 1_P)$ für jedes $P \in X$ eine Jordan-Algebra über $\mathcal{O}_P$ ist,

c) genau dann, wenn die Bedingungen 3) und 4) aus Definition 1.1 a) und deren vollständige Linearisierungen, also die folgenden Identitäten für $x, y, z, w \in \mathcal{J}$ gelten:

6) $U_x \circ U_y \circ U_{x,z} + U_{x,z} \circ U_y \circ U_x = U_{U_x(y), U_{x,z}(y)}$,

7) $U_x \circ U_y \circ U_z + U_z \circ U_y \circ U_x + U_{x,z} \circ U_y \circ U_{x,z} = U_{U_x(y), U_z(y)} + U_{U_{x,z}(y)}$,

8) $U_x \circ U_y \circ U_{z,w} + U_{x,w} \circ U_y \circ U_{x,z} + U_{z,w} \circ U_y \circ U_x + U_{x,z} \circ U_y \circ U_{x,w}$
$= U_{U_{x,w}(y), U_{x,z}(y)} + U_{U_x(y), U_{z,w}(y)}$,

9) $U_{x,z} \circ U_{y,w}(x) + U_x \circ U_{y,w}(z) = U_{x, U_{x,z}(w)}(y) + U_{z, U_x(w)}(y)$
$= U_{z, U_x(y)}(w) + U_{x, U_{x,z}(y)}(w)$.

Beweis:

a) erhält man aus Definiton und Bemerkung A.16 und b) folgt, da Identitäten in Polynomabbildungen genau dann gelten, wenn sie lokal gelten. c) ergibt sich mit Hilfe von a) aus [J3], 1.3. □

Zur Vereinfachung werden ab jetzt konstante, multilineare, quadratische und kubische Abbildungen mit den jeweils gemäß A.31 induzierten Polynomabbildungen identifiziert. Das heißt insbesondere, Identitäten dieser Abbildungen werden als Identitäten von Polynomabbildungen betrachtet. Daher wird auch der Ausdruck „$x \in \mathcal{M}$“ oder „$x$ ist lokaler Schnitt in $\mathcal{M}$“, falls nicht explizit etwas anderes vermerkt wird, in dem Sinne verwendet, daß es eine $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ und eine offene Teilmenge $V \subset X$ gibt mit $x \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})(V)$.

## 1.3 Definition

$(\mathcal{J}, U, 1)$ und $(\mathcal{J}', U', 1')$ seien Jordan-Algebren über $X$.
$f : (\mathcal{J}, U, 1) \to (\mathcal{J}', U', 1')$ heißt ein Homomorphismus von Jordan-Algebren, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1) $f : \mathcal{J} \to \mathcal{J}'$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus.

2) $f(1) = 1'$.

3) $f(U_x(y)) = U'_{f(x)}(f(y))$ für $x, y \in \mathcal{J}$.

Die Jordan-Algebren über $X$ zusammen mit diesen Homomorphismen bilden eine Kategorie.

## 1.4 Bemerkung

Sei $\tau : X \to X'$ ein Morphismus geringter Räume und $(\mathcal{J}, U, 1)$ bzw. $(\mathcal{J}', U', 1')$ eine Jordan-Algebra über $X$ bzw. $X'$. Dann ist $(\tau^*\mathcal{J}', \tau^*U', 1')$ bzw. $(\tau_*\mathcal{J}, \tau_*U, 1)$ eine Jordan-Algebra über $X$ bzw. $X'$.

BEWEIS:
Wegen $\tau_*\mathcal{J}(V') = \mathcal{J}(\tau^{-1}(V'))$ für jede offene Teilmenge $V' \subset X'$ ist die Aussage für $\tau_*$ klar, und wegen $(\tau^*\mathcal{J}')_P \cong \mathcal{J}'_{\tau(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{X',\tau(P)}} \mathcal{O}_{X,P}$ für $P \in X$ folgt sie für $\tau^*$ gemäß 1.2 b). $\square$

## 1.5 Beispiel

Ist $\mathcal{A}$ eine assoziative, unitäre $\mathcal{O}_X$-Algebra, so wird durch $U_x(y) := xyx$ für $x, y \in \mathcal{A}$ eine quadratische Abbildung $U : \mathcal{A} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{A})$, $x \mapsto U_x$, definiert, und $(\mathcal{A}, U, 1)$, wobei $1 \in H^0(X, \mathcal{A})$ das Einselement in $\mathcal{A}$ bezeichne, ist eine Jordan-Algebra über $X$, die mit $\mathcal{A}^+$ bezeichnet wird.

## 1.6 Satz

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein affines Schema mit $R := H^0(X, \mathcal{O}_X)$.
a) Ist $R$ noethersch, so liefert der Funktor $(\mathcal{J}, U, 1) \mapsto (\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{U}, 1)$ eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der als Moduln endlich erzeugten Jordan-Algebren über $R$ und der Kategorie der als Moduln kohärenten Jordan-Algebren über $X$.
b) Der gleiche Funktor liefert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der als Moduln endlich erzeugten projektiven Jordan-Algebren über $R$ und der Kategorie der als Moduln lokal freien Jordan-Algebren über $X$.

BEWEIS:
Die Behauptungen folgen aus der Äquivalenz der entspechenden Kategorien von Moduln in Verbindung mit A.21 a), b). $\square$

## 1.7 Definition

Sei $\mathcal{J}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul. Ein Tripel $(N, \#, 1)$ heißt kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\mathcal{J}$, falls $N : \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X$ eine kubische Form, $\# : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ eine quadratische Abbildung und $1 \in H^0(X, \mathcal{J})$ ist, so daß für $x, y \in \mathcal{J}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) $x^{\#\#} = N(x)x$,

(2) $N(1) = 1$,

(3) $T(x^{\#}, y) = D_y N(x)$ für $T(x,y) := -D_x D_y \log N(1)$,

(4) $1^{\#} = 1$,

(5) $1 \times y = T(y)1 - y$ mit $T(y) := T(y,1)$ und $x \times y := (x+y)^{\#} - x^{\#} - y^{\#}$.

Die symmetrische Bilinearform $T$ heißt Spurform von $\mathcal{J}$.

### 1.8 Theorem

Sei $(N, \#, 1)$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf dem $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{J}$. Dann wird durch $U_x(y) := T(x,y)x - x^{\#} \times y$ für $x, y \in \mathcal{J}$ eine quadratische Abbildung $U : \mathcal{J} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J})$, $x \mapsto U_x$, definiert, und $\mathcal{J}(N, \#, 1) := (\mathcal{J}, U, 1)$ ist eine quadratische Jordan-Algebra. Außerdem gelten folgende Identitäten für $x, y, z \in \mathcal{J}$:

(6) $$x^3 - T(x)x^2 + S(x)x - N(x)1 = 0, \quad S(x) := T(x^{\#}),$$

(7) $$x^{\#} = x^2 - T(x)x + S(x)1,$$

(8) $$T(x \times y) = T(x)T(y) - T(x,y),$$

(9) $$T(x \times y, z) = T(x, y \times z),$$

(10) $$x^{\#} \times (x \times y) = N(x)y + T(x^{\#}, y)x,$$

(11) $$x \times (x^{\#} \times y) = N(x)y + T(x,y)x^{\#},$$

(12) $$x \times x^{\#} = [T(x^{\#})T(x) - N(x)]1 - T(x^{\#})x - T(x)x^{\#}.$$

$x \in \mathcal{J}$ ist genau dann invertierbar, falls $N(x) \in \mathcal{O}_X$ invertierbar ist, und in diesem Fall gilt:

(13) $$x^{-1} = N(x)^{-1}x^{\#}.$$

<u>BEWEIS:</u>
$U : \mathcal{J} \to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{J})$ ist nach Definition von $T$ und $\#$ eine quadratische Abbildung. Gemäß [M1] ist $(\mathcal{J}(V), U(V), 1|_V)$ für jede offene Teilmenge $V$ von $X$ eine quadratische Jordan-Algebra über $\mathcal{O}(V)$, in der die Identitäten (6)–(13) erfüllt sind. Gemäß Bemerkung 1.2 ist dann $(\mathcal{J}, U, 1)$ eine Jordan-Algebra über $X$, in der die Bedingungen (6)–(13) gelten. $\square$

Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $P \in X$, dann bezeichne $\mathfrak{m}_P$ das maximale Ideal des lokalen Ringes $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{X,P}$ und $\boldsymbol{\kappa}(P)$ den Restklassenkörper $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P$. Für einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ sei $\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P)$.

Im folgenden bezeichne $R$ einen kommutativen, assoziativen und unitären Ring.

Eine Jordan-Algebra $(\mathcal{J}, U, 1)$ wird oft einfach mit $\mathcal{J}$ abgekürzt. Zor$(R)$ bezeichne die Algebra der Zornschen Vektormatrizen über $R$ ([Z]). Zor$(R)$ ist eine zerfallende Oktonionenalgebra und bis auf Isomorphie die einzige zerfallende Oktonionenalgebra über $R$, falls $R$ ein Körper ist. Sei nun $k$ ein Körper. Wie in [J3], Definition 7.7.1 versteht man unter einer Albert-Algebra $J$ über $k$ eine Form von $H_3(\mathrm{Zor}(k))$, d. h. $J$ ist eine Jordan-Algebra über $k$, für die es eine Körpererweiterung $K$ über $k$ gibt, so daß gilt:

$$J \otimes_k K \cong H_3(\mathrm{Zor}(K)).$$

Nach [M2], Theorem 6 ist dies äquivalent dazu, daß $\mathcal{J}$ eine zentral-einfache exzeptionelle Jordan-Algebra über $k$ ist.

### 1.9 Definition

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum. Eine Jordan-Algebra $\mathcal{J}$ über $X$ heißt eine Albert-Algebra, falls $\mathcal{J}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul lokal frei ist, und $\mathcal{J}(P) = \mathcal{J}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P)$ für jedes $P \in X$ eine Albert-Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ ist.

### 1.10 Satz

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Schema und $\mathcal{J}$ eine Jordan-Algebra über $X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{J}$ ist eine Albert-Algebra über $X$.

b) Es gibt eine Überdeckung $V_i \to X$ in der étalen Topologie§ auf $X$, so daß gilt: $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{V_i} \cong H_3(\mathrm{Zor}(\mathcal{O}_{V_i}))$.

c) Es gibt eine Überdeckung $V_i \to X$ in der flachen Topologie§ auf $X$, so daß gilt: $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{V_i} \cong H_3(\mathrm{Zor}(\mathcal{O}_{V_i}))$.

Beweis:

a)$\Rightarrow$b) erhält man aus [L2], Theorem 3, und b)$\Rightarrow$c) ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Begriffe der flachen bzw. étalen Topologie.

c)$\Rightarrow$a): Das Schema $V := \coprod V_i$ ist nach Voraussetzung treuflach über $X$. Dies impliziert gemäß [K-O], Lemma 3.6, daß $\mathcal{J}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul ist, da $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_V$ ein lokal freier $\mathcal{O}_V$-Modul ist. Außerdem folgt nach Voraussetzung, daß es zu jedem $P \in X$ eine Körpererweiterung $K_P$ über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ gibt, so daß gilt: $\mathcal{J}(P) \otimes_{\boldsymbol{\kappa}(P)} K_P \cong H_3(\mathrm{Zor}(K_P))$, d. h. $\mathcal{J}(P)$ ist eine Albert-Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$. $\square$

### 1.11 Bemerkung

a) Sei $J$ eine Albert-Algebra über $R$, d. h. gemäß 1.9 ist $J$ als $R$-Modul projektiv, und $J \otimes_R \boldsymbol{\kappa}(P)$ ist für jedes $P \in \operatorname{Spec} R$ eine Albert-Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$. Dann ist der kanonische Homomorphismus $R \to J,\ r \mapsto r \cdot 1$, injektiv, da $J$ lokal frei und der Homomorphismus damit lokal injektiv ist, d. h. $J$ ist unitär treu (vgl. [M3]),

§vgl. [Mi]

und damit insbesondere treu als $R$-Modul, d. h. $\operatorname{Ann}_R J = \{0\}$.
b) Sei $J$ eine Jordan-Algebra über $R$. Gemäß [J3], 7.7.1, 7.7.3 heißt $J$ Albert-Algebra, falls es einen Körper $K$ über $R$ gibt, so daß $J \otimes_R K \cong H_3(\mathrm{Zor}(K))$ gilt, und $J$ ein $R$-Untermodul von $J \otimes_R K$ ist. Insbesondere ist $J$ dann prim. Setzt man voraus, daß $J$ prim und als $R$-Modul projektiv ist, so stimmt diese Definition mit Definition 1.9 überein. Denn im Fall $J$ prim ist gemäß [J3], 7.6.5 das Zentroid $\Gamma$ von $J$ ein Integritätsring, und $J$ als $\Gamma$-Modul torsionsfrei, insbesondere folgt aus $rx = 0$ für $x \in J$, $r \in \Gamma$, $r \neq 0$ notwendig $x = 0$. Ist nun $J \otimes_R \boldsymbol{\kappa}(P)$ für jedes $P \in \operatorname{Spec} R$ eine Albert-Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$, so ist die kanonische Abbildung $R \to \Gamma$, $r \mapsto r \cdot \mathrm{id}_J$, wegen $\operatorname{Ann}_R J = \{0\}$ (gemäß a)) injektiv, d. h. $R$ ist ein Integritätsring, und $J$ ist als $R$-Modul torsionsfrei. Bezeichnet $\operatorname{Quot} R$ den Quotientenkörper von $R$, so ist folglich die Abbildung $J \to J \otimes_R \operatorname{Quot}(R)$ injektiv. Wegen $\{0\} \in \operatorname{Spec} R$ gibt es nun eine Körpererweiterung $K$ über $\operatorname{Quot} R$, so daß gilt: $J \otimes_R K \cong H_3(\mathrm{Zor}(K))$, und $J$ ist somit ein $R$-Untermodul von $J \otimes_R K$. Ist diese Bedingung andererseits erfüllt, so folgt

$$(J \otimes_R \boldsymbol{\kappa}(P)) \otimes_{\boldsymbol{\kappa}(P)} (\boldsymbol{\kappa}(P) \otimes_R K) \cong H_3(\mathrm{Zor}(\boldsymbol{\kappa}(P) \otimes_R K))$$

für jedes $P \in \operatorname{Spec} R$, d. h. $J \otimes_R \boldsymbol{\kappa}(P)$ ist eine Albert-Algebra für jedes $P \in \operatorname{Spec} R$.
c) Ist $\tau : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ ein Morphismus geringter Räume und $\mathcal{J}$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$, dann ist $\tau^* \mathcal{J}$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_{X'}$.

## 1.12 Satz

$(J, U, 1)$ sei eine Jordan-Algebra über $R$, $N$ bzw. $S$ bzw. $T$ sei eine kubische bzw. quadratische bzw. lineare Abbildung von $J$ nach $R$, und es gelte:

$$x^3 - T(x)x^2 + S(x)x - N(x)1 = 0 \quad \text{für } x \in J.$$

Weiter sei $J$ als $R$-Modul projektiv und, für jedes $P \in \operatorname{Spec} R$ gebe es ein $u \in J \otimes_R \boldsymbol{\kappa}(P)$, so daß $1, u, u^2$ linear unabhängig über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ sind. Dann sind $T$, $S$ und $N$ eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u>
Es genügt zu zeigen, daß $T$, $S$ und $N$ lokal eindeutig bestimmt sind. Sei also $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring mit Restklassenkörper $k := R/\mathfrak{m}$. Als projektiver $R$-Modul ist $J$ frei. Nach Voraussetzung gibt es ein $u \in J$, so daß $\overline{1}, \overline{u}, \overline{u}^2$ mit $\overline{u} := u + \mathfrak{m}J \in J/\mathfrak{m}J$ linear unabhängig über $k$ sind. Damit sind auch die Elemente $1, u, u^2$ über $R$ linear unabhängig. Sei nun $N'$ bzw. $S'$ bzw. $T'$ eine weitere kubische bzw. quadratische bzw. lineare Abbildung von $J$ nach $R$, so daß gilt:

$$x^3 - T'(x)x^2 + S'(x)x - N'(x)1 = 0 \quad \text{für } x \in J.$$

Dann ist $F := T' - T$ bzw. $G := S' - S$ bzw. $H := N' - N$ eine lineare bzw. quadratische bzw. kubische Abbildung von $J$ nach $R$, und man erhält für $x \in J$:

$$F(x)x^2 - G(x)x + H(x)1 = 0.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $1, u, u^2$ folgt:

$$F(u) = G(u) = H(u) = 0.$$

Differenzieren der obigen Gleichung nach $y$ an der Stelle $x$ ergibt wegen $x^2 = U_x(1)$:

$$F(y)x^2 + F(x)U_{x,y}(1) - G(x,y)x - G(x)y + D_y H(x)1 = 0. \tag{$*$}$$

$x = u$ liefert:

$$F(y)u^2 = F(y)u^2 + F(u)U_{u,y}(1) - G(u)y = G(u,y)u - D_y H(u)1.$$

Damit erhält man:

$$F(y) = 0 = G(u,y) \quad \text{für alle } y \in J.$$

Dies und $y = u$ eingesetzt in $(*)$ ergibt:

$$-G(x)u + D_u H(x)1 = 0,$$

also $G(x) = 0$ für alle $x \in J$. Dies impliziert auch $H(x) = 0$ für alle $x \in J$. □

## 1.13 Bemerkung

a) Ist $J$ eine nichtausgeartete generisch algebraische Jordan-Algebra vom Grad 3 über einem Körper $k$, der unendlich viele Elemente enthält, dann gibt es ein Element $u \in J$, so daß $1, u, u^2$ linear unabhängig sind.
b) Sei $J$ eine Albert-Algebra über einem Körper $k$ oder $J \cong A^+$ mit einer Azumaya-Algebra vom Grad 3 über $k$. Dann ist $J$ nichtausgeartet generisch algebraisch vom Grad 3 über $k$. Nach a) gibt es also ein $u \in J$, so daß $1, u, u^2$ linear unabhängig sind, falls $k$ unendlich viele Elemente besitzt. Ein solches Element gibt es aber auch, falls $k$ ein endlicher Körper ist, da $J$ in diesem Fall zerfällt. □

## 1.14 Korollar

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $(\mathcal{J}, U, 1)$ eine Jordan-Algebra über $X$, wobei $\mathcal{J}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul lokal frei sei. $N$ bzw. $S$ bzw. $T$ sei eine kubische bzw. quadratische bzw. lineare Abbildung von $\mathcal{J}$ nach $\mathcal{O}_X$, und es gelte:

$$x^3 - T(x)x^2 + S(x)x - N(x)1 = 0 \quad \text{für } x \in J.$$

Weiter gebe es für jedes $P \in X$ ein $u \in \mathcal{J}(P)$, so daß $1, u, u^2$ linear unabhängig über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ sind. Dann sind $N$, $S$, und $T$ eindeutig bestimmt.

Beweis:
Die Behauptung gilt, da $N_P$, $S_P$ und $T_P$ für jedes $P \in X$ gemäß 1.12 eindeutig bestimmt sind. □

## 1.15 Korollar

$\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ sei eine Albert-Algebra über einem lokal geringten Raum $X$. Dann sind $N$ und $\#$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS:
Gemäß 1.8 (6) und 1.13 erfüllen $\mathcal{J}$ und $N$, $T \circ \#$, $T$ die Voraussetzungen von Korollar 1.14, das folglich die Eindeutigkeit von $N$, $T \circ \#$, $T$ liefert. Nach 1.8 (7) ist damit auch $\#$ eindeutig bestimmt. $\square$

## 1.16 Satz

Sei $(J, U, 1)$ eine Albert-Algebra über $R$. Dann gibt es eine kubische Abbildung $N : J \to R$ mit Adjunkter $\# : J \to J$ und Basispunkt 1, so daß gilt:

$$J = J(N, \#, 1).$$

BEWEIS:
Nach [L2], Theorem 3 gibt es eine treuflache $R$-Algebra $R'$ und einen Isomorphismus

$$\varphi : J \otimes_R R' \longrightarrow H_3(\mathrm{Zor}(R')).$$

Gemäß der Freudenthal-Konstruktion [M1] gilt:

$$H_3(\mathrm{Zor}(R')) = \mathcal{J}(\tilde{N}, \tilde{\#}, \mathbb{1}),$$

wobei $\tilde{N}$ die Determinante, $\tilde{\#}$ die Adjunkte und $\mathbb{1}$ die Einheitsmatrix bezeichne. Da $R'$ treuflach über $R$ und $J$ als $R$-Modul projektiv ist, sind die kanonischen Homomorphismen $R \to R'$, $r \mapsto r \cdot 1_{R'}$, und $J \to J \otimes_R R'$, $x \mapsto x \otimes 1_{R'}$, injektiv, d. h. $R$ kann als Unterring von $R'$ und $J$ als $R$-Untermodul von $J \otimes_R R'$ aufgefaßt werden.
Als nächstes wird gezeigt, daß $\tilde{N}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))$, $\tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))$ und $\tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))$ für $x \in J$ in $R$ liegen.
Es gilt

$$\begin{aligned} J \otimes_R R' \otimes_R R' &\cong (J \otimes_R R') \otimes_{R'} (R' \otimes_R R') \quad \text{und} \\ R' \otimes_R J \otimes_R R' &\cong (R' \otimes_R R') \otimes_{R'} (J \otimes_R R'), \end{aligned}$$

wobei $R' \otimes_R R'$ kanonisch, d.h. vermöge $r(s \otimes t) = s \otimes rt$ für $r, s, t \in R'$, als $R'$-Algebra aufgefaßt wird. Bezüglich dieser Isomorphismen ist $J \otimes_R R' \otimes_R R'$ bzw. $R' \otimes_R J \otimes_R R'$ eine Jordan-Algebra über $R' \otimes_R R'$. $\tilde{U}$ bzw. $U'$ (vgl. A.3c)) bezeichne die Erweiterung von $U$ auf $J \otimes R' \otimes R'$ bzw. $R' \otimes J \otimes R'$. Nun wird die $R' \otimes_R R'$-lineare Bijektion

$$\begin{aligned} \tau : J \otimes_R R' \otimes_R R' &\longrightarrow R' \otimes_R J \otimes_R R' \\ x \otimes r \otimes s &\longmapsto r \otimes x \otimes s \end{aligned}$$

betrachtet. $\tau$ ist ein Homomorphismus von Jordan-Algebren. Denn seien $\sum\limits_i x_i \otimes r_i \otimes s_i, \sum\limits_j y_j \otimes r'_j \otimes s'_j \in J \otimes R' \otimes R'$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\tau(\tilde{U}_{\sum\limits_i x_i \otimes r_i \otimes s_i}(\sum_j y_j \otimes r'_j \otimes s'_j)) \\
&\quad = \tau(\sum_{i,j} U_{x_i}(y_j) \otimes r_i^2 r'_j \otimes s_i^2 s'_j + \sum_{\substack{i,k,j \\ i<k}} U_{x_i,x_k}(y_j) \otimes r_i r_k r'_j \otimes s_i s_k s'_j) \\
&\quad = \sum_{i,j} r_i^2 r'_j \otimes U_{x_i}(y_j) \otimes s_i^2 s'_j + \sum_{\substack{i,k,j \\ i<k}} r_i r_k r'_j \otimes U_{x_i,x_k}(y_j) \otimes s_i s_k s'_j \\
&\quad = U'_{\sum\limits_i r_i \otimes x_i \otimes s_i}(\sum_j r'_j \otimes y_j \otimes s'_j) \\
&\quad = U'_{\tau(\sum\limits_i x_i \otimes r_i \otimes s_i)}(\tau(\sum_j y_j \otimes r'_j \otimes s'_j)).
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man die kanonischen Isomorphismen von Jordan-Algebren über $R' \otimes_R R'$

$$\begin{aligned}
H_3(\mathrm{Zor}(R')) \otimes_R R' &\cong H_3(\mathrm{Zor}(R')) \otimes_{R'} (R' \otimes_R R') \cong H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes_{R'} (R' \otimes_R R'))) \\
&\cong H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes_R R')) \cong H_3(\mathrm{Zor}((R' \otimes_R R') \otimes_{R'} R')) \\
&\cong R' \otimes_R H_3(\mathrm{Zor}(R')),
\end{aligned}$$

so gibt es einen Automorphismus von Jordan-Algebren über $R' \otimes_R R'$

$$\psi : H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes R')) \to H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes R')),$$

der durch die Kommutativität des folgenden Diagramms definiert wird:

$$\begin{tikzcd}
J \otimes R' \otimes R' \arrow[r, "\varphi \otimes \mathbb{1}"] \arrow[d, "\tau"'] & H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes R')) \arrow[d, "\psi"] \\
R' \otimes J \otimes R' \arrow[r, "\mathbb{1} \otimes \varphi"] & H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes R')).
\end{tikzcd}$$

Für $x \in H_3(\mathrm{Zor}(R' \otimes R'))$, $y := \psi(x)$, erhält man:

$$\begin{aligned}
&x^3 - \tilde{T} \circ \psi(x) x^2 + \tilde{S} \circ \psi(x) x - \tilde{N} \circ \psi(x) \mathbb{1} \\
&\quad = (\psi^{-1}(y))^3 - \tilde{T}(y)(\psi^{-1}(y))^2 + \tilde{S}(y)\psi^{-1}(y) - \tilde{N}(y)\mathbb{1} \\
&\quad = \psi^{-1}(y^3 - \tilde{T}(y) y^2 + \tilde{S}(y) y - \tilde{N}(y)\mathbb{1}) \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

$\tilde{N}, \tilde{S}, \tilde{T}$ und $\tilde{N} \circ \psi, \tilde{S} \circ \psi, \tilde{T} \circ \psi$ erfüllen damit jeweils die Voraussetzungen von Satz 1.12 und 1.13, und gemäß 1.12 folgt also:

$$\tilde{T} = \tilde{T} \circ \psi, \quad \tilde{N} = \tilde{N} \circ \psi, \quad \tilde{S} = \tilde{S} \circ \psi.$$

Für $x \in J$ erhält man hiermit:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'})) \otimes 1_{R'} &= \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'}) \otimes 1_{R'}) = (\tilde{T} \circ \psi)(\varphi(x \otimes 1_{R'}) \otimes 1_{R'}) \\ &= \tilde{T}(1_{R'} \otimes \varphi(x \otimes 1_{R'})) = 1_{R'} \otimes \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))^{¶}, \end{aligned}$$

und analog:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'})) \otimes 1_{R'} &= 1_{R'} \otimes \tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'})), \\ \tilde{N}(\varphi(x \otimes 1_{R'})) \otimes 1_{R'} &= 1_{R'} \otimes \tilde{N}(\varphi(x \otimes 1_{R'})). \end{aligned}$$

Da $R'$ treuflach über $R$ ist, gilt:

$$R = \{x \in R' \mid x \otimes 1_{R'} = 1_{R'} \otimes x \text{ in } R' \otimes R'\}.$$

Hieraus folgt:

$$\tilde{N}(\varphi(x \otimes 1_{R'})),\ \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'})),\ \tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'})) \in R.$$

Mit (7) ergibt sich außerdem für $x \in J$:

$$\begin{aligned} \varphi(x \otimes 1_{R'})^{\widetilde{\#}} &= (x \otimes 1_{R'})^2 - \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))x \otimes 1_{R'} + \tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))1 \otimes 1_{R'} \\ &= x^2 \otimes 1_{R'} - \tilde{T}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))x \otimes 1_{R'} + \tilde{S}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))1 \otimes 1_{R'} \in J. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man somit, daß

$$N : J \longrightarrow R, \quad x \longmapsto N(x) := \tilde{N}(\varphi(x \otimes 1_{R'}))$$

eine kubische Form mit Adjunkter

$$\# : J \longrightarrow J, \quad x \longmapsto x^{\#} := (\varphi(x \otimes 1_{R'}))^{\widetilde{\#}}$$

und Basispunkt 1 ist, und daß gilt: $J = \mathcal{J}(N, \#, 1)$. □

### 1.17 Korollar

Sei $X$ ein Schema und $(\mathcal{J}, U, 1)$ eine Albert-Algebra über $X$. Dann gibt es eine kubische Form $N : \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X$ mit Adjunkter $\# : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ und Basispunkt 1, so daß gilt:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1).$$

¶vgl. A.3c)

BEWEIS:
Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene affine Überdeckung von $X$. Nach Satz 1.16 gibt es zu jedem $i \in I$ eine kubische Form $N_i : \mathcal{J}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ mit Adjunkter $\#_i : \mathcal{J}|_{U_i} \to \mathcal{J}|_{U_i}$ und Basispunkt $1|_{U_i}$, so daß gilt $\mathcal{J}|_{U_i} = \mathcal{J}(N_i, \#_i, 1|_{U_i})$. Nach 1.15 folgt $N_i|_{U_i\cap U_j} = N_j|_{U_i\cap U_j}$ und $\#_i|_{U_i\cap U_j} = \#_j|_{U_i\cap U_j}$ für $i, j \in I$. Durch Verkleben der Abbildungen $N_i$ bzw. $\#_i$ erhält man somit eine kubische Form $N : \mathcal{J} \to \mathcal{O}_X$ bzw. eine quadratische Abbildung $\# : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$. $(N, \#, 1)$ ist dann eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt, und es ist $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$, da diese Aussagen lokal gelten. $\square$

# 2 Der Tits-Prozeß über geringten Räumen

In diesem Paragraphen wird der Tits-Prozeß, eine Konstruktion von Jordan-Algebren über Ringen, auf geringte Räume verallgemeinert. Dazu werden zunächst der Tits-Prozeß und als Spezialfall die erste Tits-Konstruktion wie in [P-R1] definiert dargestellt, wobei der Tits-Prozeß hier im Gegensatz zu [P-R1] nur für assoziative Algebren formuliert wird.

Sei $*$ eine Involution auf $R$, $B$ eine assoziative unitäre $R$-Algebra, $*$ eine Involution auf $B$, die die Involution auf $R$ fortsetzt und $(N, \#, 1)$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $B$.

### 2.1 Definition

a) $(N, \#, 1)$ heißt $B$-zulässig, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $B^+ = \mathcal{J}(N, \#, 1)$, d. h. 1 ist das Einselement der Algebra $B$, und es gilt $xyx = T(x,y)x - x^\# \times y$ für $x, y \in B$.

ii) $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x, y \in B$.

iii) $N(x^*) = N(x)^*$ für $x \in B$.

b) Sei $(N, \#, 1)$ $B$-zulässig. Ein Paar $(A, R_0)$ bestehend aus einem Unterring $R_0$ von $R$ und einem $R_0$-Untermodul $A$ von $B$ heißt $B$-groß, falls gilt:

i) $R_0 \subset H(R, *)$, $rr^* \in R$ für $r \in R$.

ii) $A \subset H(B, *)$, $1 \in A$, $bab^* \in A$ für $a \in A, b \in B$.

iii) $N(A) \subset R_0$, $A^\# \subset A$ (d.h. $N|_A : A \to R_0$ bzw. $\#|_A : A \to A$ ist eine kubische Form bzw. quadratische Abbildung).

c) Sei $(N, \#, 1)$ $B$-zulässig, $(A, R_0)$ ein $B$-großes Paar und $u \in A$, $\mu \in R^\times$. $(u, \mu)$ heißt $A$-zulässiger Skalar, falls $N(u) = \mu\mu^*$ gilt.

### 2.2 Theorem (Tits-Prozeß)

Sei $(N, \#, 1)$ $B$-zulässig, $(A, R_0)$ ein $B$-großes Paar und $(u, \mu)$ ein $A$-zulässiger Skalar. Definiert man

$$
\begin{aligned}
\tilde{J} &:= A \oplus B, \\
\tilde{1} &:= (1, 0), \\
\tilde{N}(a, b) &:= N(a) + \mu N(b) + \mu^* N(b^*) - T(a, bub^*) \\
(a, b)^{\tilde{\#}} &:= (a^\# - bub^*, \mu^* b^{*\#} u^{-1} - ab)
\end{aligned}
$$

für $a \in A$ und $b \in B$, so ist $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\tilde{J}$. Die hierdurch induzierte $R_0$-Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ wird mit $\mathcal{J}(B, A, u, \mu)$ bezeichnet.

<u>BEWEIS:</u>
Vgl. [P-R1], Theorem 3.4. □

## <u>2.3 Theorem (1. Tits-Konstruktion)</u>

Sei $A$ eine assoziative, unitäre $R$-Algebra, $(N, \#, 1)$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $A$ mit $A^+ = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ und $N(ab) = N(a)N(b)$ für $a, b \in A$ und $\mu \in R^\times$. Definiert man

$$\begin{aligned}
\tilde{J} &:= A \oplus A \oplus A, \\
\tilde{1} &:= (1, 0, 0), \\
\tilde{N}(a_0, a_1, a_2) &:= N(a_0) + \mu N(a_1) + \mu^{-1} N(a_2) - T(a_0 a_1 a_2) \\
(a_0, a_1, a_2)^{\widetilde{\#}} &:= (a_0^\# - a_1 a_2, \mu^{-1} a_2^\# - a_0 a_1, \mu a_1^\# - a_2 a_0)
\end{aligned}$$

für $a_0, a_1, a_2 \in A$, so ist $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\tilde{J}$. Die hierdurch induzierte $R$-Algebra $\mathcal{J}(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ wird mit $\mathcal{J}(A, \mu)$ bezeichnet.

<u>BEWEIS:</u>
Vgl. [P-R1], Theorem 3.5. □

Zunächst wird der Begriff der Involution auf geringte Räume übertragen.

## <u>2.4 Definition</u>

Sei $\mathcal{A}$ eine Garbe unitärer (nicht notwendig kommutativer bzw. assoziativer) Ringe auf $X$. $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt Involution auf $\mathcal{A}$, falls $\sigma$ ein Morphismus von Garben von Mengen und $\sigma(U) : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(U)$ für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ eine Involution auf $\mathcal{A}(U)$ ist. Ist $\mathcal{A}$ insbesondere eine $\mathcal{O}_X$-Algebra und $\sigma_{\mathcal{O}_X} : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ eine Involution auf $\mathcal{O}_X$, so setzt eine Involution $\sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ die Involution $\sigma_{\mathcal{O}_X}$ fort, falls dies für $\sigma_{\mathcal{A}}(U)$ und $\sigma_{\mathcal{O}_X}(U)$ auf jeder offenen Teilmenge $U$ von $X$ gilt.

## <u>2.5 Bemerkung</u>

Sei $\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine Involution auf $\mathcal{A}$. Setzt man $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \sigma)(U) := H(\mathcal{A}(U), \sigma) = \{a \in \mathcal{A}(U) \mid \sigma(U)(a) = a\}$ für jede offene Teilmenge $U$ von $X$, so erhält man eine Garbe $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \sigma)$ abelscher Gruppen (bzgl. der Addition) auf $X$, die als Garbe der $\sigma$-hermiteschen Elemente von $\mathcal{A}$ bezeichnet wird.

Sei $(X, \mathcal{O}'_X)$ ein geringter Raum, $*_{\mathcal{O}_{X'}} : \mathcal{O}'_X \to \mathcal{O}'_X$ eine Involution auf $\mathcal{O}'_X$, $\mathcal{B}$ eine assoziative, unitäre $\mathcal{O}'_X$-Algebra und $*_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ eine Involution auf $\mathcal{B}$, die die Involution $*_{\mathcal{O}_{X'}}$ auf $\mathcal{O}'_X$ fortsetzt. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden anstelle von $*_{\mathcal{O}_{X'}}$ auch $*_{\mathcal{B}}$ verwendet. $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt.

## 2.6 Definition

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ heißt $\mathcal{B}$-zulässig, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(14) $\mathcal{B}^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$, d. h. $1 \in H^0(X, \mathcal{B})$ ist das Einselement der Algebra $\mathcal{B}$, und es gilt $xyx = T_{\mathcal{B}}(x,y)x - x^{\#_{\mathcal{B}}} \times_{\mathcal{B}} y$ für $x, y \in \mathcal{B}$.

(15) $N_{\mathcal{B}}(xy) = N_{\mathcal{B}}(x)N_{\mathcal{B}}(y)$ für $x, y \in \mathcal{B}$.

(16) $N_{\mathcal{B}}(x^{*_{\mathcal{B}}}) = N_{\mathcal{B}}(x)^{*_{\mathcal{B}}}$ für $x \in \mathcal{B}$.

## 2.7 Lemma

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig. Dann gilt für $x, y \in \mathcal{B}$:

$$(xy)^{\#_{\mathcal{B}}} = y^{\#_{\mathcal{B}}} x^{\#_{\mathcal{B}}}, \tag{17}$$

$$(x^{*_{\mathcal{B}}})^{\#_{\mathcal{B}}} = (x^{\#_{\mathcal{B}}})^{*_{\mathcal{B}}}, \tag{18}$$

$$T_{\mathcal{B}}(x,y) = T_{\mathcal{B}}(xy). \tag{19}$$

BEWEIS:
Sei $U$ eine offene Teilmenge von $X$. Da $\mathcal{B}(U)$ assoziativ ist, erfüllen $\mathcal{B}(U)$ und $(N_{\mathcal{B}}(U), \#_{\mathcal{B}}(U), 1|_U)$ die Voraussetzungen von 3.2, 3.3 bzw. (3.15) in [P-R1]. Gemäß diesen Propositionen gelten damit die Identitäten (17), (18) und (19). □

## 2.8 Bemerkung

$\operatorname{Pic}_{\text{lft}} \mathcal{B}$ bzw. $\operatorname{Pic}_{\text{rgt}} \mathcal{B}$ bezeichne die punktierte Menge der Isomorphieklassen lokal freier $\mathcal{B}$-Links- bzw. $\mathcal{B}$-Rechtsmoduln vom Rang 1. Gemäß der nichtkommutativen Čechkohomologie ([Mi]) kann $\operatorname{Pic}_{\text{lft}} \mathcal{B}$ mit der punktierten Menge $\check{H}^1(X, \mathcal{B}^\times)$ identifiziert werden, wobei $\mathcal{B}^\times$ die Garbe der Einheiten von $\mathcal{B}$ bezeichne. Dies bedeutet, man kann für einen lokal freien $\mathcal{B}$-Linksmodul $\mathcal{P}$ vom Rang 1, dessen Isomorphieklasse in $\operatorname{Pic}_{\text{lft}} \mathcal{B} = \check{H}^1(X, \mathcal{B}^\times)$ durch eine offene Überdeckung $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ von $X$ und eine Kohomologieklasse von Kozyklen aus $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{B}^\times)$ mit einem Vertreter $(u_{ij})$, $u_{ij} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{B}^\times)$, $U_{ij} = U_i \cap U_j$, repräsentiert wird, annehmen, daß $\mathcal{P}$ durch $\mathcal{U}$ trivialisiert wird (d. h. $\mathcal{P}|_{U_i} \cong \mathcal{B}|_{U_i}$), und daß es für jedes $i \in I$ einen Basisvektor $l_i \in \mathcal{P}(U_i)$ gibt, so daß auf $U_{ij}$ gilt: $l_i = u_{ij} l_j$.

## 2.9 Bemerkung

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig. Gemäß (15) und (17) sind dann

$$N_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^\times \longrightarrow \mathcal{O}_X'^\times,$$

$$\#_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^{\times} \longrightarrow (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\times\,\dagger}.$$

Homomorphismen von Garben von Gruppen und induzieren daher folgende Homomorphismen von punktierten Mengen:

$$N_{\mathcal{B}} : \check{H}^1(X, \mathcal{B}^{\times}) \longrightarrow \check{H}^1(X, \mathcal{O}'^{\times}_X),$$
$$\#_{\mathcal{B}} : \check{H}^1(X, \mathcal{B}^{\times}) \longrightarrow \check{H}^1(X, (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\times}).$$

Berücksichtigt man die in 2.8 erwähnte Identifizierung, so erhält man also folgende Homomorphismen punktierter Mengen:

$$N_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\mathcal{O}'_X, \qquad N_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Pic}\,\mathcal{O}'_X,$$
$$\#_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \qquad \#_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}.$$

□

Im folgenden werden $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$-Links- und $\mathcal{B}$-Rechtsmoduln kanonisch identifiziert, d. h. insbesondere werden die Skalare in $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$-Linksmoduln von rechts multipliziert.

## 2.10 Definition

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig. $\mathcal{P}$ sei ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1, $\mathcal{E}$ ein $\mathcal{O}'_X$-Modul und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{B}$-Rechtsmodul. $\mathcal{P}$ und $\mathcal{F}$ sind dann in kanonischer Weise $\mathcal{O}'_X$-Moduln.

Eine kubische Abbildung (zwischen $\mathcal{O}'_X$-Moduln) $f : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ bzw. eine quadratische Abbildung (zwischen $\mathcal{O}'_X$-Moduln) $g : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ heißt multiplikativ, falls

$$f(bw) = N_{\mathcal{B}}(b) f(w)$$

bzw.
$$g(bw) = g(w) b^{\#_{\mathcal{B}}}$$

für $b \in \mathcal{B},\ w \in \mathcal{P}$ gilt.

Eine multiplikative kubische Abbildung $N : \mathcal{P} \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ heißt Norm auf $\mathcal{P}$, falls $N$ universell in der Kategorie der multiplikativen kubischen Abbildungen auf $\mathcal{P}$ ist, d. h. falls es zu jeder multiplikativen Abbildung $f : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$, wobei $\mathcal{E}$ ein beliebiger $\mathcal{O}'_X$-Modul ist, einen eindeutig bestimmten $\mathcal{O}'_X$-Modulhomomorphismus $\tilde{f} : N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{E}$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "f"'] & N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

[†] $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ bezeichne die $\mathcal{O}_X$-Algebra, die aus $\mathcal{B}$ durch Vertauschung der Faktoren bei der Multiplikation entsteht.

Eine multiplikative quadratische Abbildung $\# : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^{\#_\mathcal{B}}$ heißt Adjunkte auf $\mathcal{P}$, falls $\#$ universell in der Kategorie der multiplikativen quadratischen Abbildungen auf $\mathcal{P}$ ist, d. h. falls es zu jeder multiplikativen quadratischen Abbildung $g : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ einen eindeutig bestimmten $\mathcal{B}$-Rechtsmodulhomomorphismus $\widetilde{g} : \mathcal{P}^{\#_\mathcal{B}} \to \mathcal{F}$ gibt, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\#"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{P}^{\#_\mathcal{B}} \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\
\mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

Die entsprechenden Definitionen gelten dann vermöge der kanonischen Identifikation von $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$-Links- und $\mathcal{B}$-Rechtsmoduln auch für lokal freie $\mathcal{B}$-Rechtsmoduln vom Rang 1.

## 2.11 Lemma

$(N_\mathcal{B}, \#_\mathcal{B}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig, und $\mathcal{P}$ sei ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1. Dann gibt es eine Norm auf $\mathcal{P}$, und diese ist eindeutig bis auf einen invertierbaren Faktor aus $H^0(X, \mathcal{O}'_X)$.

Beweis:

Die Situation sei analog wie in 2.8 beschrieben, d. h. die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}$ werde durch den Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiert. Gemäß 2.9 repräsentiert dann der Kozyklus $(N_\mathcal{B}(u_{ij}))$ die Isomorphieklasse des Moduls $N_\mathcal{B}(\mathcal{P})$ in $\mathrm{Pic}\,\mathcal{O}'_X$. Nach 2.8 gibt es also Basisvektoren $l'_i \in N_\mathcal{B}(\mathcal{P})(U_i)$, so daß $l'_i = N_\mathcal{B}(u_{ij})l'_j$ auf $U_{ij}$ gilt. Durch die Zuordnung $bl_i \mapsto N_\mathcal{B}(b)l'_i$ für $b \in \mathcal{B}(U_i)$ wird nun eine multiplikative kubische Abbildung $N_i : \mathcal{P}|_{U_i} \to N_\mathcal{B}(\mathcal{P})|_{U_i}$ definiert. Dabei gilt für $i, j \in I$ und $b \in \mathcal{B}(U_{ij})$ auf $U_{ij}$:

$$\begin{aligned}
N_j(bl_i) &= N_j(bu_{ij}l_j) = N_\mathcal{B}(bu_{ij})l'_j \\
&= N_\mathcal{B}(b)N_\mathcal{B}(u_{ij})l'_j = N_\mathcal{B}(b)l'_i \\
&= N_i(bl_i),
\end{aligned}$$

also $N_i|_{U_{ij}} = N_j|_{U_{ij}}$. Durch Verkleben der Abbildungen $N_i$, $i \in I$, erhält man dann eine multiplikative kubische Abbildung $N : \mathcal{P} \to N_\mathcal{B}(\mathcal{P})$.

Sei nun $\mathcal{E}$ ein $\mathcal{O}'_X$-Modul und $f : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ eine kubische multiplikative Abbildung. Durch die Zuordnung $rN(l_i) = rl'_i \mapsto rf(l_i)$, $r \in \mathcal{O}'_X(U_i)$, wird ein $\mathcal{O}'_{U_i}$-Modulhomomorphismus $g_i : N_\mathcal{B}(\mathcal{P})|_{U_i} \to \mathcal{E}|_{U_i}$ definiert, wobei für $b \in \mathcal{B}(U_i)$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(bl_i) &= N_\mathcal{B}(b)f(l_i) = g_i(N_\mathcal{B}(b)N(l_i)) \\
&= g_i \circ N(bl_i).
\end{aligned}$$

Man erhält also $f|_{U_i} = g_i \circ N|_{U_i}$. Weiter ergibt sich für $i, j \in I$ und $r \in \mathcal{O}'_X(U_{ij})$ auf $U_{ij}$:

$$\begin{aligned} g_j(rN(l_i)) &= g_j(rN(u_{ij}l_j)) = g_j(rN_{\mathcal{B}}(u_{ij})N(l_j)) \\ &= rN_{\mathcal{B}}(u_{ij})f(l_j) = rf(u_{ij}l_j) \\ &= rf(l_i) = g_i(rN(l_i)), \end{aligned}$$

also $g_j|_{U_{ij}} = g_i|_{U_{ij}}$. Durch Verkleben der Abbildungen $g_i$, $i \in I$, erhält man einen $\mathcal{O}'_X$-Modulhomomorphismus $g : N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \to \mathcal{E}$, wobei das folgende Diagramm von Polynomabbildungen kommutativ ist:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "N"] \arrow[d, "f"'] & N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \arrow[dl, "g"] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

$g$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig festgelegt, da für jedes $i \in I$ der $\mathcal{O}_{U_i}$-Modulhomomorphismus $g_i$ durch die Bedingung $g_i \circ N|_{U_i} = f|_{U_i}$ eindeutig bestimmt ist. Damit ist die Existenz gezeigt.

Seien nun $N : \mathcal{P} \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ und $\tilde{N} : \mathcal{P} \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ zwei Normen auf $\mathcal{P}$. Nach der universellen Eigenschaft gibt es eindeutig bestimmte $\mathcal{O}'_X$-Modulhomomorphismen $g, \tilde{g} : N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ mit $g \circ N = \tilde{N}$ und $\tilde{g} \circ \tilde{N} = N$. Hieraus folgt $g \circ \tilde{g} \circ \tilde{N} = \tilde{N}$ und $\tilde{g} \circ g \circ N = N$, und die Eindeutigkeit liefert dann $g \circ \tilde{g} = \mathbb{1}_{N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})}$ und $\tilde{g} \circ g = \mathbb{1}_{N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})}$, d. h. $g$ ist ein $\mathcal{O}'^{\times}_X$-Modulisomorphismus. Dies bedeutet, es gibt ein $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}'^{\times}_X)$, so daß $g$ identisch mit der Multiplikation mit $\beta$ ist. Da andererseits auch $\beta N : \mathcal{P} \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$, $w \mapsto \beta N(w)$, $w \in \mathcal{P}$, für jede Norm $N : \mathcal{P} \to N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ und für jedes Element $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}'^{\times}_X)$ eine Norm auf $\mathcal{P}$ ist, ergibt sich die Behauptung. $\square$

## 2.12 Bemerkung

Sei $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1, der durch Daten wie in 2.8 bestimmt werde, d. h. die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}$ werde durch den Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiert, und es gebe Basisvektoren $l_i \in \mathcal{P}(U_i)$ mit $l_i = u_{ij}l_j$. Bezeichnet $\check{l}_i$ den zu $l_i$ dualen Basisvektor in $\check{\mathcal{P}}$[‡], so gilt $\check{l}_i = \check{l}_j u_{ij}^{-1}$ wegen $\langle l_i, \check{l}_j u_{ij}^{-1} \rangle$[§] $= \langle u_{ij}l_j, \check{l}_j u_{ij}^{-1} \rangle = u_{ij}\langle l_j, \check{l}_j \rangle u_{ij}^{-1} = 1$. Somit repräsentiert der Kozyklus $(u_{ij}^{-1})$ die Isomorphieklasse von $\check{\mathcal{P}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Wegen $\check{l}_j = \check{l}_i u_{ij}$ ist die Isomorphieklasse von $\check{\mathcal{P}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{rgt}}\,\mathcal{B}$ gegeben durch $(u_{ij})$.

‡ $\check{\mathcal{P}}$ bezeichne den $\mathcal{B}$-Rechtsmodul $\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}, \mathcal{B})$.

§ $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{P} \times \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{B}$ bezeichne die kanonische Abbildung.

## 2.13 Lemma

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig, $\mathcal{P}$ sei ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1 mit $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$ und $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$ sei eine Norm auf $\mathcal{P}$. Dann gilt $\mathcal{P}^{\#_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$, $\check{\mathcal{P}}^{\#_{\mathcal{B}}} \cong \mathcal{P}$ und $N_{\mathcal{B}}(\check{\mathcal{P}}) \cong \mathcal{O}'_X$, und es gibt eine eindeutig bestimmte Norm $\check{N} : \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{O}'_X$ auf $\check{\mathcal{P}}$ und eindeutig bestimmte Adjunkte $\# : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{P}}$ auf $\mathcal{P}$ und $\check{\#} : \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$ auf $\check{\mathcal{P}}$, so daß für $w \in \mathcal{P}$ und $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$ gilt:

$$\langle w, w^{\#} \rangle = N(w)1, \tag{20}$$

$$\langle \check{w}^{\check{\#}}, \check{w} \rangle = \check{N}(\check{w})1, \tag{21}$$

$$w^{\#\check{\#}} = N(w)w. \tag{22}$$

Darüberhinaus erfüllen $\check{N}$, $\check{\#}$ und $\#$ folgende Gleichungen für $w, w' \in \mathcal{P}$, $\check{w}, \check{w}' \in \check{\mathcal{P}}$:

$$\check{w}^{\check{\#}\#} = \check{N}(\check{w})\check{w}, \tag{23}$$

$$\langle w, \check{w} \rangle^{\#_{\mathcal{B}}} = \langle \check{w}^{\check{\#}}, w^{\#} \rangle, \tag{24}$$

$$N_{\mathcal{B}}(\langle w, \check{w} \rangle) = N(w)\check{N}(\check{w}), \tag{25}$$

$$D_{w'}N(w) = T_{\mathcal{B}}(\langle w', w^{\#} \rangle), \tag{26}$$

$$D_{\check{w}'}\check{N}(\check{w}) = T_{\mathcal{B}}(\langle \check{w}^{\check{\#}}, \check{w}' \rangle), \tag{27}$$

$$\langle w, \check{w} \rangle w = T_{\mathcal{B}}(\langle w, \check{w} \rangle)w - w^{\#} \check{\times} \check{w}. \tag{28}$$

BEWEIS:
$\mathcal{P}$ werde durch Daten wie in 2.8 beschrieben. Die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}$ wird also durch den Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiert. Gemäß 2.9 bestimmt dann der Kozyklus $(u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}})$ die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}^{\#_{\mathcal{B}}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Auf $U_{ij}$ gilt

$$N(l_i) = N(u_{ij} l_j) = N_{\mathcal{B}}(u_{ij})N(l_j).$$

Da $N(l_i)$ Basisvektor, also insbesondere Einheit in $\mathcal{O}'_X(U_i)$ ist, erhält man

$$N_{\mathcal{B}}(u_{ij}) = N(l_i)N(l_j)^{-1}.$$

Dies bedeutet $N_{\mathcal{B}}(u_{ij}^{-1}) = N_{\mathcal{B}}(u_{ij})^{-1} = N(l_i)^{-1}N(l_j)$, also $N_{\mathcal{B}}(\check{\mathcal{P}}) \cong \mathcal{O}'_X$, da $N_{\mathcal{B}}(u_{ij}^{-1})$ gemäß 2.12 die Isomorphieklasse von $N_{\mathcal{B}}(\check{\mathcal{P}})$ in $\mathrm{Pic}\, \mathcal{O}'_X$ repräsentiert. Mit (13) folgt außerdem: $u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}} = N_{\mathcal{B}}(u_{ij})u_{ij}^{-1} = N(l_j)^{-1}u_{ij}^{-1}N(l_i)$. Dies bedeutet, die Kozyklen $(u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}})$ und $(u_{ij}^{-1})$ repräsentieren die gleiche Isomorphieklasse in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$. Mit 2.12 ergibt sich also $\mathcal{P}^{\#_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$. Wegen $u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} = N_{\mathcal{B}}(u_{ij})u_{ij}$ (gemäß (1)) erhält man analog $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}^{\#_{\mathcal{B}}}$. Zunächst wird nun die Adjunkte $\#$ konstruiert.

Da $l_i$ bzw. $N(l_i)$ Basisvektor von $\mathcal{P}(U_i)$ bzw. $\mathcal{O}'_X(U_i)$ ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Basisvektor $l_i^{\#} \in \check{\mathcal{P}}(U_i)$, so daß gilt:

$$\langle l_i, l_i^{\#} \rangle = N(l_i)1.$$

Durch die Zuordnung $bl_i \mapsto l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}}$, $b \in \mathcal{B}(U_i)$ wird eine multiplikative quadratische Abbildung $\#_i : \mathcal{P}|_{U_i} \to \check{\mathcal{P}}|_{U_i}$ definiert, wobei für $b \in \mathcal{B}(U_i)$ und $\lambda \in \mathcal{O}'_X(U_i)$ wegen $bb^{\#_{\mathcal{B}}} = N_{\mathcal{B}}(b)1$ ((6), (7)) und (3), (19) gilt:

$$\begin{aligned}\langle bl_i, (bl_i)^{\#_i}\rangle &= \langle bl_i, l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}}\rangle = b\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b^{\#_{\mathcal{B}}} = bN(l_i)b^{\#_{\mathcal{B}}} \\ &= N_{\mathcal{B}}(b)N(l_i)1 = N(bl_i)1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&N(bl_i) + \lambda D_{b'l_i}N(bl_i) + \lambda^2 D_{bl_i}N(b'l_i) + \lambda^3 N(b'l_i) \\ &\quad = N(bl_i + \lambda b'l_i) = N((b+\lambda b')l_i) = N_{\mathcal{B}}(b+\lambda b')N(l_i) \\ &\quad = N_{\mathcal{B}}(b)N(l_i) + \lambda D_{b'}N_{\mathcal{B}}(b)N(l_i) + \lambda^2 D_b N_{\mathcal{B}}(b')N(l_i) + \lambda^3 N_{\mathcal{B}}(b')N(l_i),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}D_{b'l_i}N(bl_i) &= D_{b'}N_{\mathcal{B}}(b)N(l_i) = T_{\mathcal{B}}(b^{\#_{\mathcal{B}}}, b')N(l_i) = T_{\mathcal{B}}(b', b^{\#_{\mathcal{B}}})N(l_i) \\ &= T_{\mathcal{B}}(b'b^{\#_{\mathcal{B}}})N(l_i) = T_{\mathcal{B}}(b'N(l_i)b^{\#_{\mathcal{B}}}) = T_{\mathcal{B}}(b'\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b^{\#_{\mathcal{B}}}) \\ &= T_{\mathcal{B}}(\langle b'l_i, (bl_i)^{\#}\rangle).\end{aligned}$$

Sei nun $a_{ij} \in \mathcal{B}(U_{ij})^{\times}$ definiert durch $l_i^{\#} = l_j^{\#} a_{ij}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}N(l_i)1 &= \langle l_i, l_i^{\#}\rangle = \langle u_{ij}l_j, l_j^{\#}a_{ij}\rangle = u_{ij}\langle l_j, l_j^{\#}\rangle a_{ij} \\ &= u_{ij}N(l_j)a_{ij} = u_{ij}N_{\mathcal{B}}(u_{ij})^{-1}N(u_{ij}l_j)a_{ij} = u_{ij}N_{\mathcal{B}}(u_{ij})^{-1}a_{ij}N(l_i).\end{aligned}$$

Hieraus folgt: $a_{ij} = N_{\mathcal{B}}(u_{ij})u_{ij}^{-1} = u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}}$. Damit erhält man für $i, j \in I$ und $b \in \mathcal{B}(U_{ij})$ auf $U_{ij}$:

$$(bl_i)^{\#_j} = (bu_{ij}l_j)^{\#_j} = l_j^{\#} u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}} b^{\#_{\mathcal{B}}} = l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}} = (bl_i)^{\#_i}.$$

Durch Verkleben der Abbildungen $\#_i$, $i \in I$, erhält man dann eine multiplikative quadratische Abbildung $\# : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{P}}$ auf $\check{\mathcal{P}}$, so daß die Identitäten (20) und (26) erfüllt sind. $\#$ ist durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt, da $\#_i$ eindeutig festgelegt ist. Die universelle Eigenschaft von $\#$ erhält man wie im Beweis von 2.11.

Als nächstes wird die Abbildung $\check{\#}$ konstruiert. Durch die Zuordnung $l_i^{\#}b \mapsto b^{\#_{\mathcal{B}}}N(l_i)l_i$, $b \in \mathcal{B}(U_i)$, wird eine multiplikative quadratische Abbildung $\check{\#}_i : \check{\mathcal{P}}|_{U_i} \to \mathcal{P}|_{U_i}$ definiert, wobei für $b, b' \in \mathcal{B}(U_i)$ wegen (1), (14), (19) gilt:

$$(bl_i)^{\#\check{\#}_i} = (l_i^{\#}b^{\#_{\mathcal{B}}})^{\check{\#}_i} = b^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}}N(l_i)l_i = N_{\mathcal{B}}(b)bN(l_i)l_i = N(bl_i)bl_i,$$

$$\langle bl_i, l_i^{\#}b'\rangle^{\#_{\mathcal{B}}} = (b\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b')^{\#_{\mathcal{B}}} = b'^{\#_{\mathcal{B}}}N(l_i)^2 b^{\#_{\mathcal{B}}}$$

$$\begin{aligned}
&= b'^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i)\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b^{\#_{\mathcal{B}}} = \langle b'^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i, l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}}\rangle \\
&= \langle (l_i^{\#} b')^{\check{\#}_i}, (bl_i)^{\#}\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle bl_i, l_i^{\#} b'\rangle bl_i &= b\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b' bl_i = (bb'b) N(l_i) l_i \\
&= (T_{\mathcal{B}}(b, b')b - b^{\#_{\mathcal{B}}} \times_{\mathcal{B}} b') N(l_i) l_i \\
&= T_{\mathcal{B}}(bb') N(l_i) bl_i - ((b^{\#_{\mathcal{B}}} + b')^{\#_{\mathcal{B}}} - b^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} - b'^{\#_{\mathcal{B}}}) N(l_i) l_i \\
&= T_{\mathcal{B}}(bN(l_i)b') bl_i - ((b^{\#_{\mathcal{B}}} + b')^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i - b^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i - b'^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i) \\
&= T_{\mathcal{B}}(b\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b') bl_i - ((l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}} + l_i^{\#} b')^{\check{\#}_i} - (l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}})^{\check{\#}_i} - (l_i^{\#} b')^{\check{\#}_i}) \\
&= T_{\mathcal{B}}(\langle bl_i, l_i^{\#} b'\rangle) bl_i - (bl_i)^{\#} \check{\times}_i l_i^{\#} b'.
\end{aligned}$$

Wegen

$$N(l_i) l_i = N(u_{ij} l_j) u_{ij} l_j = N_{\mathcal{B}}(u_{ij}) N(l_j) u_{ij} l_j = u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} N(l_j) l_j$$

erhält man für $i, j \in I$ und $b \in \mathcal{B}(U_{ij})$ auf $U_{ij}$:

$$\begin{aligned}
(l_i^{\#} b)^{\check{\#}_j} &= (l_j^{\#} u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}} b)^{\check{\#}_j} = b^{\#_{\mathcal{B}}} u_{ij}^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} N(l_j) l_j \\
&= b^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i = (l_i^{\#} b)^{\check{\#}_i}.
\end{aligned}$$

Durch Verkleben der Abbildungen $\check{\#}_i,\ i \in I$, erhält man dann eine multiplikative quadratische Abbildung $\check{\#} : \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{P}$ auf $\check{\mathcal{P}}$, so daß die Identitäten (22), (24) und (28) erfüllt sind. Da $\check{\#}_i$ durch diese Eigenschaften eindeutig festgelegt ist, folgt, daß auch $\check{\#}$ eindeutig bestimmt ist. Die universelle Eigenschaft von $\check{\#}$ erhält man wie im Beweis von 2.11.

Zuletzt wird die Abbildung $\check{N}$ konstruiert. Durch die Zuordnung $l_i^{\#} b \mapsto N_{\mathcal{B}}(b) N(l_i)^2,\ b \in \mathcal{B}(U_i)$, wird eine multiplikative kubische Abbildung $\check{N}_i : \check{\mathcal{P}}|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i}$ definiert, wobei für $b, b' \in \mathcal{B}(U_i)$ und $\lambda \in \mathcal{O}'(U_i)$ wegen (1), (3), (14), (15) gilt:

$$\begin{aligned}
\langle (l_i^{\#} b)^{\check{\#}}, l_i^{\#} b\rangle &= \langle b^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i, l_i^{\#} b\rangle = b^{\#_{\mathcal{B}}} \langle N(l_i) l_i, l_i^{\#}\rangle b \\
&= b^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) \langle l_i, l_i^{\#}\rangle b = b^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i)^2 b = N_{\mathcal{B}}(b) N(l_i)^2 1 = \check{N}_i(l_i^{\#} b) 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(l_i^{\#} b)^{\check{\#}\#} &= (b^{\#_{\mathcal{B}}} N(l_i) l_i)^{\#} = (N(l_i) l_i)^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} = N(l_i)^2 l_i^{\#} N_{\mathcal{B}}(b) b \\
&= \check{N}_i(l_i^{\#} b) l_i^{\#} b,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_{\mathcal{B}}(\langle bl_i, l_i^{\#} b'\rangle) &= N_{\mathcal{B}}(b\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b') = N_{\mathcal{B}}(bN(l_i) b') \\
&= N_{\mathcal{B}}(b) N(l_i)^3 N_{\mathcal{B}}(b') = (N_{\mathcal{B}}(b) N(l_i))(N_{\mathcal{B}}(b') N(l_i)^2) \\
&= N(bl_i) \check{N}_i(l_i^{\#} b'),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\check N_i(l_i^{\#}b) + \lambda D_{l_i^{\#}b'}\check N_i(l_i^{\#}b) + \lambda^2 D_{l_i^{\#}b}\check N_i(l_i^{\#}b') + \lambda^3\check N_i(l_i^{\#}b')\\
&\quad = \check N_i(l_i^{\#}b + l_i^{\#}\lambda b') = \check N_i(l_i^{\#}(b+\lambda b')) = N_{\mathcal B}(b+\lambda b')N(l_i)^2\\
&\quad = N_{\mathcal B}(b)N(l_i)^2 + \lambda D_{b'}N_{\mathcal B}(b)N(l_i)^2 + \lambda^2 D_b N_{\mathcal B}(b')N(l_i)^2 + \lambda^3 N_{\mathcal B}(b')N(l_i)^2,
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
D_{l_i^{\#}b'}\check N_i(l_i^{\#}b) &= D_{b'}N_{\mathcal B}(b)N(l_i)^2 = T_{\mathcal B}(b^{\#_{\mathcal B}}, b')N(l_i)^2\\
&= T_{\mathcal B}(b^{\#_{\mathcal B}}b')N(l_i)^2 = T_{\mathcal B}(b^{\#_{\mathcal B}}N(l_i)\langle l_i, l_i^{\#}\rangle b')\\
&= T_{\mathcal B}(\langle b^{\#_{\mathcal B}}N(l_i)l_i, l_i^{\#}b'\rangle)\\
&= T_{\mathcal B}(\langle (l_i^{\#}b)^{\check\#}, l_i^{\#}b'\rangle).
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
N_{\mathcal B}(u_{ij}^{\#_{\mathcal B}}) &= N_{\mathcal B}(N_{\mathcal B}(u_{ij})u_{ij}^{-1}) = N_{\mathcal B}(u_{ij})^3N_{\mathcal B}(u_{ij}^{-1}) = N_{\mathcal B}(u_{ij})^3N_{\mathcal B}(u_{ij})^{-1}\\
&= N_{\mathcal B}(u_{ij})^2
\end{aligned}
$$

erhält man für $i, j \in I$ und $b \in \mathcal B(U_{ij})$ auf $U_{ij}$

$$
\begin{aligned}
\check N_j(l_i^{\#}b) &= \check N_j(l_j^{\#}u_{ij}^{\#_{\mathcal B}}b)\\
&= N_{\mathcal B}(b)N_{\mathcal B}(u_{ij})^2N(l_j)^2 = N_{\mathcal B}(b)N(u_{ij}l_j)^2 = N_{\mathcal B}(b)N(l_i)^2\\
&= \check N_i(l_i^{\#}b),
\end{aligned}
$$

also $\check N_j|_{U_{ij}} = \check N_i|_{U_{ij}}$. Verkleben der Abbildungen $\check N_i$, $i \in I$, liefert eine multiplikative kubische Abbildung $\check N : \check{\mathcal P} \to \mathcal O'_X$ auf $\check{\mathcal P}$, so daß die Identitäten (21), (23), (25) und (27) erfüllt sind. Die Eindeutigkeit von $\check N$ folgt wie oben aus der Eindeutigkeit der Abbildungen $\check N_i$, und die universelle Eigenschaft von $\check N$ erhält man wie im Beweis von 2.11. $\square$

**2.14 Definition**

Sei $\mathcal F$ ein $\mathcal B$-Rechtsmodul. Vermöge der Skalarmultiplikation $b \cdot w = wb^{*_{\mathcal B}}$ für $b \in \mathcal B$, $w \in \mathcal F$ wird eine $\mathcal B$-Linksmodulstruktur auf der abelschen Garbe $\mathcal F$ von Gruppen (bzgl. der Addition) definiert. Der so erklärte $\mathcal B$-Linksmodul wird mit $\overline{\mathcal F}$ bezeichnet und heißt der zu $\mathcal F$ entgegengesetzte Modul (vgl. [K1], I, (2.1)). Für einen $\mathcal B$-Rechtsmodulhomomorphismus $f : \mathcal F \to \mathcal E$ bezeichne $\overline{f} : \overline{\mathcal F} \to \overline{\mathcal E}$ den durch $f$ bestimmten $\mathcal B$-Linksmodulhomomorphismus.
Das Entsprechende gilt für $\mathcal B$-Linksmoduln.

## 2.15 Bemerkung und Definition

a) Analog wie in 2.9 induziert der Homomorphismus von Garben von Gruppen

$$*_{\mathcal{B}} : \mathcal{B}^{\times} \longrightarrow (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\times}$$

einen Homomorphismus punktierter Mengen

$$*_{\mathcal{B}} : \check{H}^1(X, \mathcal{B}^{\times}) \longrightarrow \check{H}^1(X, (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\times}).$$

Damit erhält man folgende Homomorphismen punktierter Mengen:

$$*_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \qquad *_{\mathcal{B}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}.$$

b) Sei $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1. Ein $\mathcal{B}$-Linksmodulisomorphismus $j : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}}$ heißt Involution auf $\mathcal{P}$.
Die entsprechende Definition gelte auch für lokal freie $\mathcal{B}$-Rechtsmoduln vom Rang 1.
c) Sei $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1, dessen Isomorphieklasse in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}$ durch den Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiert werde. Nach a) repräsentiert dann $(u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}})$ die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\, \mathcal{B}^{\mathrm{op}}$, also $(u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}-1})$ die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{rgt}}\, \mathcal{B}$. Andererseits gilt $l_i = l_j \cdot u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}}$, also $l_i \cdot u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}-1} = l_j$ in $\overline{\mathcal{P}}$, d.h. $(u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}-1})$ repräsentiert auch die Isomorphieklasse von $\overline{\mathcal{P}}$ in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{rgt}}\, \mathcal{B}$. Folglich ist $\overline{\mathcal{P}} \cong \mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$ und damit auch $\mathcal{P} \cong \overline{\overline{\mathcal{P}}} \cong \overline{\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}}$. Es gibt also immer eine Involution auf $\mathcal{P}$, und diese ist eindeutig bis auf einen $\mathcal{B}$-Modulautomorphismus $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, d.h. ist $* : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}}$ eine Involution auf $\mathcal{P}$, dann ist die Menge aller Involutionen auf $\mathcal{P}$ identisch mit der Menge aller Abbildungen $* \circ g$ mit einem Automorphismus $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$. $\square$

## 2.16 Definition

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig. Ein Paar $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ bestehend aus einer Untergarbe (von Ringen) $\mathcal{O}_X$ von $\mathcal{O}'_X$ und einem $\mathcal{O}_X$-Untermodul $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ heißt $\mathcal{B}$-groß, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(29) (i) $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *_{\mathcal{B}})$,
(ii) $rr^{*_{\mathcal{B}}} \in \mathcal{O}_X \quad$ für $r \in \mathcal{O}'_X$,

(30) (i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}})$,
(ii) $1 \in H^0(X, \mathcal{A})$,
(iii) $bab^* \in \mathcal{A} \quad$ für $a \in \mathcal{A},\ b \in \mathcal{B}$,

(31) (i) $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_X$ (d. h. $N_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{O}_X$ ist eine kubische Form über $\mathcal{O}_X$),
(ii) $\mathcal{A}^{\#_{\mathcal{B}}} \subset \mathcal{A}$ (d. h. $\#_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ist eine quadratische Abbildung über $\mathcal{O}_X$).

**2.17 Bemerkung**

a) Nach Definition von $T_{\mathcal{B}}$ impliziert (31)(i):

(31) (iii) $T_{\mathcal{B}}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \subset \mathcal{O}_X$.

b) Wegen der Zulässigkeit von $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ ist $(\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}}), \mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *_{\mathcal{B}}))$ ein $\mathcal{B}$-großes Paar. Ist $\frac{1}{2} \in H^0(X, \mathcal{O}'_X)$ oder existiert ein $\lambda \in H^0(X, \mathcal{O}'_X)$ mit $1 = \lambda + \lambda^{*_{\mathcal{B}}}$, dann ist dies auch das einzige $\mathcal{B}$-große Paar (vgl. [P-R1], S. 221). □

**2.18 Definition**

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß und $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1.

a) Es gelte $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$. Ein Paar $(N, *)$ bestehend aus einer Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$¶ auf $\mathcal{P}$ und einer Involution $* : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^{\vee}}$‖ auf $\mathcal{P}$ heißt $\mathcal{A}$-zulässig, falls folgende Bedingungen für $w \in \mathcal{P}$ erfüllt sind:

(32) $$\langle w, w^* \rangle \in \mathcal{A},$$

(33) $$N_{\mathcal{B}}(\langle w, w^* \rangle) = N(w)N(w)^{*_{\mathcal{B}}}.$$

b) $\mathcal{P}$ heißt $\mathcal{A}$-zulässig, falls $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$ gilt, und ein $\mathcal{A}$-zulässiges Paar $(N, *)$ zu $\mathcal{P}$ existiert. □

**2.19 Beispiel**

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig und $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß. Dann ist $\mathcal{B}$ in kanonischer Weise ein global freier $\mathcal{B}$-Links- bzw. $\mathcal{B}$-Rechtsmodul vom Rang 1. In dieser Betrachtungsweise wird $\mathcal{B}$ mit ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}_{\mathcal{B}}$ bezeichnet. Da ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ global frei ist, folgt sofort, daß ${}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}$ $\mathcal{A}$-zulässig ist, und daß die Menge der $\mathcal{A}$-zulässigen Paare mit der Menge der Paare $(u*_{\mathcal{B}}, \beta N_{\mathcal{B}})$ identisch ist, für die $u \in H^0(X, \mathcal{A}^\times)$, $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}'^\times_X)$ und $N_{\mathcal{B}}(u) = \beta\beta^{*_{\mathcal{B}}}$ gilt.

**2.20 Lemma**

$(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ sei $\mathcal{B}$-zulässig, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß und $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1, dessen Isomorphieklasse in $\mathrm{Pic}_{\mathrm{lft}}\,\mathcal{B}$ durch den Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiert werde. $\mathcal{P}$ ist genau dann $\mathcal{A}$-zulässig, falls es Kozyklen $(a_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{B}^\times)$ mit $a_i \in \mathcal{A}$ und $(\gamma_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}'^\times_X)$ (vgl. [Mi]) mit $\gamma_i\gamma_i^{*_{\mathcal{B}}} = N_{\mathcal{B}}(a_i)$ gibt, so daß für $i, j \in I$ auf $U_{ij}$ gilt:

$$u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}} = a_j^{-1} u_{ij}^{-1} a_i$$

¶Dabei werden $\mathcal{O}'_X$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ identifiziert.

‖Dabei werden $\check{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$ identifiziert.

$$N_{\mathcal{B}}(u_{ij}) = \gamma_i\gamma_j^{-1} = N_{\mathcal{B}}(a_i)(\gamma_i^{*_{\mathcal{B}}})^{-1}\gamma_j^{*_{\mathcal{B}}}N_{\mathcal{B}}(a_j)^{-1}.$$

Ist $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{B}$-zulässiger Modul und ein $(N,*)$ ein $\mathcal{A}$-zulässiges Paar, dann ist die Menge aller $\mathcal{A}$-zulässigen Paare identisch mit der Menge aller Paare $(*\circ g, \beta N)$, wobei $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ ein $\mathcal{B}$-Modulautomorphismus und $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}_X'^{\times})$ ein globaler Schnitt ist, so daß für $w \in \mathcal{P}$ gilt:

$$\langle w, g(w)^*\rangle \in \mathcal{A} \quad \text{und} \quad N_{\mathcal{B}}(\langle w, g(w)^*\rangle) = \beta\beta^{*_{\mathcal{B}}}N(w)N(w)^{*_{\mathcal{B}}}.$$

<u>Beweis:</u>
Ist $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{A}$-zulässiger $\mathcal{B}$-Modul, dann gilt $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$, und es gibt eine Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$ †† und eine Involution $* : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$ ‡‡ auf $\mathcal{P}$, so daß für $w \in \mathcal{P}$ gilt

$$\langle w, w^*\rangle \in \mathcal{A}, \quad N_{\mathcal{B}}(\langle w, w^*\rangle) = N(w)^{*_{\mathcal{B}}}N(w).$$

Ist $l_i$ ein Basisvektor von $\mathcal{P}(U_i)$ für $i \in I$ mit $l_i = u_{ij}l_j$, dann gibt es ein $a_i \in \mathcal{B}(U_i)^\times$ mit $l_i^* = \check{l}_i a_i$. Hieraus folgt gemäß den Voraussetzungen:

$$a_i = \langle l_i, \check{l}_i\rangle a_i = \langle l_i, \check{l}_i a_i\rangle = \langle l_i, l_i^*\rangle \in \mathcal{A}(U_i),$$

$$N_{\mathcal{B}}(a_i) = N_{\mathcal{B}}(\langle l_i, l_i^*\rangle) = N(l_i)N(l_i)^{*_{\mathcal{B}}},$$

$$l_j^* u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}} = l_i^* = \check{l}_i a_i = \check{l}_j u_{ij}^{-1} a_i = l_j^* a_j^{-1} u_{ij}^{-1} a_i, \text{ also } u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}} = a_j^{-1}u_{ij}^{-1}a_i,$$

$$N_{\mathcal{B}}(u_{ij}) = N(l_i)N(l_j)^{-1}.$$

Damit folgen die behaupteten Bedingungen mit $\gamma_i = N(l_i)$. Seien diese nun vorausgesetzt. Dann folgt $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$, und gemäß 2.12 gilt für die lokalen Basisvektoren $\check{l}_i a_i$ von $\check{\mathcal{P}}$:

$$\check{l}_i a_i = \check{l}_j a_j u_{ij}^{*_{\mathcal{B}}}.$$

Im Beweis von 2.11 wurde gezeigt, daß es dann eine Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$ mit $N(l_i) = \gamma_i = (\gamma_i^{*_{\mathcal{B}}})^{-1}N_{\mathcal{B}}(a_i)$ gibt, und nach 2.15 folgt, daß es eine Involution $* : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$ mit $l_i^* = \check{l}_i a_i$ auf $\mathcal{P}$ gibt. Für $b \in \mathcal{B}(U_i)$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\langle bl_i, (bl_i)^*\rangle &= \langle bl_i, l_i^* b^{*_{\mathcal{B}}}\rangle = b\langle l_i, l_i^*\rangle b^{*_{\mathcal{B}}} = b\langle l_i, \check{l}_i a_i\rangle b^{*_{\mathcal{B}}} \\ &= b a_i b^{*_{\mathcal{B}}} \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

$$N(\langle bl_i, (bl_i)^*\rangle) = N_{\mathcal{B}}(ba_ib^{*_{\mathcal{B}}}) = N_{\mathcal{B}}(b)N_{\mathcal{B}}(a_i)N_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}})$$

†† Dabei werden $\mathcal{O}'_X$ und $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P})$ identifiziert.
‡‡ Dabei werden $\check{\mathcal{P}}$ und $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$ identifiziert.

$$
\begin{aligned}
&= N_{\mathcal{B}}(b)\gamma_i\gamma_i^{*_{\mathcal{B}}}N_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}}) = N_{\mathcal{B}}(b)N(l_i)N(l_i)^{*_{\mathcal{B}}}N_{\mathcal{B}}(b)^{*_{\mathcal{B}}} \qquad ((16))\\
&= N(bl_i)N(bl_i)^{*_{\mathcal{B}}}.
\end{aligned}
$$

Das heißt, für $N$ und $*$ sind die Identitäten (32) und (33) erfüllt, und damit ist die Existenz eines zulässigen Paares gezeigt.
Die Aussage bezüglich der Eindeutigkeit folgt aus den entsprechenden Aussagen aus 2.11 bzw. 2.15. □

## 2.21 Bemerkung

Sei $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{B}$-Linksmodul. Ein Homomorphismus $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{B}$ von Garben von Mengen heißt Sesquilinearform auf $\mathcal{P}$, falls $h(U) : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \to \mathcal{B}(U)$ für jede offene Teilmenge $U \subset X$ eine Sesquilinearform ist, d. h. es gilt $h(U)(aw, bv) = ah(w,v)b^{*_{\mathcal{B}}}$ für $v, w \in \mathcal{P}(U)$, $a, b \in \mathcal{B}(U)$. Jede Sesquilinearform $h : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{B}$ induziert vermöge $\langle w, j_h(v)\rangle = h(w,v)$ einen $\mathcal{B}$-Linksmodulhomomorphismus $j_h : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$ auf $\mathcal{P}$, und jeder $\mathcal{B}$-Linksmodulhomomorphismus $j : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$ liefert vermöge $h_j(w,v) = \langle w, j(v)\rangle$ eine Sesquilinearform $h_j : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{B}$, und es gilt $h_{j_h} = h$ und $j_{h_j} = j$. Dies bedeutet, man kann die $\mathcal{B}$-Linksmodulhomomorphismen von $\mathcal{P}$ nach $\overline{\mathcal{P}^\vee}$ kanonisch mit den Sesquilinearformen auf $\mathcal{P}$ identifizieren (vgl. [K1], I, (2.2)). Eine Sesquilinearform $h$ heißt regulär, falls $j_h$ ein $\mathcal{B}$-Modulisomorphismus ist.

Sei nun $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ $\mathcal{B}$-zulässig, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß und $\mathcal{P}$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1 mit $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X$. Dann ist $\mathcal{P}$ genau dann $\mathcal{A}$-zulässig, falls es eine Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$ und eine reguläre Sesquilinearform $h : \mathcal{P}\times\mathcal{P} \to \mathcal{B}$ gibt, so daß gilt:

$$
\begin{aligned}
&h(w,w) \in \mathcal{A},\\
&N_{\mathcal{B}}(h(w,w)) = N(w)N(w)^{*_{\mathcal{B}}}.
\end{aligned}
$$

Denn falls $\mathcal{P}$ $\mathcal{A}$-zulässig ist, gilt $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}}$, und es gibt eine Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}'_X$ und eine Involution, also einen $\mathcal{B}$-Linksmodulisomorphismus $j : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$, so daß (32) und (33) erfüllt sind. $h_j$ ist dann eine reguläre Sesquilinearform, und $h_j$ und $N$ erfüllen die geforderten Bedingungen. Ist andererseits $N$ eine Norm auf $\mathcal{P}$ und $h$ eine reguläre Sesquilinearform mit den obigen Eigenschaften, dann ist $j_h : \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}^\vee}$ ein Isomorphismus. Hieraus und nach 2.15 folgt $\overline{\mathcal{P}^\vee} \cong \mathcal{P} \cong \overline{\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}}$, also $\check{\mathcal{P}} \cong \mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}}$. $j_h$ ist somit eine Involution auf $\mathcal{P}$, und $j_h$ und $N$ genügen den Bedingungen (32) und (33). □

## 2.22 Lemma

Sei $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ $\mathcal{B}$-zulässig, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß, $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{A}$-zulässiger $\mathcal{B}$-Modul und $(N, *)$ $\mathcal{A}$-zulässig. Dann ist $\check{*} = \overline{*^{-1}} : \check{\mathcal{P}} \to \overline{\mathcal{P}}$ eine Involution auf $\check{\mathcal{P}}$, und für

$w \in \mathcal{P},\ \check{w} \in \check{\mathcal{P}}$ gilt:

$$w^{*\check{*}} = w. \tag{34}$$

$$\check{w}^{\check{*}*} = \check{w}, \tag{35}$$

$$\check{N}(w^*) = N(w)^{*_{\mathcal{B}}}, \tag{36}$$

$$w^{*\check{\#}} = w^{\#\check{*}}, \tag{37}$$

$$\check{w}^{\check{\#}*} = \check{w}^{\check{*}\#}, \tag{38}$$

$$\langle w, \check{w}\rangle^{*_{\mathcal{B}}} = \langle \check{w}^{\check{*}}, w^*\rangle, \tag{39}$$

$$\langle w, w^*\rangle w^{*\check{\#}} = N(w)^{*_{\mathcal{B}}} w. \tag{40}$$

<u>BEWEIS:</u>
Nach Definition und 2.13 gilt: $N_{\mathcal{B}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}'_X \cong N_{\mathcal{B}}(\check{\mathcal{P}})$, $\mathcal{P}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \check{\mathcal{P}} \cong \mathcal{P}^{\#_{\mathcal{B}}}$ und $\check{\mathcal{P}}^{*_{\mathcal{B}}} \cong \mathcal{P} \cong \check{\mathcal{P}}^{\#_{\mathcal{B}}}$. $*^{-1}$ ist ein $\mathcal{B}$-Linksmodulisomorphismus, also ist $\overline{*^{-1}}$ ein $\mathcal{B}$-Rechtsmodulisomorphismus, und damit eine Involution auf $\check{\mathcal{P}}$. (34) und (35) sind offensichtlich erfüllt. Wie üblich sei $l_i$ für $i \in I$ ein Basisvektor von $\mathcal{P}(U_i)$, und es gelte $l_i = u_{ij} l_j$. Dann sind $l_i^*$ und $l_i^{\#}$ Basisvektoren von $\check{\mathcal{P}}(U_i)$ und $N(l_i)$ ist Einheit in $\mathcal{O}'_X(U_i)$. Sei $b \in \mathcal{B}(U_i)^\times$ mit $l_i^* = l_i^{\#} b$. Dann gilt mit (20):

$$\langle l_i, l_i^*\rangle = \langle l_i, l_i^{\#} b\rangle = \langle l_i, l_i^{\#}\rangle b = N(l_i) b,$$

also $l_i^* = l_i^{\#}\langle l_i, l_i^*\rangle N(l_i)^{-1}$. Damit erhält man für $b, b' \in \mathcal{B}(U_i)$ bzw. $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$:

$$\begin{aligned}
\langle b l_i, l_i^* b'\rangle^{*_{\mathcal{B}}} &= (b\langle l_i, l_i^*\rangle b')^{*_{\mathcal{B}}} \\
&= b'^{*_{\mathcal{B}}}\langle l_i, l_i^*\rangle b^{*_{\mathcal{B}}} && ((32), (30)(\mathrm{i})) \\
&= \langle b'^{*_{\mathcal{B}}} l_i^{*\check{*}}, l_i^* b^{*_{\mathcal{B}}}\rangle = \langle (l_i^* b')^{\check{*}}, (b l_i)^*\rangle, \text{ also gilt (39).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b l_i)^{*\check{\#}} &= (l_i^* b^{*_{\mathcal{B}}})^{\check{\#}} = (l_i^{\#}\langle l_i, l_i^*\rangle N(l_i)^{-1} b^{*_{\mathcal{B}}})^{\check{\#}} \\
&= b^{*_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} N(l_i)^{-2}\langle l_i, l_i^*\rangle^{\#_{\mathcal{B}}} l_i^{\#\check{\#}} \\
&= b^{*_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} N(l_i)^{-2} N_{\mathcal{B}}(\langle l_i, l_i^*\rangle)\langle l_i, l_i^*\rangle^{-1} N(l_i) l_i && ((13), (22)) \\
&= b^{\#_{\mathcal{B}}*_{\mathcal{B}}} N(l_i)^{-1} N(l_i) N(l_i)^{*_{\mathcal{B}}}\langle l_i, l_i^*\rangle^{-1} l_i && ((33), (18)) \\
&= b^{\#_{\mathcal{B}}*_{\mathcal{B}}}(\langle l_i, l_i^*\rangle^{-1})^{*_{\mathcal{B}}} N(l_i)^{*_{\mathcal{B}}} l_i^{*\check{*}} && ((32), (30)(\mathrm{i})) \\
&= (l_i^*\langle l_i, l_i^*\rangle^{-1} N(l_i) b^{\#_{\mathcal{B}}})^{\check{*}} \\
&= (l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}})^{\check{*}} = (b l_i)^{\#\check{*}}, \text{ also gilt (37).}
\end{aligned}$$

$$\check{w}^{\check{*}\#} = \check{w}^{\check{*}\#\check{*}*} = \check{w}^{\check{*}*\check{\#}*} = \check{w}^{\check{\#}*}, \text{ also gilt (38).}$$

$$\begin{aligned}
\check{N}((b l_i)^*) &= \check{N}(l_i^* b^{*_{\mathcal{B}}}) = N_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}})\check{N}(l_i^*) \\
&= N_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}}) N(l_i)^{-1} N_{\mathcal{B}}(\langle l_i, l_i^*\rangle) && ((25))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= N_{\mathcal{B}}(b)^{*_{\mathcal{B}}} N(l_i)^{-1} N(l_i) N(l_i)^{*_{\mathcal{B}}} && ((33), (16))\\
&= (N_{\mathcal{B}}(b) N(l_i))^{*_{\mathcal{B}}} = N(bl_i)^{*_{\mathcal{B}}}, \text{ also gilt } (36).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle bl_i, (bl_i)^* \rangle (bl_i)^{*\check{\#}} &= b\langle l_i, l_i^* \rangle b^{*_{\mathcal{B}}} (bl_i)^{\#\check{*}} = (l_i^{\#} b^{\#_{\mathcal{B}}} b \langle l_i, l_i^* \rangle b^{*_{\mathcal{B}}})^{\check{*}}\\
&= (l_i^* N(l_i) \langle l_i, l_i^* \rangle^{-1} N_{\mathcal{B}}(b) \langle l_i, l_i^* \rangle b^{*_{\mathcal{B}}})^{\check{*}} = (l_i^* N(bl_i) b^{*_{\mathcal{B}}})^{\check{*}}\\
&= b^{*_{\mathcal{B}} *_{\mathcal{B}}} N(bl_i)^{*_{\mathcal{B}}} l_i = N(bl_i)^{*_{\mathcal{B}}} bl_i, \text{ also gilt } (40).
\end{aligned}
$$

□

### 2.23 Theorem (Tits-Prozeß)

Sei $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$ $\mathcal{B}$-zulässig, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß, $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{A}$-zulässiger $\mathcal{B}$-Modul und $(N, *)$ $\mathcal{A}$-zulässig. $\check{N}, \#, \check{\#}, \check{*}$ seien die nach 2.13 bzw. 2.22 induzierten Abbildungen.

Definiert man

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\mathcal{J}} := \mathcal{A} \oplus \mathcal{P},\\
&\tilde{1} := (1, 0) \in H^0(X, \widetilde{\mathcal{J}}),\\
&\tilde{N}(a, w) := N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^* \rangle)\\
&\qquad = N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + N(w)^{*_{\mathcal{B}}} - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^* \rangle),\\
&(a, w)^{\tilde{\#}} := (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, w^{*\check{\#}} - aw)\\
&\qquad = (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, w^{\#\check{*}} - aw)
\end{aligned}
$$

für $a \in \mathcal{A}$ und $w \in \mathcal{P}$, so ist $(\tilde{N}, \tilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\widetilde{\mathcal{J}}$, und für die zugehörige Spurform gilt:

$$
\tilde{T}\big((a, w), (c, v)\big) = T_{\mathcal{B}}(a, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle)
$$

für $a, c \in \mathcal{A}$ und $v, w \in \mathcal{P}$. Die hierdurch induzierte $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\tilde{N}, \tilde{\#}, \tilde{1})$ wird mit $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, N, *)$ bezeichnet.

<u>Beweis:</u>
$\mathcal{A} \oplus \mathcal{P}$ ist als direkte Summe von $\mathcal{O}_X$-Moduln ein $\mathcal{O}_X$-Modul. $\tilde{N}$ bzw. $\tilde{\#}$ ist eine kubische bzw. quadratische Abbildung, da sie jeweils aus Polynomabbildungen entsprechenden Grades zusammengesetzt ist.
Für $r \in \mathcal{O}'_X$ gilt:

$$
(1 + r)(1 + r)^{*_{\mathcal{B}}} = (1 + r)(1^{*_{\mathcal{B}}} + r^{*_{\mathcal{B}}}) = (1 + r)(1 + r^{*_{\mathcal{B}}}) = 1 + r + r^{*_{\mathcal{B}}} + rr^{*_{\mathcal{B}}}.
$$

Wegen $(1+r)(1+r^{*_\mathcal{B}}), 1, rr^{*_\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_X$ ((29)(ii)) ergibt sich damit $r + r^{*_\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_X$. Dies impliziert in Verbindung mit (36):

$$N(w) + \check{N}(w^*) = N(w) + N(w)^{*_\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_X \quad \text{für } w \in \mathcal{P}.$$

Hieraus und wegen (31) (i), (iii), (32) ist $\tilde{N}$ somit eine kubische Form von $\widetilde{\mathcal{J}}$ nach $\mathcal{O}_X$. (32) und (31) (ii) implizieren ferner, daß $\widetilde{\#}$ eine quadratische Abbildung von $\widetilde{\mathcal{J}}$ nach $\widetilde{\mathcal{J}}$ ist.
Um nun zu zeigen, daß $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt ist, ist die Gültigkeit der Identitäten (1)–(5) nachzuweisen. Dazu wird zunächst $D\tilde{N}$ berechnet. Seien $x = (a, w), y = (c, v) \in \widetilde{\mathcal{J}}$ und $\lambda \in \mathcal{O}_X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{N}(x + \lambda y) &= \tilde{N}((a, w) + \lambda(c, v)) = \tilde{N}(a + \lambda c, w + \lambda v) \\
&= N_\mathcal{B}(a + \lambda c) + N(w + \lambda v) + \check{N}((w + \lambda v)^*) \\
&\quad -T_\mathcal{B}(a + \lambda c, \langle w + \lambda v, (w + \lambda v)^* \rangle) \\
&= N_\mathcal{B}(a) + \lambda D_c N_\mathcal{B}(a) + \lambda^2 D_a N_\mathcal{B}(c) + \lambda^3 N_\mathcal{B}(c) \\
&\quad +N(w) + \lambda D_v N(w) + \lambda^2 D_w N(v) + \lambda^3 N(v) \\
&\quad +\check{N}(w^*) + \lambda D_{v^*} \check{N}(w^*) + \lambda^2 D_{w^*} \check{N}(v^*) + \lambda^3 \check{N}(v^*) \\
&\quad -T_\mathcal{B}(a, \langle w, w^* \rangle) \\
&\quad -\lambda[T_\mathcal{B}(c, \langle w, w^* \rangle) + T_\mathcal{B}(a, \langle v, w^* \rangle) + T_\mathcal{B}(a, \langle w, v^* \rangle)] \\
&\quad -\lambda^2[T_\mathcal{B}(a, \langle v, v^* \rangle) + T_\mathcal{B}(c, \langle w, v^* \rangle) + T_\mathcal{B}(c, \langle v, w^* \rangle)] \\
&\quad -\lambda^3 T_\mathcal{B}(c, \langle v, v^* \rangle).
\end{aligned}$$

Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
D_y \tilde{N}(x) &= D_c N_\mathcal{B}(a) + D_v N(w) + D_{v^*} \check{N}(w^*) \\
&\quad -T_\mathcal{B}(c, \langle w, w^* \rangle) - T_\mathcal{B}(a, \langle v, w^* \rangle) - T_\mathcal{B}(a, \langle w, v^* \rangle) \\
&= T_\mathcal{B}(a^{\#_\mathcal{B}}, c) + T_\mathcal{B}(\langle v, w^\# \rangle) + T_\mathcal{B}(\langle w^{*\check{\#}}, v^* \rangle) - T_\mathcal{B}(c, \langle w, w^* \rangle) \\
&\quad -T_\mathcal{B}(\langle v, w^* a \rangle) - T_\mathcal{B}(\langle aw, v^* \rangle) \qquad ((3), (26), (27), (19)) \\
&= T_\mathcal{B}(a^{\#_\mathcal{B}} - \langle w, w^* \rangle, c) + T_\mathcal{B}(\langle v, w^{\#\check{*}*} - w^* a \rangle) + T_\mathcal{B}(\langle w^{\#\check{*}} - aw, v^* \rangle) \\
&\qquad ((35), (37)) \\
&= T_\mathcal{B}(a^{\#_\mathcal{B}} - \langle w, w^* \rangle, c) + T_\mathcal{B}(\langle v, (w^{\#\check{*}} - aw)^* \rangle) + T_\mathcal{B}(\langle w^{\#\check{*}} - aw, v^* \rangle).
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$D_y \tilde{N}(\tilde{1}) = T_\mathcal{B}(1^{\#_\mathcal{B}}, c) = T_\mathcal{B}(c).$$

Als nächstes wird $D_x D_y \tilde{N}(\tilde{1})$ berechnet. Es gilt:

$$D_y \tilde{N}(\tilde{1} + \lambda x) = D_y \tilde{N}(1 + \lambda a, \lambda w)$$

$$
\begin{aligned}
&= T_{\mathcal{B}}((1+\lambda a)^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle \lambda w, (\lambda w)^* \rangle, c) \\
&\qquad + T_{\mathcal{B}}(\langle v, ((\lambda w)^{\#\check{*}} - (1+\lambda a)\lambda w)^* \rangle) \\
&\qquad + T_{\mathcal{B}}(\langle (\lambda w)^{\#\check{*}} - (1+\lambda a)\lambda w, v^* \rangle) \\
&= T_{\mathcal{B}}(1 + \lambda(1 \times_{\mathcal{B}} a) + \lambda^2 a^{\#_{\mathcal{B}}} - \lambda^2 \langle w, w^* \rangle, c) \\
&\qquad + T_{\mathcal{B}}(\langle v, (\lambda^2 w^{\#\check{*}} - \lambda w - \lambda^2 a w)^* \rangle) \\
&\qquad + T_{\mathcal{B}}(\langle \lambda^2 w^{\#\check{*}} - \lambda w - \lambda^2 a w, v^* \rangle) \\
&= T_{\mathcal{B}}(1, c) + \lambda T_{\mathcal{B}}(1 \times_{\mathcal{B}} a, c) + \lambda^2 T_{\mathcal{B}}(a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, c) \\
&\qquad - \lambda T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) + \lambda^2 T_{\mathcal{B}}(\langle v, (w^{\#\check{*}} - a w)^* \rangle) \\
&\qquad - \lambda T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle) + \lambda^2 T_{\mathcal{B}}(\langle w^{\#\check{*}} - a w, v^* \rangle).
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
D_x D_y \tilde{N}(\tilde{1}) = T_{\mathcal{B}}(1 \times_{\mathcal{B}} a, c) - T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) - T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle).
$$

Gemäß der Definition der Spurform $\widetilde{T}$ erhält man insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}(x, y) &= D_x \tilde{N}(\tilde{1}) D_y \tilde{N}(\tilde{1}) - D_x D_y \tilde{N}(1) \\
&= T_{\mathcal{B}}(a) T_{\mathcal{B}}(c) - T_{\mathcal{B}}(1 \times_{\mathcal{B}} a, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle) \\
&= T_{\mathcal{B}}(a) T_{\mathcal{B}}(c) - T_{\mathcal{B}}(T_{\mathcal{B}}(a) 1 - a, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle) && ((5)) \\
&= T_{\mathcal{B}}(a) T_{\mathcal{B}}(c) - T_{\mathcal{B}}(a) T_{\mathcal{B}}(c) + T_{\mathcal{B}}(a, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle) \\
&= T_{\mathcal{B}}(a, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, w^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle w, v^* \rangle).
\end{aligned}
$$

Damit ist die Gültigkeit der Formel für die Spurform gezeigt, und man erhält außerdem:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}(x^{\widetilde{\#}}, y) &= \widetilde{T}((a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, w^{*\check{\#}} - a w), (c, v)) \\
&= T_{\mathcal{B}}(a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, c) + T_{\mathcal{B}}(\langle v, (w^{*\check{\#}} - a w)^* \rangle) + T_{\mathcal{B}}(\langle w^{*\check{\#}} - a w, v^* \rangle) \\
&= D_y \tilde{N}(x) && ((37)).
\end{aligned}
$$

Die Identität (3) ist also für $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, 1)$ erfüllt. Als nächstes wird (1) nachgerechnet.

$$
\begin{aligned}
x^{\widetilde{\#}\widetilde{\#}} = (a, w)^{\widetilde{\#}\widetilde{\#}} &= (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle, w^{*\check{\#}} - a w)^{\widetilde{\#}} \\
&= \Big( (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle)^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w^{*\check{\#}} - a w, (w^{*\check{\#}} - a w)^* \rangle, \\
&\qquad (w^{*\check{\#}} - a w)^{*\check{\#}} - (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^* \rangle)(w^{*\check{\#}} - a w) \Big).
\end{aligned}
$$

Für die $\mathcal{A}$-Komponente erhält man:

$$
a^{\#_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} - a^{\#_{\mathcal{B}}} \times_{\mathcal{B}} \langle w, w^* \rangle + \langle w, w^* \rangle^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w^{*\check{\#}}, w^{*\check{\#}*} \rangle
$$

$$
\begin{aligned}
&+\langle w^{*\check{\#}}, w^*a\rangle + \langle aw, w^{*\check{\#}*}\rangle - \langle aw, w^*a\rangle \\
&= N_{\mathcal{B}}(a)a - a^{\#_{\mathcal{B}}} \times_{\mathcal{B}} \langle w, w^*\rangle + \langle w^{*\check{\#}}, w^{\#}\rangle - \langle w^{*\check{\#}}, w^{*\check{*}\#}\rangle + \langle w^{\#\check{*}}, w^*\rangle a \\
&\quad +a\langle w, w^{*\check{*}\#}\rangle - a\langle w, w^*\rangle a && ((1), (24), (38), (37)) \\
&= N_{\mathcal{B}}(a)a + \langle w^{*\check{\#}}, w^{\#}\rangle - \langle w^{*\check{\#}}, w^{\#}\rangle + \langle w, w^{\#}\rangle^{*_{\mathcal{B}}} a \\
&\quad +a\langle w, w^{\#}\rangle - a^{\#_{\mathcal{B}}} \times_{\mathcal{B}} \langle w, w^*\rangle - a\langle w, w^*\rangle a && ((34), (39)) \\
&= [N_{\mathcal{B}}(a) + N(w)^{*_{\mathcal{B}}} + N(w)]a - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle)a && ((20), (14)) \\
&= [N_{\mathcal{B}}(a) + \check{N}(w^*) + N(w) - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle)]a && ((36)) \\
&= \tilde{N}(a, w)a.
\end{aligned}
$$

Für die $\mathcal{P}$-Komponente ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
&(w^{*\check{\#}*} - w^*a)^{\check{\#}} - a^{\#_{\mathcal{B}}} w^{*\check{\#}} + a^{\#_{\mathcal{B}}} aw + \langle w, w^*\rangle w^{*\check{\#}} - \langle w, w^*\rangle aw \\
&= w^{\#\check{\#}} - w^{\#} \check{\times} w^*a + (w^*a)^{\check{\#}} - (w^*a)^{\check{\#}} + N_{\mathcal{B}}(a)w + N(w)^{*_{\mathcal{B}}} w - \langle w, (aw)^*\rangle w \\
& && ((38), (34), (40)) \\
&= [N(w) + N_{\mathcal{B}}(a) + \check{N}(w^*)]w - w^{\#} \check{\times} (aw)^* - \langle w, (aw)^*\rangle w && ((22), (36)) \\
&= [N(w) + N_{\mathcal{B}}(a) + \check{N}(w^*)]w - T_{\mathcal{B}}(\langle w, (aw)^*\rangle)w && ((28)) \\
&= [N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(\langle w, w^*\rangle a)]w \\
&= [N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle)]w && ((19)) \\
&= \tilde{N}(a, w)w.
\end{aligned}
$$

Somit gilt (1) für $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$. (2) und (4) sind wegen $\tilde{N}(\tilde{1}) = N_{\mathcal{B}}(1) = 1$ und $\tilde{1}^{\widetilde{\#}} = (1^{\#_{\mathcal{B}}}, 0) = (1, 0) = \tilde{1}$ erfüllt. Damit bleibt nur noch die Gültigkeit von (5) zu beweisen.

$$
\begin{aligned}
\tilde{1} \tilde{\times} x &= \big((1,0) + (a,w)\big)^{\widetilde{\#}} - (1,0)^{\widetilde{\#}} - (a,w)^{\widetilde{\#}} \\
&= (1 + a, w)^{\widetilde{\#}} - (1,0) - (a,w)^{\widetilde{\#}} \\
&= \big((1+a)^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{*\check{\#}} - (1+a)w\big) - (1,0) \\
&\qquad -(a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{*\check{\#}} - aw) \\
&= (1 \times_{\mathcal{B}} a, -w) = (T_{\mathcal{B}}(a)1 - a, -w) = T_{\mathcal{B}}(a)(1,0) - (a,w) \\
&= \tilde{T}\big((a,w), (1,0)\big)(1,0) - (a,w) = \tilde{T}(x, \tilde{1})\tilde{1} - x = \tilde{T}(x)\tilde{1} - x.
\end{aligned}
$$

Hiermit ist alles gezeigt. □

## 2.24 Bemerkung

Ist $\mathcal{J}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{J}}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, $(N, \#, 1)$ bzw. $(\tilde{N}, \widetilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Norm mit Adjunkter und Basispunkt auf $\mathcal{J}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{J}}$ und $f : \mathcal{J} \to \widetilde{\mathcal{J}}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus mit $\tilde{N}(f(x)) = N(x)$ und $f(x)^{\widetilde{\#}} = f(x^{\#})$ für $x \in \mathcal{J}$

und $f(1) = \tilde{1}$, so ist $f : \mathcal{J}(N, \#, 1) \to \mathcal{J}(\tilde{N}, \tilde{\#}, \tilde{1})$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren.

<u>BEWEIS:</u>
Die Behauptung folgt sofort daraus, daß

$$f(U) : \mathcal{J}(N(U), \#(U), 1|_U) \longrightarrow \mathcal{J}(\tilde{N}(U), \tilde{\#}(U), \tilde{1}|_U)$$

für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren ist (vgl. [M1]). □

Im nächsten Theorem wird die erste Tits-Konstruktion (vgl. [M1]) auf geringte Räume verallgemeinert. Beim Beweis wird dabei so vorgegangen, daß die erste Tits-Konstruktion als Spezialfall des Tits-Prozesses betrachtet wird (vgl. [P-R1], Theorem 3.5), wobei die Aussage natürlich auch direkt gezeigt werden könnte.

### 2.25 Theorem (1. Tits-Konstruktion)

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $\mathcal{A}$ eine assoziative, unitäre $\mathcal{O}_X$-Algebra, $(N_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$ ein $\mathcal{A}$-Linksmodul vom Rang 1 mit $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}_X$ und $N$ eine Norm auf $\mathcal{P}$, wobei $\mathcal{A}^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$ und $N_{\mathcal{A}}(xy) = N_{\mathcal{A}}(x)N_{\mathcal{A}}(y)$ für $x, y \in \mathcal{A}$ gelte. $N, \#, \check{\#}$ seien die gemäß 2.13 induzierten Abbildungen.

Definiert man

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{J}} &:= \mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}, \\
\tilde{1} &:= (1, 0, 0) \in H^0(X, \widetilde{\mathcal{J}}), \\
\tilde{N}(a, w, \check{w}) &:= N_{\mathcal{A}}(a) + N(w) + \check{N}(\check{w}) - T_{\mathcal{A}}(a, \langle w, \check{w} \rangle), \\
(a, w, \check{w})^{\tilde{\#}} &:= (a^{\#_{\mathcal{A}}} - \langle w, \check{w} \rangle, \check{w}^{\check{\#}} - aw, w^{\#} - \check{w}a)
\end{aligned}$$

für $a \in \mathcal{A}$, $w \in \mathcal{P}$, $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$, so ist $(\tilde{N}, \tilde{\#}, \tilde{1})$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt auf $\widetilde{\mathcal{J}}$, und für die zugehörige Spurform gilt:

$$\tilde{T}\Big((a, w, \check{w}), (c, v, \check{v})\Big) = T_{\mathcal{A}}(a, c) + T_{\mathcal{A}}(\langle w, \check{v} \rangle) + T_{\mathcal{A}}(\langle v, \check{w} \rangle).$$

Die hierdurch induzierte $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\tilde{N}, \tilde{\#}, \tilde{1})$ wird mit $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ bezeichnet.
Definiert man weiter

$$\begin{aligned}
&\mathcal{O}'_X := \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X, \quad (r, s)^{*_{\mathcal{B}}} := (s, r), \\
&\mathcal{B} := \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \quad (a, c)^{*_{\mathcal{B}}} := (c, a), \quad 1_{\mathcal{B}} := (1, 1), \\
&N_{\mathcal{B}}(a, c) := (N_{\mathcal{A}}(a), N_{\mathcal{A}}(c)), \quad (a, c)^{\#_{\mathcal{B}}} := (a^{\#_{\mathcal{A}}}, c^{\#_{\mathcal{A}}}), \\
&\mathcal{O}^0_X := \{(r, r) \mid r \in \mathcal{O}_X\},
\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}^0 := \{(a,a) \mid a \in \mathcal{A}\},$$
$$\mathcal{P}^0 := \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}},$$
$$N^0(w,\check{w}) := (N(w), \check{N}(\check{w})), \quad (w,\check{w})^{*^0} := (\check{w}, w)$$

für $r,s \in \mathcal{O}_X$, $a,c \in \mathcal{A}$, $w \in \mathcal{P}$, $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$, so erfüllen $\mathcal{O}'_X$, $\mathcal{B}$, $*_\mathcal{B}$, $(N_\mathcal{B}, \#_\mathcal{B}, 1_\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}^0, \mathcal{O}^0_X)$, $\mathcal{P}^0$ und $(N^0, *^0)$ die Voraussetzungen von Theorem 2.23, und es gilt insbesondere

$$\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^0, \mathcal{P}^0, N^0, *^0) \cong \mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N).$$

<u>BEWEIS:</u>
Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ eine assoziative unitäre $\mathcal{O}'_X$-Algebra, $*_\mathcal{B}$ eine Involution auf $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{O}'_X$ und $N_\mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{O}'_X$ bzw. $\#_\mathcal{B} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ eine kubische bzw. quadratische Abbildung, wobei für $a, a', c, c' \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\begin{aligned}(a,c)^{\#_\mathcal{B}\#_\mathcal{B}} &= (a^{\#_\mathcal{A}\#_\mathcal{A}}, c^{\#_\mathcal{A}\#_\mathcal{A}}) = (N_\mathcal{A}(a)a, N_\mathcal{A}(c)c) = (N_\mathcal{A}(a), N_\mathcal{A}(c))(a,c)\\ &= N_\mathcal{B}(a,c)(a,c),\end{aligned}$$

$$\widetilde{T}_\mathcal{B}\Big((a,c),(a',c')\Big) = (T_\mathcal{A}(a,a'), T_\mathcal{A}(c,c')) \qquad \text{(Differentiationsregeln)},$$

$$\begin{aligned}D_{(a',c')}N_\mathcal{B}(a,c) &= (D_{a'}N_\mathcal{A}(a), D_{c'}N_\mathcal{A}(c)) = (T_\mathcal{A}(a^{\#_\mathcal{A}}, a'), T_\mathcal{A}(c^{\#_\mathcal{A}}, c'))\\ &= \widetilde{T}_\mathcal{B}\Big((a^{\#_\mathcal{A}}, c^{\#_\mathcal{A}}), (a',c')\Big) = \widetilde{T}_\mathcal{B}\Big((a,c)^{\#_\mathcal{B}}, (a',c')\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1_\mathcal{B} \times_\mathcal{B} (a,c) &= (1 \times_\mathcal{A} a, 1 \times_\mathcal{A} c) = (T_\mathcal{A}(a)1 - a, T_\mathcal{A}(c)1 - c)\\ &= T_\mathcal{B}(a,c)(1,1) - (a,c),\end{aligned}$$

$$N_\mathcal{B}(1_\mathcal{B}) = (N_\mathcal{A}(1), N_\mathcal{A}(1)) = (1,1),$$

$$1_\mathcal{B}^{\#_\mathcal{B}} = (1^{\#_\mathcal{A}}, 1^{\#_\mathcal{A}}) = (1,1),$$

$$\begin{aligned}N_\mathcal{B}\Big((a,c)(a',c')\Big) &= N_\mathcal{B}(aa', c'c) = (N_\mathcal{A}(aa'), N_\mathcal{A}(c'c))\\ &= \Big(N_\mathcal{A}(a)N_\mathcal{A}(a'), N_\mathcal{A}(c')N_\mathcal{A}(c)\Big) = N_\mathcal{B}(a,c)N_\mathcal{B}(a',c'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_\mathcal{B}((a,c)^{*_\mathcal{B}}) &= N_\mathcal{B}(c,a) = (N_\mathcal{A}(c), N_\mathcal{A}(a)) = (N_\mathcal{A}(a), N_\mathcal{A}(c))^{*_\mathcal{B}}\\ &= (N_\mathcal{B}(a,c))^{*_\mathcal{B}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a,c)(a',c')(a,c) &= (aa'a, cc'c) = (T_\mathcal{A}(a,a')a - a^{\#_\mathcal{A}} \times_\mathcal{A} a', T_\mathcal{A}(c,c')c - c^{\#_\mathcal{A}} \times_\mathcal{A} c')\\ &= T_\mathcal{B}\Big((a,c),(a',c')\Big)(a,c) - (a,c)^{\#_\mathcal{B}} \times_\mathcal{B} (a',c'),\end{aligned}$$

und $1_\mathcal{B}$ ist das Einselement der Algebra $\mathcal{B}$. Folglich ist $(N_\mathcal{B}, \#_\mathcal{B}, 1_\mathcal{B})$ eine $\mathcal{B}$-zulässige kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt. Offensichtlich ist $(\mathcal{A}^0, \mathcal{O}^0_X)$ ein

$\mathcal{B}$-großes Paar und $\mathcal{P}^0$ ein lokal freier $\mathcal{B}$-Linksmodul vom Rang 1. Der Kozyklus $(u_{ij})$ repräsentiere nun die Isomorphieklasse von $\mathcal{P}$ in $\operatorname{Pic}_{\mathrm{lft}} \mathcal{A}$, und es gelte $l_i = u_{ij} l_j$ mit lokalen Basisvektoren $l_i \in \mathcal{P}(U_i)$. Dann gilt $N(l_i) = N_{\mathcal{A}}(u_{ij}) N(l_j)$, und wegen $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) = \mathcal{O}_X$, d. h. $N(l_i) \in \mathcal{O}(U_i)^\times$, folgt $N_{\mathcal{A}}(u_{ij}) = N(l_i) N(l_j)^{-1}$. Setzt man für $i \in I$ $\gamma_i := (N(l_i), N(l_i)^{-1})$, so ist $(\gamma_i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}'^\times_X)$, und es gilt $\gamma_i^{*_\mathcal{B}} = (N(l_i)^{-1}, N(l_i)) = \gamma_i^{-1}$.
Gemäß 2.12 repräsentiert der Kozyklus $((u_{ij}, u_{ij}^{-1}))$ die Isomorphieklasse des $\mathcal{B}$-Moduls $\mathcal{P}^0$. Wegen

$$(u_{ij}, u_{ij}^{-1})^{*_\mathcal{B}} = (u_{ij}^{-1}, u_{ij}) = (u_{ij}, u_{ij}^{-1})^{-1}$$

und

$$N_\mathcal{B}(u_{ij}, u_{ij}^{-1}) = (N_\mathcal{A}(u_{ij}), N_\mathcal{A}(u_{ij})^{-1}) = \Big(N(l_i)N(l_j)^{-1}, N(l_i)^{-1}N(l_j)\Big) = \gamma_i \gamma_j^{-1}$$

ist $\mathcal{P}^0$ gemäß 2.20 $\mathcal{A}$-zulässig mit $a_i = 1$. Da $N$ eine Norm auf $\mathcal{P}$ ist, folgt sofort, daß $N^0$ eine Norm auf $\mathcal{P}^0$ ist. Wegen $\check{\mathcal{P}}^0 \cong \check{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{P}$ ist $*^0$ außerdem offensichtlich eine Involution auf $\mathcal{P}^0$, und es gilt für $w \in \mathcal{P}$, $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$:

$$\langle (w, \check{w}), (w, \check{w})^{*^0} \rangle = \langle (w, \check{w}), (\check{w}, w) \rangle = (\langle w, \check{w} \rangle, \langle w, \check{w} \rangle) \in \mathcal{A},$$

$$\begin{aligned} N_\mathcal{B}(\langle (w, \check{w}), (w, \check{w})^{*^0} \rangle) &= N_\mathcal{B}(\langle w, \check{w} \rangle, \langle w, \check{w} \rangle) \\ &= (N_\mathcal{A}(\langle w, \check{w} \rangle), N_\mathcal{A}(\langle w, \check{w} \rangle)) \\ &= (N(w)\check{N}(\check{w}), N(w)\check{N}(\check{w})) \\ &= (N(w), \check{N}(\check{w}))(\check{N}(\check{w}), N(w)) \\ &= N^0(w, \check{w})(N^0(w, \check{w}))^{*_\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Folglich ist $(N^0, *^0)$ $\mathcal{A}$-zulässig. $\mathcal{O}'_X$, $\mathcal{B}$, $*_\mathcal{B}$, $(N_\mathcal{B}, \#_\mathcal{B}, 1_\mathcal{B})$, $(\mathcal{A}^0, \mathcal{O}^0_X)$, $\mathcal{P}^0$ und $(N^0, *^0)$ erfüllen also die Voraussetzungen von Theorem 2.23.
Um zu zeigen, daß $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ eine Jordan-Algebra mit $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N) \cong \mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^0, \mathcal{P}^0, N^0, *^0)$ ist, genügt es nach 2.24, einen $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $f : \mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{A}^0 \oplus \mathcal{P}^0$ mit $f(x)^{\widetilde{\#}^0} = f(x^{\widetilde{\#}})$ und $\tilde{N}^0(f(x)) = (\tilde{N}(x), \tilde{N}(x))$ für $x \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}$ und $f(1,0,0) = ((1,1),(0,0))$, wobei $\tilde{N}^0$ bzw $\widetilde{\#}^0$ die Norm bzw. Adjunkte von $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}^0, \mathcal{P}^0, N^0, *^0)$ bezeichne.
Definiert man $\#^0 : \mathcal{P}^0 \to \check{\mathcal{P}}^0$, $\check{\#}^0 : \check{\mathcal{P}}^0 \to \mathcal{P}^0$, $\check{N}^0 : \check{\mathcal{P}}^0 \to \mathcal{O}^0_X$ und $\check{*}^0 : \check{\mathcal{P}}^0 \to \overline{\mathcal{P}^0}$ durch:

$$\begin{aligned} (w, \check{w})^{\#^0} &= (w^\#, \check{w}^{\check{\#}}), \\ (\check{w}, w)^{\check{\#}^0} &= (\check{w}^{\check{\#}}, w^\#), \\ \check{N}^0(\check{w}, w) &= (\check{N}(\check{w}), N(w)), \\ (\check{w}, w)^{\check{*}^0} &= (w, \check{w}), \end{aligned}$$

dann ist $\#^0$ eine Adjunkte auf $\mathcal{P}$, $\check{\#}^0$ eine Adjunkte auf $\check{\mathcal{P}}^0$, $\check{N}^0$ eine Norm auf $\check{\mathcal{P}}^0$ und $\check{*}^0$ eine Involution auf $\check{\mathcal{P}}^0$, und es gelten die Bedingungen (20)–(22) und $\check{*}^0 = \overline{(*^0)^{-1}}$. Durch $f(a,w,\check{w}) := ((a,a),(w,\check{w}))$ wird nun ein $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus $f : \mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{A}^0 \oplus \mathcal{P}^0$ definiert, wobei gilt:

$$f(1,0,0) = ((1,1),(0,0)),$$

$$\begin{aligned}
f(a,w,\check{w})^{\widetilde{\#}^0} &= ((a,a),(w,\check{w}))^{\widetilde{\#}^0} \\
&= \Big((a,a)^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle (w,\check{w}),(w,\check{w})^{*^0}\rangle, (w,\check{w})^{*^0\check{\#}^0} - (a,a)(w,\check{w})\Big) \\
&= \Big((a^{\#_{\mathcal{A}}}, a^{\#_{\mathcal{A}}}) - (\langle w,\check{w}\rangle, \langle \check{w}, w\rangle), (\check{w}^{\check{\#}}, w^{\#}) - (aw, \check{w}a)\Big) \\
&= \Big((a^{\#_{\mathcal{A}}} - \langle w,\check{w}\rangle, a^{\#_{\mathcal{A}}} - \langle w,\check{w}\rangle), (\check{w}^{\check{\#}} - aw, w^{\#} - \check{w}a)\Big) \\
&= f(a^{\#_{\mathcal{A}}} - \langle w,\check{w}\rangle, \check{w}^{\check{\#}} - aw, w^{\#} - \check{w}a) \\
&= f((a,w,\check{w})^{\widetilde{\#}}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}^0(f(a,w,\check{w})) &= \tilde{N}^0((a,a),(w,\check{w})) \\
&= N_{\mathcal{B}}(a,a) + N^0(w,\check{w}) + \check{N}^0((w,\check{w})^{*^0}) \\
&\quad - T_{\mathcal{B}}\Big((a,a), \langle (w,\check{w}),(w,\check{w})^{*^0}\rangle\Big) \\
&= (N_{\mathcal{A}}(a), N_{\mathcal{A}}(a)) + (N(w), \check{N}(\check{w})) + (\check{N}(\check{w}), N(w)) \\
&\quad - T_{\mathcal{B}}\Big((a,a), (\langle w,\check{w}\rangle, \langle \check{w}, w\rangle)\Big) \\
&= \Big(N_{\mathcal{A}}(a) + N(w) + \check{N}(\check{w}), N_{\mathcal{A}}(a) + N(w) + \check{N}(\check{w})\Big) \\
&\quad - \Big(T_{\mathcal{A}}(a, \langle w,\check{w}\rangle), T_{\mathcal{A}}(a, \langle w,\check{w}\rangle)\Big) \\
&= (\tilde{N}(a,w,\check{w}), \tilde{N}(a,w,\check{w})).
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

## 2.26 Bemerkung

a) Unter den Voraussetzungen von 2.23 bzw. 2.25 gilt für $P \in X$:

$$\mathcal{J}(\mathcal{B},\mathcal{A},\mathcal{P},N,*)_P \cong \mathcal{J}(\mathcal{B}_P,\mathcal{A}_P,\mathcal{P}_P,N_P,*_P)$$

bzw.

$$\mathcal{J}(\mathcal{A},\mathcal{P},N)_P \cong \mathcal{J}(\mathcal{A}_P,\mathcal{P}_P,N_P),$$

wobei die rechte Seite ein Tits-Prozeß im Sinne von 2.2 bzw. eine erste Tits-Konstruktion im Sinne von 2.3 über $\mathcal{O}_P$ ist.

b) Sind $(X,\mathcal{O}'_X)$ und $(X,\mathcal{O}_X)$ lokal geringte Räume, $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{O}'_X$-Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 mit einer Involution $*_{\mathcal{B}}$ und $\mathcal{O}'_X$ als $\mathcal{O}_X$-Modul lokal frei vom konstanten Rang 2 mit $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X,*_{\mathcal{B}}) = \mathcal{O}_X$, dann gilt

$\mathcal{J}(\mathcal{B},\mathcal{H}(\mathcal{B},*_{\mathcal{B}}),\mathcal{P},N,*)_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P) \cong$

$$\mathcal{J}(\mathcal{B}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P), H(\mathcal{B}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P), (*_{\mathcal{B}})_P \otimes 1\!\!1), \mathcal{P}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P), N_P \otimes 1\!\!1, *_P \otimes 1\!\!1),$$

wobei die rechte Seite eine zweite Tits-Konstruktion im Sinne von [M1] ist, d.h. $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}}), \mathcal{P}, N, *)$ ist eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$.
Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal geringter Raum und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9, dann gilt

$$\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P) \cong \mathcal{J}(\mathcal{A}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P), \mathcal{P}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P), N_P \otimes 1\!\!1),$$

wobei die rechte Seite eine Albert-Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ ist, d.h. $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ ist eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$.

## 2.27 Bemerkung

Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum, $*$ eine Involution auf $\mathcal{O}_X$ und $\mathcal{J}$ eine $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra. Ist $\sigma : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ eine Involution auf $\mathcal{J}$, d. h. ein Automorphismus von Jordan-Algebren der Länge kleiner gleich 2, der $*$ fortsetzt, dann ist die Garbe $\mathcal{H}(\mathcal{J}, \sigma) := \{x \in \mathcal{J} \mid \sigma(x) = x\}$ der Fixelemente eine $\mathcal{H}(\mathcal{O}_X, *)$-Jordan-Algebra.

Im nächsten Theorem wird dargestellt, wie sich analog zu [M1], [P-R1], Theorem 3.6 der Tits-Prozeß in eine erste Tits-Konstruktion einbetten läßt.

## 2.28 Theorem

Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}'_X$, $*_{\mathcal{B}}$, $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$, $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$, $\mathcal{P}$ und $(N, *)$ mit den gleichen Eigenschaften wie in 2.23 gegeben. Dann erfüllen $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}'_X$, $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$, $\mathcal{P}$ und $N$ insbesondere die Voraussetzungen von Theorem 2.25. Vermöge

$$(b, w, \check{w})^* := (b^{*_{\mathcal{B}}}, \check{w}^{\check{*}}, w^*) \quad \text{für } (b, w, \check{w}) \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}$$

wird eine Involution $* : \mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N) \to \mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N)$ definiert, und es gilt:

$$\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, N, *) \cong \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N), *),$$

d. h. die $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, N, *)$ wird isomorph auf eine $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra $\mathcal{K}$ abgebildet, wobei $\mathcal{K}$ eine Untergarbe der $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *_{\mathcal{B}})$-Jordan-Algebra $\mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N), *)$ ist. Für $\mathcal{A} = \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}})$ gilt $\mathcal{K} = \mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N), *)$.

<u>Beweis:</u>
Klar ist, daß $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}'_X$, $(N_{\mathcal{B}}, \#_{\mathcal{B}}, 1)$, $\mathcal{P}$ und $N$ die Voraussetzungen von 2.25 erfüllen, und $* : \mathcal{B} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}} \to \mathcal{B} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}$ eine semilineare Bijektion ist. Bezeichnet $N'$ bzw. $\#'$ die Norm bzw. Adjunkte von $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N)$, so gilt für $(b, w, \check{w}) \in \mathcal{B} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}$:

$$\begin{aligned}
(b, w, \check{w})^{*\#'} &= (b^{*_{\mathcal{B}}}, \check{w}^{\check{*}}, w^*)^{\#'} \\
&= (b^{*_{\mathcal{B}}\#_{\mathcal{B}}} - \langle \check{w}^{\check{*}}, w^* \rangle, w^{*\check{\#}} - b^{*_{\mathcal{B}}} \check{w}^{\check{*}}, \check{w}^{\check{*}\#} - w^* b^{*_{\mathcal{B}}}) \\
&= (b^{\#_{\mathcal{B}}*_{\mathcal{B}}} - \langle w, \check{w} \rangle^{*_{\mathcal{B}}}, w^{\check{\#}\check{*}} - (\check{w}b)^{\check{*}}, \check{w}^{\check{\#}*} - (bw)^*)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, \check{w}\rangle, \check{w}^{\check{\#}} - bw, w^{\#} - \check{w}b)^* \\
&= (b, w, \check{w})^{\#' *},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N'((b, w, \check{w})^*) &= N'(b^{*_{\mathcal{B}}}, \check{w}^{\check{*}}, w^*) \\
&= N_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}}) + N(\check{w}^{\check{*}}) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(b^{*_{\mathcal{B}}}, \langle \check{w}^{\check{*}}, w^*\rangle) \\
&= N_{\mathcal{B}}(b)^{*_{\mathcal{B}}} + \check{N}(\check{w})^{*_{\mathcal{B}}} + N(w)^{*_{\mathcal{B}}} - T_{\mathcal{B}}(b, \langle w, \check{w}\rangle)^{*_{\mathcal{B}}} \\
&= N'(b, w, \check{w})^{*_{\mathcal{B}}},
\end{aligned}
$$

$$
(1, 0, 0)^* = (1, 0, 0).
$$

Nach Definition des $U$-Operators in $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N)$ ist der $U$-Operator also mit $*$ verträglich, d. h. $*$ ist eine Involution auf $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N)$. Gemäß 2.27 ist $\mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N), *)$ damit eine $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *_{\mathcal{B}})$-Jordan-Algebra. Weiter ist nach Voraussetzung $\mathcal{K} := \{(a, w, w^*) \mid a \in \mathcal{A},\ w \in \mathcal{P}\}$ eine Untergarbe von $\mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{P}, N), *) = \{(b, w, w^*) \mid b \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}}),\ w \in \mathcal{P}\}$ und ein $\mathcal{O}_X$-Modul, und es gilt für $(a, w, w^*) \in \mathcal{K}$:

$$
\begin{aligned}
(a, w, w^*)^{\#'} &= (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{*\check{\#}} - aw, w^{\#} - w^* a) \\
&= (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{\#\check{*}} - aw, (w^{\#\check{*}} - aw)^*) \in \mathcal{K},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N'(a, w, w^*) &= N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle) \\
&= N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + N(w)^{*_{\mathcal{B}}} - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle) \in \mathcal{O}_X,
\end{aligned}
$$

$$
(1, 0, 0) \in H^0(X, \mathcal{K}).
$$

Folglich ist $\mathcal{K}$ eine $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra. Definiert man schließlich $f : \mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \to \mathcal{K}$ durch $f(a, w) := (a, w, w^*)$ für $(a, w) \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{P}$, so ist $f$ ein $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismus, und es gilt für $(a, w) \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{P}$, falls $\tilde{N}$ bzw. $\tilde{\#}$ die Norm bzw. Adjunkte auf $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, \mathcal{P}, N, *)$ bezeichnet:

$$
\begin{aligned}
f(a, w)^{\#'} &= (a, w, w^*)^{\#'} = (a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{*\check{\#}} - aw, w^{\#} - w^* a) \\
&= f(a^{\#_{\mathcal{B}}} - \langle w, w^*\rangle, w^{*\check{\#}} - aw) = f((a, w)^{\tilde{\#}}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N'(f(a, w)) &= N'(a, w, w^*) = N_{\mathcal{B}}(a) + N(w) + \check{N}(w^*) - T_{\mathcal{B}}(a, \langle w, w^*\rangle) \\
&= \tilde{N}(a, w),
\end{aligned}
$$

$$
f(1, 0) = (1, 0, 0).
$$

Das heißt, $f$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebren. Damit ist alles gezeigt. $\square$

## 2.29 Beispiele

a) Seien $\mathcal{O}'_X$, $\mathcal{B}$, $*_\mathcal{B}$, $(N_\mathcal{B}, \#_\mathcal{B}, 1)$ und $(\mathcal{A}, \mathcal{O}_X)$ mit den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem 2.23 gegeben. Nach 2.19 ist ${}_\mathcal{B}\mathcal{B}$ $\mathcal{A}$-zulässig, und die Menge der $\mathcal{A}$-zulässigen Paare ist mit der Menge der Paare $(u*_\mathcal{B}, \beta N_\mathcal{B})$ identisch, für die $u \in H^0(X, \mathcal{A}^\times)$, $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}'^\times_X)$ und $N_\mathcal{B}(u) = \beta\beta^{*_\mathcal{B}}$ gilt. Die zu $\beta N_\mathcal{B}$ gehörige Adjunkte ist $\beta\#_\mathcal{B}$, und wegen $({}_\mathcal{B}\mathcal{B})^\vee \cong \mathcal{B}_\mathcal{B}$ gilt $(\beta N_\mathcal{B})^\vee = \beta^{-1}N_\mathcal{B}$ (nach (25)) und $(\beta\#_\mathcal{B})^\vee = \beta^{-1}\#_\mathcal{B}$ (nach (24)). Bezeichnet $\tilde{N}$ bzw. $\tilde{\#}$ die Norm bzw. die Adjunkte der $\mathcal{O}_X$-Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{A}, {}_\mathcal{B}\mathcal{B}, \beta N_\mathcal{B}, u*_\mathcal{B})$, so erhält man für $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ wegen $\langle b, \check{b}\rangle = b\check{b}$ für $b \in {}_\mathcal{B}\mathcal{B}$, $\check{b} \in \mathcal{B}_\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}(a,b)^{\tilde{\#}} &= (a^{\#_\mathcal{B}} - bub^{*_\mathcal{B}}, \beta^{-1}(ub^{*_\mathcal{B}})^{\#_\mathcal{B}} - ab)\\ &= (a^{\#_\mathcal{B}} - bub^{*_\mathcal{B}}, \beta^{*_\mathcal{B}}b^{*_\mathcal{B}\#_\mathcal{B}}u^{-1} - ab)\end{aligned}$$

(wegen $\beta^{-1}(ub^{*_\mathcal{B}})^{\#_\mathcal{B}} = \beta^{-1}b^{*_\mathcal{B}\#_\mathcal{B}}u^{\#_\mathcal{B}} = \beta^{-1}b^{*_\mathcal{B}\#_\mathcal{B}}N_\mathcal{B}(u)u^{-1} = \beta^{-1}b^{*_\mathcal{B}\#_\mathcal{B}}\beta\beta^{*_\mathcal{B}}u^{-1}$),

$$\begin{aligned}\tilde{N}(a,b) &= N_\mathcal{B}(a) + \beta N_\mathcal{B}(b) + \beta^{-1}N_\mathcal{B}(ub^{*_\mathcal{B}}) - T_\mathcal{B}(a, bub^{*_\mathcal{B}})\\ &= N_\mathcal{B}(a) + \beta N_\mathcal{B}(b) + \beta^{*_\mathcal{B}}N_\mathcal{B}(b^{*_\mathcal{B}}) - T_\mathcal{B}(a, bub^{*_\mathcal{B}})\end{aligned}$$

(wegen $\beta^{-1}N_\mathcal{B}(ub^{*_\mathcal{B}}) = \beta^{-1}N_\mathcal{B}(b^{*_\mathcal{B}})N_\mathcal{B}(u) = \beta^{-1}N_\mathcal{B}(b)^{*_\mathcal{B}}\beta\beta^{*_\mathcal{B}}$).

Dies entspricht dem Tits-Prozeß, wie er in [P-R1] (vgl. 2.2) definiert wurde.

b) Seien $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{A}$ und $(N_\mathcal{A}, \#_\mathcal{A}, 1)$ mit den gleichen Eigenschaften wie in Theorem 2.25 gegeben. ${}_\mathcal{A}\mathcal{A}$ ist ein global freier $\mathcal{A}$-Linksmodul vom Rang 1 mit $N_\mathcal{A}({}_\mathcal{A}\mathcal{A}) \cong \mathcal{O}_X$. Gemäß 2.11 entsprechen die Normen auf ${}_\mathcal{A}\mathcal{A}$ genau den kubischen Abbildungen $\beta N_\mathcal{A}$, $\beta \in H^0(X, \mathcal{O}_X^\times)$. Die zu $\beta N_\mathcal{A}$ gehörige Adjunkte ist $\beta\#_\mathcal{B}$, und wegen $({}_\mathcal{A}\mathcal{A})^\vee = \mathcal{A}_\mathcal{A}$ gilt $(\beta N_\mathcal{B})^\vee = \beta^{-1}N_\mathcal{B}$ und $(\beta\#_\mathcal{B})^\vee = \beta^{-1}\#_\mathcal{B}$. Bezeichnet $\tilde{N}$ bzw. $\tilde{\#}$ die Norm bzw. Adjunkte der Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\mathcal{A}, {}_\mathcal{A}\mathcal{A}, N)$, so gilt für $a_0, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ wegen $\langle a_1, a_2\rangle = a_1a_2$:

$$(a_0, a_1, a_2)^{\tilde{\#}} = (a^{\#_\mathcal{A}} - a_1a_2, \beta^{-1}a_2^{\#_\mathcal{A}} - a_0a_1, \beta a_1^{\#_\mathcal{A}} - a_2a_0),$$

$$\tilde{N}(a_0, a_1, a_2) = N_\mathcal{A}(a_0) + \beta N_\mathcal{A}(a_1) + \beta^{-1}N_\mathcal{A}(a_2) - T_\mathcal{A}(a_0, a_1a_2).$$

Dies entspricht der ursprünglichen ersten Tits-Konstruktion (vgl. 2.3).

# 3 Die erste und zweite Tits-Konstruktion von Albert-Algebren über lokal geringten Räumen

In diesem Paragraphen wird bewiesen, daß eine Albert-Algebra $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ über einem lokal geringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ eine erste Tits-Konstruktion (im Sinne von 2.25) ist, falls $\mathcal{J}$ eine $\mathcal{O}_X$-Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 enthält, bzw. ein Tits-Prozeß (im Sinne von 2.23) ist, falls $\mathcal{J}$ die Untergarbe der hermiteschen Elemente einer $\mathcal{O}'_X$-Azumaya-Algebra mit Involution $*$ vom konstanten Rang 9 enthält, wobei $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *) = \mathcal{O}_X$ gilt, und $\mathcal{O}'_X$ lokal frei vom konstanten Rang 2 ist. Hierzu wird benötigt, daß eine Albert-Algebra über einem lokalen Ring, die eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 als Unteralgebra enthält, eine klassische erste Tits-Konstruktion (d. h. im Sinne von [P-R1], 3.5) ist.
Im folgenden bezeichne $(X, \mathcal{O}_X)$ bzw. $(X, \mathcal{O}'_X)$ einen lokal geringten Raum.

## 3.1 Definition

Eine unitäre, assoziative $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ heißt Azumaya-Algebra, falls $\mathcal{A}$ als $\mathcal{O}_X$-Modul lokal frei von endlichem Rang und $\mathcal{A}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \boldsymbol{\kappa}(P)$ für jedes $P \in X$ eine zentral-einfache Algebra über $\boldsymbol{\kappa}(P)$ ist.

$(\mathrm{su}(\mathcal{J}), \sigma_{\mathrm{u}})$ (vgl. [J3]) bezeichne die spezielle universelle Einhüllende einer Jordan-Algebra $J$ über $R$. Ist $A$ eine unitäre, assoziative $R$-Algebra mit einer Involution $*$, so heißt $(A, *)$ perfekt (vgl. [J3]), falls $(A, i)$ eine spezielle universelle Einhüllende der Jordan-Algebra $H(A, *)$ ist, wobei $i : H(A, *) \to A$ die kanonische Einbettung sei.

## 3.2 Satz

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $A$ eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang $n^2$, und $*$ bezeichne die Vertauschungsinvolution auf $A \oplus A^{\mathrm{op}}$. Dann ist $(A \oplus A^{\mathrm{op}}, *)$ perfekt.

BEWEIS:
Es gilt $H(A \oplus A^{\mathrm{op}}, *) \cong A$. $\sigma : A \to A \oplus A^{\mathrm{op}}$ bezeichne die Diagonalabbildung. Da $A$ eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang ist, gibt es eine treuflache étale $R$-Algebra $S$, so daß $A \otimes_R S \cong \mathrm{Mat}_n(S)$ (vgl. [K1], S. 143) gilt. $* \otimes \mathbb{1}_S$ ist eine Involution auf $(A \oplus A^{\mathrm{op}}) \otimes_R S \cong (A \otimes_R S) \oplus (A \otimes_R S)^{\mathrm{op}}$ mit $H((A \oplus A^{\mathrm{op}}) \otimes_R S, * \otimes \mathbb{1}_S) \cong A \otimes_R S \cong \mathrm{Mat}_n(S)$.Gemäß einem Theorem von Martindale (vgl. [J2], S. 124) ist $(\mathrm{Mat}_n(S) \oplus \mathrm{Mat}_n(S)^{\mathrm{op}}, * \otimes \mathbb{1}_S)$ perfekt, d. h. $(\mathrm{Mat}_n(S) \oplus \mathrm{Mat}_n(S)^{\mathrm{op}}, * \otimes \mathbb{1}_S)$ ist eine spezielle universelle Einhüllende von $\mathrm{Mat}_n(S)^+$. Da $\sigma : A^+ \to A \oplus A^{\mathrm{op}}$ eine assoziative Spezialisierung ist, gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $f : \mathrm{su}(A^+) \to A \oplus A^{\mathrm{op}}$ assoziativer $R$-Algebren. Damit ist auch $f \otimes \mathbb{1}_S : \mathrm{su}(A^+) \otimes_R S \to (A \oplus A^{\mathrm{op}}) \otimes_R S$ ein Homomorphismus assoziativer $R$-Algebren. Da $\mathrm{su}(A^+) \otimes_R S$ und $(A \oplus A^{\mathrm{op}}) \otimes_R S \cong \mathrm{Mat}_n(S) \oplus$

$\mathrm{Mat}_n(S)^{\mathrm{op}}$ spezielle universelle Einhüllende von $(A \oplus A^{\mathrm{op}}) \otimes_R S$ sind, ist $f \otimes 1\!\!1_S$ ein Isomorphismus. Folglich ist auch $f$ ein Isomorphismus, da $S$ treuflach über $R$ ist, d. h. es gibt einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $f : \mathrm{su}(A^+) \to A \oplus A^{\mathrm{op}}$ assoziativer Algebren. Dies bedeutet, $(A \oplus A^{\mathrm{op}}, \sigma)$ ist spezielle universelle Einhüllende der Jordan-Algebra $A^+$. □

## 3.3 Lemma

Sei $J = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ eine Jordan-Algebra über $R$ und $A$ eine Jordan-Unteralgebra von $J$. $A^\perp$ bezeichne das orthogonale Komplement von $A$ bezüglich der Spurform $T$. Definiert man die Abbildung $g : A \to \mathrm{End}_R(A^\perp)^+$ durch $g(a)(z) = -a \times z$ für $z \in A^\perp$ und $a \in A$, dann ist $g$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren.

Beweis:
Vgl. [P-R2], Lemma 3.2 (i). □

## 3.4 Bemerkung

Sei $J$ eine Albert-Algebra über $R$. $J$ enthalte eine Jordan-Unteralgebra der Form $A^+$, wobei $A$ eine Azumaya-Algebra über $R$ vom konstanten Rang 9 sei. Gemäß Satz 1.16 gilt $J = \mathcal{J}(N, \#, 1)$, wobei $(N, \#, 1)$ eine kubische Form mit Adjunkter und Basispunkt ist. Da $A^+$ eine Unteralgebra von $J$ ist, erhält man mit (7) $A^\# \subset A$, also $A^+ = \mathcal{J}(N|_A, \#|_A, 1)$. Nach Satz 1.12 ist $N|_A$ bzw. $T|_A$ mit der reduzierten Norm bzw. Spur der Azumaya-Algebra $A$ identisch. Durch die Zuordnung $a \mapsto T|_{A\times A}(a, -)$ wird folglich ein Isomorphismus $A \to \mathrm{Hom}_R(A, R)$ definiert. Dies impliziert $J = A \oplus A^\perp$ (als direkte Summe von $R$-Moduln). Bezeichnet $\mathrm{pr}_A$ bzw. $\mathrm{pr}_{A^\perp}$ die orthogonale Projektion von $J$ auf $A$ bzw. $A^\perp$, so sind $r : A^\perp \to A^\perp$ mit $r(z) = \mathrm{pr}_{A^\perp}(z^\#)$ und $q : A^\perp \to A$ mit $q(z) = \mathrm{pr}_A(z^\#)$ quadratische Abbildungen, und es gilt $z^\# = q(z) + r(z)$. Da $N|_A$ mit der reduzierten Norm auf $A$ übereinstimmt, folgt außerdem, daß $\mathcal{J}(A, \mu)$ für $\mu \in R^\times$ definiert ist.

## 3.5 Lemma

Sei $J$ eine Albert-Algebra über $R$ und $A$ eine Azumaya-Algebra über $R$ vom konstanten Rang 9 mit $A^+ \subset J$. Dann gelten für $z \in A^\perp$ und $a \in A$ die folgenden Identitäten:

$$q(-a \times z) = aq(z)a, \tag{41}$$

$$r(-a \times z) = -a^\# \times r(z), \tag{42}$$

$$q(-a \times z, r(z)) = -N(z)a, \tag{43}$$

$$r(-a \times z, r(z)) = q(z) \times (a \times z) - T(a, q(z))z, \tag{44}$$

$$r(r(z)) = N(z)z - q(z) \times r(z), \tag{45}$$

$$q(-a \times z, z) = U_{a,q(z)}(1), \tag{46}$$

(47) $$r(-a \times z, z) = U_{a,r(z)}(1).$$

<u>BEWEIS:</u>
Wegen $J = A \oplus A^\perp$,

$$\begin{aligned} N(a+z) &= N(a) + D_a N(z) + D_z N(a) + N(z) = N(a) + T(a^\#, z) + T(z^\#, a) + N(z) \\ &= N(a) + T(q(z) + r(z), a) + N(z) = N(a) + T(q(z), a) + N(z) \end{aligned}$$

und

$$(a+z)^\# = a^\# + a \times z + z^\# = a^\# + q(z) - a \cdot z + r(z) \quad \text{für} \quad a \in A^+, z \in A^\perp$$

erfüllen $M = A^\perp, \hat{N} = N, q, r$ und $a \cdot z = -a \times z$ die Voraussetzungen von [P-R2], Lemma 3.3, und gemäß diesem Lemma folgen die Behauptungen. □

## 3.6 Theorem

Sei $J$ eine Albert-Algebra über $R$. $J$ enthalte eine Jordan-Unteralgebra der Form $A^+$, wobei $A$ eine Azumaya-Algebra über $R$ vom konstanten Rang 9 sei.

a) Ist $l \in A^\perp$ invertierbar, und gilt $a \times (b \times l) = -ab \times l$ für alle $a, b \in A$, und setzt man $\mu := N(l)$, so ist die Einbettung $A^+ \hookrightarrow J$ eindeutig zu einem Isomorphismus $\mathcal{J}(A, \mu) \to J$ von Jordan-Algebren fortsetzbar. Dieser ist gegeben durch

$$(a_0, a_1, a_2) \longmapsto a_0 - a_1 \times l - \mu^{-1} a_2 \times l.$$

b) Ist $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, so gibt es immer ein invertierbares Element $l \in A^\perp$ mit $a \times (b \times l) = -ab \times l$ für alle $a, b \in A$.

<u>BEWEIS:</u>
Im Fall, daß $R$ ein Körper ist, wurde die Behauptung von McCrimmon (vgl. [M2], Theorem 8) gezeigt. Dieser Beweis wurde von Petersson und Racine (vgl. [P-R2], Theorem 3.1) vereinfacht. Im folgenden wird im wesentlichen die Argumentation von McCrimmon bzw. Petersson und Racine übernommen.
Nach Bemerkung 3.4 gilt $J = A \oplus A^\perp$, und nach Lemma 3.3 ist die Abbildung $g : A^+ \to \mathrm{End}_R(A^\perp)^+$, $g(a)(z) = -a \times z$ für $a \in A$, $z \in A^\perp$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren, insbesondere also eine assoziative Spezialisierung von $A^+$. Da gemäß 3.2 $A \oplus A^{\mathrm{op}}$ die spezielle universelle Einhüllende von $A^+$ ist, gibt es also einen Homomorphismus $g' : A \oplus A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(A^\perp)$ assoziativer Algebren, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A^+ \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathrm{End}_R(A^\perp)^+ \\ A \oplus A^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

Definiert man nun die Abbildungen

$$g_1 : A \to \mathrm{End}_R(A^\perp) \quad \text{und} \quad g_2 : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(A^\perp)$$

durch

$$g_1(a) := g'(a,0) \quad \text{und} \quad g_2(a) := g'(0,a) \quad \text{für } a \in A,$$

so sind folglich auch $g_1$ und $g_2$ Homomorphismen assoziativer Algebren. Hierbei gilt:

$$(\star) \quad g_1(a) \circ g_2(b) = g'(a,0) \circ g'(0,b) = g'(0,0) = 0 = g_2(b) \circ g_1(a) \quad \text{für } a, b \in A,$$

$$\mathbb{1}_{A^\perp} = g(1) = g'(1,1) = g_1(1) + g_2(1),$$

$$g_1(1) \circ g_1(1) = g'(1,0) \circ g'(1,0) = g'(1,0) = g_1(1),$$

$$g_2(1) \circ g_2(1) = g_2(1).$$

Dies bedeutet, $g_1(1)$ und $g_2(1)$ bilden ein Orthogonalsystem von Projektionen auf $A^\perp$, man erhält also:

$$A^\perp = g_1(1)(A^\perp) \oplus g_2(1)(A^\perp).$$

Mit $(\star)$ ergibt sich für $z \in A^\perp$ und $a \in A$:

$$\begin{aligned} g_1(a)(g_1(1)(z)) &= (g_1(a) + g_2(a))(g_1(1)(z)) \\ &= g'(a,a)(g_1(1)(z)) = g(a)(g_1(1)(z)) = -a \times g_1(1)(z) \end{aligned}$$

und analog

$$g_2(a)(g_2(1)(z)) = -a \times g_2(1)(z).$$

Wegen $g_i(a)(g_i(1)(z)) = g_i(1) \circ g_i(a)(g_i(1)(z))$ für $i = 1, 2$ sind folglich die durch $g_i'(a)(z) := g_i(a)(z) = -a \times z$ definierten Abbildungen

$$g_1' : A \to \mathrm{End}_R(g_1(1)(A^\perp)) \quad \text{bzw.} \quad g_2' : A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_R(g_2(1)(A^\perp))$$

wohldefiniert und Homomorphismen assoziativer Algebren. Dies bedeutet, vermöge $g_1'$ bzw. $g_2'$ wird auf $g_1(A^\perp)$ bzw. $g_2(A^\perp)$ eine $A$-Links- bzw. $A$-Rechtsmodulstruktur induziert. Insbesondere gilt also für $a, b \in A$:

$$(48) \qquad a \times (b \times z_1) = -ab \times z_1 \quad \text{für } z_1 \in g_1(1)(A^\perp),$$

$$(49) \qquad a \times (b \times z_2) = -ba \times z_2 \quad \text{für } z_2 \in g_2(1)(A^\perp).$$

Setzt man andererseits

$$M_1 := \{z \in A^\perp \mid a \times (b \times z) = -ab \times z \text{ für } a, b \in A\},$$

$$M_2 := \{z \in A^\perp \mid a \times (b \times z) = -ba \times z \text{ für } a, b \in A\},$$

dann ist $M_1$ bzw. $M_2$ bezüglich der durch $-a \times z$ für $a \in A$, $z \in A^\perp$ induzierten Skalarmultipliation ein $A$-Links- bzw. $A$-Rechtsmodul.
Als nächstes wird $M_1 = g_1(1)(A^\perp)$ und $M_2 = g_2(1)(A^\perp)$ gezeigt. Wegen $g_1(1)(A^\perp) \subset M_1$ und $g_2(1)(A^\perp) \subset M_2$ und $A^\perp = g_1(1)(A^\perp) \oplus g_2(1)(A^\perp)$ genügt es $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ nachzuweisen. Sei also $z \in M_1 \cap M_2$. Nach Definition ist $\mathrm{Ann}(z)$ ein zweiseitiges Ideal in $A$. Wegen $-ab \times z = -ba \times z$ gilt $[a, b] \times z = 0$ für $a, b \in A$, d. h. $\mathrm{Ann}(z)$ enthält alle Kommutatoren von $A$. Gemäß [K1], S. 143 gibt es nun eine treuflache $R$-Algebra $S$ mit $A \otimes_R S \cong \mathrm{Mat}_3(S)$. $\mathrm{Ann}(z) \otimes_R S$ ist dann ein zweiseitiges Ideal in $\mathrm{Mat}_3(S)$, daß alle Kommutatoren enthält. Da nach [K1], S. 143 alle zweiseitigen Ideale in $\mathrm{Mat}_3(S)$ die Form $I\,\mathrm{Mat}_3(S)$ mit einem Ideal $I \subset R$ haben, gibt es also ein Ideal $I$ in $R$ mit $\mathrm{Ann}(z) \otimes_R S = I\,\mathrm{Mat}_3(S)$. Hieraus folgt $I = R$, da $\mathrm{Ann}(z) \otimes_R S$ alle Kommutatoren (also z. B. $[e_{ij}, e_{ji}] = e_i - e_j$) enthält. Dies impliziert $\mathrm{Ann}(z) \otimes_R S = \mathrm{Mat}_3(S) = A \otimes_R S$, also $\mathrm{Ann}(z) = A$, da $S$ treuflach über $R$ ist. Damit folgt $0 = -1 \times z = z$, und es ist $A^\perp = M_1 \oplus M_2$ gezeigt.
Als nächstes wird

$$q(z) = 0, \quad z^\# = r(z) \quad \text{für } z \in M_1 \cup M_2 \tag{50}$$

bewiesen. Sei also $z \in M_1$. Gemäß (41) und (48) gilt für $a, b \in A$:

$$q(a \times (b \times z)) = aq(-b \times z)a = abq(z)ba = q(-ab \times z) = abq(z)ab,$$

also $abq(z)[a, b] = 0$. Dies impliziert $a'b'(q(z) \otimes 1_S)[a'b'] = 0$ für $a', b' \in A \otimes_R S = \mathrm{Mat}_3(S)$. Wählt man für $a', b'$ speziell die invertierbaren Elemente $\mathbb{1} + e_{ij}$, $\mathbb{1} + e_{ji}$ für $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, so folgt $q(z) \otimes 1 = 0$, also $q(z) = 0$, da $S$ treuflach über $R$ ist. Analog ergibt sich $q(z) = 0$ für $z \in M_2$.
Als nächstes wird

$$M_1^\# \subset M_2, \quad M_2^\# \subset M_1$$

gezeigt. Für $z \in M_1$ gilt nach (42) und (48) für $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} a^\# \times (b^\# \times r(z)) &= -a^\# \times r(-b \times z) = r(-a \times (-b \times z)) = r(-ab \times z) \\ &= -(ab)^\# \times r(z) = -b^\# a^\# \times r(z). \end{aligned}$$

Wegen $a^{-1} = N(a)^{-1} a^\#$ für $a \in A^\times$ erhält man hieraus

$$a \times (b \times r(z)) = -ba \times r(z) \quad \text{für } a, b \in A^\times,$$

folglich $a \times (b \times r(z)) = -ba \times r(z)$ für $a, b \in A$ (nach Koechers Prinzip, vgl. [J3], 3.7) und damit $z^\# = r(z) \in M_2$. Analog ergibt sich $z^\# \in M_1$ für $z \in M_2$.
Sei nun $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring. Dann ist $J/\mathfrak{m}J$ eine Albert-Algebra über $R/\mathfrak{m}$.

Bezeichnet $M_1'$ die analog zu $M_1$ definierte Menge der Albert-Algebra $J/\mathfrak{m}J$ über $R/\mathfrak{m}$, dann gilt $M_1' \cong M_1/\mathfrak{m}M_1$. Gemäß [P-R2], S. 267, (2.20) enthält $M_1'$ und damit auch $M_1$ invertierbare Elemente. Damit ist b) bewiesen.
$R$ sei nun wieder beliebig und $l \in M_1$ invertierbar. Dann gilt $r(l) = l^\# \in M_2$. Definiert man die Abbildung

$$f : A \oplus A \oplus A \longrightarrow A \oplus A \times l \oplus A \times r(l) \subset J$$

durch

$$f(a,b,c) := a - b \times l - \mu^{-1} c \times r(l) \text{ mit } \mu = N(l),$$

so ist $f$ offensichtlich ein surjektiver $R$-Modulhomomorphismus. Ist $b \in A$ mit $b \times l = 0$ und $c \in A$ mit $c \times r(l) = 0$, dann folgt mit (10) und (11):

$$\begin{aligned}
0 &= l^\# \times (b \times l) = N(l)b + T(l^\#, b)l = N(l)b, \\
0 &= l \times (c \times r(l)) = l \times (c \times l^\#) = N(l)c + T(l,c)l^\# = N(l)c,
\end{aligned}$$

also $b = 0 = c$. Folglich ist $f$ ein Modulisomorphismus. Als nächstes wird gezeigt, daß $f$ ein Jordan-Homomorphismus von $\mathcal{J}(A,\mu)$ nach $J$ ist. Dazu werden die Linearisierungen von (46) und (47) benötigt. Für $a \in A$ und $z, z' \in A^\perp$ gilt:

$$q(-a \times z, z') + q(-a \times z', z) = U_{a,q(z,z')}(1), \tag{51}$$
$$r(-a \times z, z') + r(-a \times z', z) = U_{a,r(z,z')}(1). \tag{52}$$

Damit erhält man für $a, b, c, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} \in A$:

$$\begin{aligned}
f(a,b,c)^\# &= (a - b \times l - \mu^{-1} c \times r(l))^\# \\
&= a^\# + (b \times l)^\# + (\mu^{-1} c \times r(l))^\# - a \times (b \times l) - a \times (\mu^{-1} c \times r(l)) \\
&\quad + (b \times l) \times (\mu^{-1} c \times r(l)) \\
&= a^\# + q(b \times l) + r(b \times l) + \mu^{-2} q(c \times r(l)) + \mu^{-2} r(c \times r(l)) + ab \times l \\
&\quad + \mu^{-1} ca \times r(l) + q(b \times l, \mu^{-1} c \times r(l)) + r(b \times l, \mu^{-1} c \times r(l)) && ((48), (49)) \\
&= a^\# - b^\# \times r(l) - \mu^{-2} c^\# \times r(r(l)) + ab \times l + \mu^{-1} ca \times r(l) \\
&\quad + \mu^{-1}\Big( - q(-c \times (-b \times l), r(l)) + U_{c,q(-b \times l, r(l))}(1)\Big) \\
&\quad + \mu^{-1}\Big( - r(-c \times (-b \times l), r(l)) + U_{c,r(-b \times l, r(l))}(1)\Big) && ((42), (50), (51), (52)) \\
&= a^\# - b^\# \times r(l) - \mu^{-2} c^\# \times \Big(N(l)l - q(l) \times r(l)\Big) + ab \times l + \mu^{-1} ca \times r(l) \\
&\quad + \mu^{-1}\Big( - q(-cb \times l, r(l)) + U_{c,-N(l)b}(1)\Big) \\
&\quad + \mu^{-1}\Big( - r(-cb \times l, r(l)) + U_{c,q(l)\times(b \times l) - T(b,q(l))l}(1)\Big) && ((43), (44), (45), (48)) \\
&= a^\# - b^\# \times r(l) - \mu^{-1} c^\# \times l + ab \times l + \mu^{-1} ca \times r(l) + \mu^{-1}\Big(N(l)cb - N(l)cb - N(l)bc\Big) \\
&\quad + \mu^{-1}\Big( - q(l) \times (cb \times r(l)) + T(cb, q(l))r(l)\Big) && ((43), (44), (50))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^\# - b^\# \times r(l) - \mu^{-1}c^\# \times l + ab \times l + \mu^{-1}ca \times r(l) - bc && ((50))\\
&= (a^\# - bc) - (\mu^{-1}c^\# - ab) \times l - \mu^{-1}(\mu b^\# - ca) \times r(l)\\
&= f((a,b,c)^{\widetilde{\#}}),
\end{aligned}
$$

wobei $\widetilde{\#}$ die Adjungierte von $\mathcal{J}(A,\mu)$ bezeichne.

$$
\begin{aligned}
&T\Big(f(a,b,c), f(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})\Big) = T\Big(a - b\times l - \mu^{-1}c \times r(l), \tilde{a} - \tilde{b}\times l - \mu^{-1}\tilde{c}\times r(l)\Big)\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) - T(a, \tilde{b}\times l) - T(a, \mu^{-1}\tilde{c}\times r(l)) - T(b\times l, \tilde{a})\\
&\qquad + T(b\times l, \tilde{b}\times l) + T(b\times l, \mu^{-1}\tilde{c}\times r(l)) - T(\mu^{-1}c\times r(l), \tilde{a})\\
&\qquad + T(\mu^{-1}c\times r(l), \tilde{b}\times l) + T\Big(\mu^{-1}c\times r(l), \mu^{-1}\tilde{c}\times r(l)\Big)\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) + T(l, b\times(\tilde{b}\times l)) + \mu^{-1}T\Big(l, b\times(\tilde{c}\times r(l)\Big)\\
&\qquad + \mu^{-1}T\Big(r(l), c\times(\tilde{b}\times l)\Big) + \mu^{-2}T\Big(r(l), c\times(\tilde{c}\times r(l))\Big) && ((9))\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) + T(l, -b\tilde{b}\times l) + \mu^{-1}T(l, -\tilde{c}b\times r(l))\\
&\qquad + \mu^{-1}T(r(l), -c\tilde{b}\times l) + \mu^{-2}T(r(l), -\tilde{c}c\times r(l)) && ((48),(49))\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) + T(l\times l, -b\tilde{b}) + \mu^{-1}T(l\times r(l), -\tilde{c}b)\\
&\qquad + \mu^{-1}T(r(l)\times l, -c\tilde{b}) + \mu^{-2}T(r(l)\times r(l), -\tilde{c}c) && ((9))\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) - \mu^{-1}T(l\times l^\#, \tilde{c}b) - \mu^{-1}T(l^\#\times l, c\tilde{b})\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) - \mu^{-1}T(-N(l)1, \tilde{c}b) - \mu^{-1}T(-N(l)1, c\tilde{b}) && ((12))\\
&\quad = T(a,\tilde{a}) + T(\tilde{c}, b) + T(c, \tilde{b})\\
&\quad = \widetilde{T}\Big((a,b,c),(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})\Big),
\end{aligned}
$$

wobei $\widetilde{T}$ die Spurform von $\mathcal{J}(A,\mu)$ bezeichne. Da $f$ also mit den Adjunkten und Spurformen verträglich ist, folgt, daß $f$ ein Homomorphismus von Jordan-Algebren, insgesamt also ein Isomorphismus von Jordan-Algebren ist. Da die Spurform einer Albert-Algebra nichtausgeartet ist, folgt daß $T$ sowohl auf Bild $f$ als auch auf $J$ nichtausgeartet ist, daß also Bild $f = J$ gilt. Damit ist alles gezeigt. $\square$

## 3.7 Bemerkung

Sei $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul. Gilt für die $\mathcal{O}_X$-Untermoduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ von $\mathcal{E}$ $\mathcal{E} = \mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$, dann sind auch $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}'$ lokal frei. $\square$

## 3.8 Bemerkung

Sei $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N, \#, 1)$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{J}$ enthalte eine Unteralgebra der Form $\mathcal{A}^+$, wobei $\mathcal{A}$ eine Azumaya-Algebra über $\mathcal{O}_X$ vom konstanten Rang 9 sei. Dann gilt nach (7) $\mathcal{A}^\# \subset \mathcal{A}$, also $\mathcal{A}^+ = \mathcal{J}(N|_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$. Gemäß 1.12 und

1.13 ist für jedes $P \in X$ $(N|_{\mathcal{A}})_P$ mit der reduzierten Norm von $\mathcal{A}_P$ identisch, also $N|_{\mathcal{A}}(ab) = N|_{\mathcal{A}}(a)N|_{\mathcal{A}}(b)$ für $a, b \in \mathcal{A}$.

### 3.9 Theorem

Sei $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N_{\mathcal{J}}, \#_{\mathcal{J}}, 1)$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{J}$ enthalte eine Unteralgebra der Form $\mathcal{A}^+$, wobei $\mathcal{A}$ eine Azumaya-Algebra über $\mathcal{O}_X$ vom konstanten Rang 9 sei. Dann gibt es einen lokal freien $\mathcal{A}$-Linksmodul $\mathcal{P}$ vom Rang 1 mit $N_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}_X$ und eine Norm $N$ auf $\mathcal{P}$, so daß die kanonische Einbettung $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{J}$ zu einem Isomorphismus $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N) \to \mathcal{J}$ fortsetzbar ist.

BEWEIS:
Für jedes $P \in X$ gilt gemäß 3.4 und 3.6

$$(\star) \qquad \mathcal{J}_P = \mathcal{A}_P \oplus (\mathcal{A}_P)^{\perp} = \mathcal{A}_P \oplus M_{P,1} \oplus M_{P,2},$$

wobei $(\mathcal{A}_P)^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{A}_P$ bezüglich der Spurform $(T_{\mathcal{J}})_P$ bezeichne, und $M_{P,1}$ bzw. $M_{P,2}$ durch

$$M_{P,1} := \{s \in (\mathcal{A}_P)^{\perp} \mid a \times b \times s = -ab \times s \text{ für } a, b \in \mathcal{A}_P\} \text{ bzw.}$$
$$M_{P,2} := \{s \in (\mathcal{A}_P)^{\perp} \mid a \times b \times s = -ba \times s \text{ für } a, b \in \mathcal{A}_P\}$$

definiert sei (wobei $\times$ die Bilinearisierung von $\#_{\mathcal{J}}$ bezeichne). Setzt man nun für jede offene Teilmenge $U$ von $X$

$$H^0(U, \mathcal{A}^{\perp}) := \{w \in H^0(U, \mathcal{J}) \mid w_P \in (\mathcal{A}_P)^{\perp} \text{ für } P \in U\},$$

so erhält man zunächst einen $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{A}^{\perp}$ und dann analog $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ mittels

$$H^0(U, \mathcal{M}_1) = \{w \in H^0(U, \mathcal{A}^{\perp}) \mid w_P \in M_{P,1} \text{ für } P \in U\},$$
$$H^0(U, \mathcal{M}_2) = \{w \in H^0(U, \mathcal{A}^{\perp}) \mid w_P \in M_{P,2} \text{ für } P \in U\}.$$

Offensichtlich gilt $(\mathcal{M}_i)_P \subset M_{P,i}$ für $i = 1, 2$ und $P \in X$.
Als nächstes wird die Gleichheit dieser Mengen gezeigt. Sei also $P \in X$ und $s \in M_{P,1}$. Dann gibt es eine offene Teilmenge $U$ von $X$ und ein Element $w \in H^0(U, \mathcal{A}^{\perp})$ mit $w_P = s$. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{A}(U)$ ein freier $\mathcal{O}_X$-Modul mit Basis $e_1, \ldots, e_9 \in \mathcal{A}(U)$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$T_{\mathcal{J}}((e_i)_P, w_P) = 0 \quad \text{und}$$
$$(e_i)_P \times (e_j)_P \times w_P = -e_{i,P}e_{j,P} \times w_P \quad \text{für } 1 \leq i, j \leq 9.$$

Dies bedeutet, es gibt eine offene Teilmenge $V \subset U$ mit $P \in V$ und

$$T_{\mathcal{J}}(e_i|_V, w|_V) = 0,$$

$$e_i|_V \times e_j|_V \times w|_V = -e_i|_V e_j|_V \times w|_V,$$

also

$$\begin{aligned}&T_{\mathcal{J}}((e_i)_Q, w_Q) = 0,\\ &(e_i)_Q \times (e_j)_Q \times w_Q = -(e_i)_Q(e_j)_Q \times w_Q \quad \text{für } Q \in V \text{ und } 1 \leq i, j \leq 9.\end{aligned}$$

Nach Definition von $\mathcal{M}_1$ erhält man damit $w|_V \in H^0(V, \mathcal{M}_1)$, also $w_P = s \in (\mathcal{M}_1)_P$. Analog ergibt sich $M_{P,2} \subset (\mathcal{M}_2)_P$. Folglich gilt $M_{P,i} = (\mathcal{M}_i)_P$ für $P \in X$ und $i = 1, 2$. Gemäß $(\star)$ impliziert dies

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}^{\perp} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2.$$

Nach Bemerkung 3.7 sind die $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ außerdem insbesondere lokal frei vom konstanten Rang 9. Vermöge der Skalarmultiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_i$ mit $(a, w) \mapsto -a \times w$ für $i = 1, 2$ wird $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$ zu einem $\mathcal{A}$-Links- bzw. $\mathcal{A}$-Rechtsmodul. Gemäß 3.6 gibt es zu jedem $P \in X$ ein invertierbares Element $l^{(P)} \in (\mathcal{M}_1)_P$, so daß die kanonische Einbettung $\mathcal{A}_P \hookrightarrow \mathcal{J}_P$ zu einem Isomorphismus $\mathcal{J}(\mathcal{A}_P, \mu_P) \to \mathcal{J}_P$ fortsetzbar ist mit $\mu_P = N_{\mathcal{J},P}(l^{(P)})$ und $(0, 1, 0) \mapsto l^{(P)}$. Sei nun $U$ eine offene Umgebung von $P$, so daß $\mathcal{A}(U)$ und $\mathcal{M}_i(U)$, $i = 1, 2$, frei sind, und $l \in \mathcal{M}_1(U) \cap \mathcal{J}(U)^{\times}$ mit $l_P = l^{(P)}$ gilt. Dann ist $l^{\#_{\mathcal{J}}} \in \mathcal{M}_2(U)$, und die Abbildungen

$$\begin{aligned}&\varphi_1 : \mathcal{A}|_U \longrightarrow \mathcal{M}_1|_U, \quad a \longmapsto -a \times l\\ &\varphi_2 : \mathcal{A}|_U \longrightarrow \mathcal{M}_2|_U, \quad a \longmapsto -a \times l^{\#_{\mathcal{J}}}\end{aligned}$$

sind $\mathcal{O}_X$-Modulisomorphismen . Da $\varphi_1$ ein $\mathcal{A}$-Links- und $\varphi_2$ ein $\mathcal{A}$-Rechtsmodulisomorphismus ist, folgt, daß $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$ ein lokal freier $\mathcal{A}$-Links bzw. $\mathcal{A}$-Rechtsmodul vom Rang 1 ist.
Sei nun $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X$, so daß $\mathcal{M}_1(U_i)$ und $\mathcal{M}_2(U_i)$ als $\mathcal{A}(U_i)$-Moduln frei, und $l_i \in \mathcal{M}_1(U_i) \cap \mathcal{J}(U_i)^{\times}$ ein Basisvektor von $\mathcal{M}_1(U_i)$ ist. Es gelte $l_i = -u_{ij} \times l_j$ auf $U_{ij}$ mit $u_{ij} \in H^0(U_{ij}, \mathcal{A}^{\times})$. Wegen $\mathcal{J}(\mathcal{A}_P, \mu_P) \cong \mathcal{J}_P$ mit $\mu_P := N_{\mathcal{J},P}((l_i)_P)$ für $P \in U_i$ gilt für $a, b \in \mathcal{A}(U_i)$ (da die entsprechenden Gleichungen in $\mathcal{J}(\mathcal{A}_P, \mu_P)$ Gültigkeit besitzen):

$$\begin{aligned}&N_{\mathcal{J}}(-a \times l_i) = N_{\mathcal{J}}(a) N_{\mathcal{J}}(l_i),\\ &N_{\mathcal{J}}(-a \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}}) = N_{\mathcal{J}}(a) N_{\mathcal{J}}(l_i^{\#_{\mathcal{J}}}),\\ &(-a \times l_i)^{\#_{\mathcal{J}}} = -a^{\#_{\mathcal{J}}} \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}},\\ &(-a \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}})^{\#_{\mathcal{J}}} = -a^{\#_{\mathcal{J}}} \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}\#_{\mathcal{J}}},\\ &(-a \times l_i) \times (-b \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}}) = aN(l_i)b = a(l_i \times l_i^{\#_{\mathcal{J}}})b,\end{aligned}$$

und $l_i^{\#_{\mathcal{J}}} \in \mathcal{M}_2(U_i) \cap \mathcal{J}(U_i)^{\times}$ ist ein Basisvektor von $\mathcal{M}_2(U_i)$. Hieraus folgt

$$N_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{A}}(u_{ij}) = N_{\mathcal{J}}(l_i) N_{\mathcal{J}}(l_j)^{-1},$$

also $N_\mathcal{J}|_\mathcal{A}(\mathcal{M}_1) \cong \mathcal{O}_X$, und $N = N_\mathcal{J} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{O}_X$ ist eine Norm auf $\mathcal{M}_1$. Außerdem ist die Abbildung

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \to \mathcal{A},\ (w_1, w_2) \longmapsto \langle w_1, w_2 \rangle := -w_1 \times w_2$$

wohldefiniert mit

$$\langle -a \times w_1, -b \times w_2 \rangle = a\langle w_1, w_2 \rangle b \quad \text{für } a, b \in \mathcal{A}, w_i \in \mathcal{M}_i, i = 1, 2,$$

und die durch $<,>$ induzierte Abbildung $\mathcal{M}_2 \to \check{\mathcal{M}}_1$ ist ein $\mathcal{A}$-Rechtsmodulisomorphismus. Identifiziert man bezüglich dieses Isomorphismus $\mathcal{M}_2 = \check{\mathcal{M}}_1$, so entspricht $<,>$ der kanonischen Abbildung von $\mathcal{M}_1 \times \check{\mathcal{M}}_1$ in $\mathcal{A}$, und mit den obigen Formeln rechnet man nach, daß $\# = \#_\mathcal{J}|_{\mathcal{M}_1}$, $\check{\#} = \#_\mathcal{J}|_{\mathcal{M}_2}$ und $\check{N} = N_\mathcal{J}|_{\mathcal{M}_2}$ die Bedingungen (20)–(22) erfüllen, also identisch mit den durch $N$ gemäß 2.13 induzierten Abbildungen sind.

$$f : \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \check{\mathcal{M}}_1 \to \mathcal{J},\ f(a, w, \check{w}) = a + w + \check{w}$$

ist ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus, und wegen

$$\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{M}_1, N)_P \cong \mathcal{J}(\mathcal{A}_P, \mu_P) \cong \mathcal{J}_P \quad \text{für } P \in U_i$$

ist $f : \mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{M}_1, N) \to \mathcal{J}$ ein Isomorphismus von Jordan-Algebren. $\square$

### 3.10 Bemerkung

Sei $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N_\mathcal{J}, \#_\mathcal{J}, 1)$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{J}$ enthalte eine Unteralgebra der Form $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine Azumaya-Algebra über $\mathcal{O}'_X$ vom konstanten Rang 9 mit einer Involution $*_\mathcal{B}$ und $\mathcal{O}'_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra vom konstanten Rang 2 mit $\mathcal{H}(\mathcal{O}'_X, *_\mathcal{B}) = \mathcal{O}_X$ sei. Gemäß 1.11 c) ist $\mathcal{J}' = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}'_X$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}'_X$, und es gilt $\mathcal{J}' = \mathcal{J}(N_{\mathcal{J}'}, \#_{\mathcal{J}'}, 1')$, wobei $N_{\mathcal{J}'}$ bzw. $\#_{\mathcal{J}'}$ die Erweiterung von $N_\mathcal{J}$ bzw. $\#_\mathcal{J}$ auf $\mathcal{O}'_X$ bezeichne. $*' = \mathbb{1} \otimes *_\mathcal{B}$ ist eine Involution auf $\mathcal{J}'$. Gemäß [K1], I. (1.3.6) gibt es zu jedem $P \in X$ ein Element $z^{(P)} \in \mathcal{O}'_P$, so daß $1, z^{(P)}$ eine Basis von $\mathcal{O}'_P$ ist. Hieraus folgt

$$\mathcal{B}_P = H(\mathcal{B}_P, (*_\mathcal{B})_P) + z^{(P)} H(\mathcal{B}_P, (*_\mathcal{B})_P) = H(\mathcal{B}_P, (*_\mathcal{B})_P) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}'_P \text{ (als } \mathcal{O}'_P\text{-Moduln)},$$

weil die entsprechende Gleichung in $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ gilt, und

$$\mathcal{J}'_P = \mathcal{J}_P + z^{(P)} \mathcal{J}_P = H(\mathcal{J}'_P, *'_P) + z^{(P)} H(\mathcal{J}'_P, *'_P).$$

Folglich ist $\mathcal{H}(\mathcal{J}', *') \cong \mathcal{J}$ und $\mathcal{B}^+ \cong \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B}) \otimes \mathcal{O}'_X$ (als Jordan-Algebren über $\mathcal{O}'_X$), $\mathcal{J}'$ enthält $\mathcal{B}^+$ als Unteralgebra, und es ist $*'|_\mathcal{B} = *_\mathcal{B}$. Nach Definition von $*'$ gilt weiter für $w \in \mathcal{J}'$:

$$w^{*'\#_{\mathcal{J}'}} = w^{\#_{\mathcal{J}'}*'},$$

$$N_{\mathcal{J}'}(w^{*'}) = N_{\mathcal{J}'}(w)^{*_\mathcal{B}}.$$

Wegen $\mathcal{B}^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, \#_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, 1')$ ist für $P \in X$ $(N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B})_P$ mit der reduzierten Norm von $\mathcal{B}_P$ identisch, d. h. es gilt $N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}(a,b) = N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}(a)N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}(b)$. Außerdem folgt $N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}(b^{*_\mathcal{B}}) = N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}(b)^{*_\mathcal{B}}$ für $b \in \mathcal{B}$. Dies bedeutet, $(N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, \#_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, 1')$ ist $\mathcal{B}$-zulässig. Wegen $N_{\mathcal{J}'}(\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})) \subset \mathcal{O}_X$ und $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})^{\#_{\mathcal{J}'}} \subset \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$ ist $(\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B}), \mathcal{O}_X)$ $\mathcal{B}$-groß.

## 3.11 Theorem

Sei $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N_\mathcal{J}, \#_\mathcal{J}, 1)$ eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}_X$. $\mathcal{J}$ enthalte eine Unteralgebra der Form $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$, wobei $\mathcal{B}$ eine Azumaya-Algebra über $\mathcal{O}'_X$ vom konstanten Rang 9 mit einer Involution $*_\mathcal{B}$ und $\mathcal{O}'_X$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra vom konstanten Rang 2 mit $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B}) = \mathcal{O}_X$ sei. Dann gibt es einen $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$-zulässigen $\mathcal{B}$-Linksmodul $\mathcal{P}$ vom Rang 1 und ein $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$-zulässiges Paar $(N, *)$, so daß die kanonische Einbettung $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{J}$ zu einem Isomorphismus $\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B}), \mathcal{P}, N, *) \to \mathcal{J}$ fortsetzbar ist.

<u>Beweis:</u>
Mit den Bezeichnungen von 3.10 ist $\mathcal{J}'$ gemäß 3.10 eine Albert-Algebra über $\mathcal{O}'_X$, die $\mathcal{B}^+$ als Unteralgebra enthält. $*' = \mathbb{1} \otimes *$ ist eine Involution auf $\mathcal{J}'$ mit $\mathcal{H}(\mathcal{J}', *') \cong \mathcal{J}$. Weiter gilt $\mathcal{B}^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, \#_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, 1')$, $(N_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, \#_{\mathcal{J}'}|_\mathcal{B}, 1')$ ist $\mathcal{B}$-zulässig, und $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_\mathcal{B})$ ist $\mathcal{B}$-groß. Gemäß dem Beweis von Theorem 3.9 ist dann

$$\eta : \mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{M}_1, N) \longrightarrow \mathcal{J}' \quad (b, w, \check{w}) \longmapsto b + w + \check{w}$$

ein Isomorphismus von Jordan-Algebren über $\mathcal{O}'_X$, wobei $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ und $N$ analog wie in 3.9 definiert seien, d. h.

$$H^0(U, \mathcal{M}_1) = \{w \in H^0(U, \mathcal{B}^\perp) \mid a \times b \times w_P = -ab \times w_P \text{ für } a, b \in \mathcal{B}_P,\ P \in U\}$$

(wobei $\times$ die Bilinearisierung von $\#_{\mathcal{J}'}$ bezeichne). Wegen $w^{*'\#_{\mathcal{J}'}} = w^{\#_{\mathcal{J}'}*'}$ (nach 3.10) gilt

$$(+) \qquad (w \times v)^{*'} = w^{*'} \times v^{*'} \quad \text{für } v, w \in \mathcal{J}'.$$

Hieraus folgt

$$s_0^{*_\mathcal{B}} \times s_1^{*_\mathcal{B}} \times s^{*'} = (s_0 \times s_1 \times s)^{*'} = (-s_0 s_1 \times s)^{*'} = -s_1^{*_\mathcal{B}} s_0^{*_\mathcal{B}} \times s^{*'}$$

für $s_0, s_1 \in \mathcal{B}_P,\ s \in \mathcal{M}_{1,P},\ P \in X$, also $w^{*'} \in \mathcal{M}_2$, für $w \in \mathcal{M}_1$, und analog $w^{*'} \in \mathcal{M}_1$ für $w \in \mathcal{M}_2$. Da $*'$ eine Involution auf $\mathcal{J} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ ist, folgt mit $(+)$, daß $*' : \mathcal{M}_1 \to \overline{\mathcal{M}_2}$ ein $\mathcal{B}$-Linksmodulisomorphismus ist. Dies bedeutet $\overline{\mathcal{M}_1^{*_\mathcal{B}}} \cong \mathcal{M}_1 \cong \overline{\mathcal{M}_2} = \overline{\mathcal{M}_1^\vee}$, und $*_{\mathcal{J}'}|_{\mathcal{M}_1}$ ist eine Involution auf $\mathcal{M}_1$ (nach Identifikation von $\check{\mathcal{M}}_1$ und $\mathcal{M}_2$). Weiter erhält man mit $(+)$ für $w \in \mathcal{M}_1$:

$$\langle w, w^{*'} \rangle^{*_\mathcal{B}} = (-w \times w^{*'})^{*'} = -w^{*'} \times w = -w \times w^{*'},$$

also $\langle w, w^{*'}\rangle \in \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}})$, und (wegen (25), 3.10)

$$N'_{\mathcal{J}}(\langle w, w^{*'}\rangle) = N'_{\mathcal{J}}(w)N'_{\mathcal{J}}(w^{*'}) = N'_{\mathcal{J}}(w)N'_{\mathcal{J}}(w)^{*_{\mathcal{B}}}.$$

Wegen $N'_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{B}}(\mathcal{M}_1) \cong \mathcal{O}'_X$ folgt damit insgesamt, daß $\mathcal{M}_1$ ein $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}})$-zulässiger Modul, und $(N', *)$ mit $N' = N_{\mathcal{J}}|_{\mathcal{B}}$ und $* = *'|_{\mathcal{M}_1}$ ein $\mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}})$-zulässiges Paar ist.
Bezeichnet $\tilde{*}$ die Involution von 2.28, dann gilt $\eta \circ \tilde{*} = *' \circ \eta$, d.h. $\eta$ induziert einen Isomorphismus

$$\mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{M}_1, N), \tilde{*}) \cong \mathcal{H}(\mathcal{J}', *'),$$

woraus mit 2.28 und 3.10 folgt:

$$\mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\mathcal{B}, *_{\mathcal{B}}), \mathcal{M}_1, N, *) \cong \mathcal{H}(\mathcal{J}(\mathcal{B}, \mathcal{M}_1, N), \tilde{*}) \cong \mathcal{H}(\mathcal{J}', *') \cong \mathcal{J}.$$

$\square$

# 4 Beispiele

In diesem Paragraphen werden Beispiele des Tits-Prozesses beschrieben. Als Anwendung erhält man Jordan-Algebren, insbesondere auch exzeptionelle Jordan-Algebren mit großem Radikal.
$(X, \mathcal{O}_X)$ sei ein lokal geringter Raum.

**4.1 Beispiel** (vgl. [P-R1], Beispiele 2.1, 4.1 (ii))
Vermöge $N_{\mathcal{A}}(r_1, r_2, r_3) = r_1 r_2 r_3$, $(r_1, r_2, r_3)^{\#_{\mathcal{A}}} = (r_2 r_3, r_3 r_1, r_1 r_2)$ und $1 = (1, 1, 1)$ wird eine kubische Form $(N_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$ mit Adjunkter und Basispunkt auf $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$ definiert, und es gilt $\mathcal{A}^+ = \mathcal{O}_X^+ \oplus \mathcal{O}_X^+ \oplus \mathcal{O}_X^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$ und $N_{\mathcal{A}}(ab) = N_{\mathcal{A}}(a) N_{\mathcal{A}}(b)$ für $a, b \in \mathcal{A}$. Sei nun $\mathcal{P}_i$ für $i = 1, 2, 3$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang 1, und es gelte $\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_3 \cong \mathcal{O}_X$. Dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_3$ ein lokal freier $\mathcal{A}$-Modul vom Rang 1 mit $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_3 \cong \mathcal{O}_X$. Wählt man einen Isomorphismus $\alpha : \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_2 \otimes \mathcal{P}_3 \to \mathcal{O}_X$, dann wird vermöge $N(x, y, z) = \alpha(x \otimes y \otimes z)$ eine Norm $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}_X$ auf $\mathcal{P}$ definiert. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 2.25 erfüllt, d. h. man erhält eine Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$, wobei für $a \in \mathcal{A}$, $w \in \mathcal{P}$, $\check{w} \in \check{\mathcal{P}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(a, w, \check{w}) &= N_{\mathcal{A}}(a) + N(w) + \check{N}(\check{w}) - T(a, \langle w, \check{w} \rangle), \\ (a, w, \check{w})^{\tilde{\#}} &= (a^{\#_{\mathcal{A}}} - \langle w, \check{w} \rangle, \check{w}^{\check{\#}} - a w, w^{\#} - \check{w} a) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} (x, y, z)^{\#} &= (y \otimes z, z \otimes x, x \otimes y), \\ (\check{x}, \check{y}, \check{z})^{\check{\#}} &= (\check{y} \otimes \check{z}, \check{z} \otimes \check{x}, \check{x} \otimes \check{y}), \\ N(\check{x}, \check{y}, \check{z}) &= \check{x} \otimes \check{y} \otimes \check{z}, \\ \langle (x, y, z), (\check{x}, \check{y}, \check{z}) \rangle &= (\langle x, \check{x} \rangle, \langle y, \check{y} \rangle, \langle z, \check{z} \rangle) \end{aligned}$$

für $(x, y, z) \in \mathcal{P}$, $(\check{x}, \check{y}, \check{z}) \in \check{\mathcal{P}} = \check{\mathcal{P}}_1 \oplus \check{\mathcal{P}}_2 \oplus \check{\mathcal{P}}_3$. Hierbei werden die kanonischen Identifikationen $\mathcal{P}_i \otimes \mathcal{P}_j \cong \check{\mathcal{P}}_l$ und $\check{\mathcal{P}}_i \otimes \check{\mathcal{P}}_j \cong \mathcal{P}_l$ für $i, j, l = 1, 2, 3$, $i, j, l$ paarweise verschieden, verwendet. $\square$

**4.2 Beispiel**
Sei $\mathcal{E}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang 3. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{E}nd_X(\mathcal{E})$ eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9, und es gilt $\mathcal{A}^+ = \mathcal{J}(N_{\mathcal{A}}, \#_{\mathcal{A}}, 1)$, wobei $N_{\mathcal{A}}$ bzw. $\#_{\mathcal{A}}$ die gewöhnliche Determinante bzw. Adjunkte ist. Insbesondere gilt dann $N_{\mathcal{A}}(ab) = N_{\mathcal{A}}(a) N_{\mathcal{A}}(b)$ für $a, b \in \mathcal{A}$. Alle lokal freien $\mathcal{A}$-Linksmoduln vom Rang 1 sind von der Form

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \otimes \check{\mathcal{F}} = \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{E}),$$

wobei $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang 3 ist. Dabei gilt $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \cong \det \mathcal{E} \otimes (\det \mathcal{F})^\vee$. Das heißt, es ist $N_{\mathcal{A}}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{O}_X$ genau dann, falls es einen Isomorphismus $\alpha : \det \mathcal{E} \to \det \mathcal{F}$ gibt. Sei nun $\mathcal{F}$ ein lokal freier $\mathcal{A}$-Linksmodul vom Rang 1 und $\alpha : \det \mathcal{E} \to \det \mathcal{F}$ ein Isomorphismus. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte kubische Abbildung $N : \mathcal{P} \to \mathcal{O}_X$, die der Bedingung

$$(\alpha \circ \det)(g) = N(g) 1\!\!1_{\det \mathcal{F}}$$

für $g \in \mathcal{P} = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ genügt. $N$ ist eine Norm auf $\mathcal{P}$. Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 2.25 erfüllt, d. h. man erhält eine Jordan-Algebra $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{P}} &= \check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{F} = \mathcal{H}om_X(\mathcal{E}, \mathcal{F}), \\ \langle g, f \rangle &= g \circ f \quad \text{für } g \in \mathcal{P}, f \in \check{\mathcal{P}}. \end{aligned}$$

Für die zu $N$ gehörige Adjunkte $\# : \mathcal{P} \to \check{\mathcal{P}}$ erhält man:

$$g \circ g^\# = N(g) 1\!\!1_{\mathcal{E}} \quad \text{für } g \in \mathcal{P}.$$

Nach 2.26 ist $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ eine Albert-Algebra. □

## 4.3 Bemerkung

Sei $k$ ein Körper und $X$ eine Kurve (d. h. ein geometrisch integres, vollständiges, glattes Schema der Dimension 1) über $k$. $X$ habe Geschlecht 0. Dann enhält $X$ immer abgeschlossene Punkte vom Grad kleiner gleich 2, und $X$ ist genau dann rational (d. h. isomorph zu der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1_k$ über $k$), falls $X$ rationale Punkte, also Punkte vom Grad 1, enthält. Sei nun $P_0 \in X$ ein Punkt von minimalem Grad. Für einen Divisor $D$ auf $X$ bezeichne $\mathcal{L}(D)$ den zu $D$ gehörigen invertierbaren $\mathcal{O}_X$-Modul. Die Zuordnung $m \mapsto \mathcal{L}(mP_0)$ induziert einen Isomorphismus $\mathbb{Z} \tilde{\to} \operatorname{Pic} X$.

Ist $X$ rational, dann läßt sich jeder lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modul von endlichem Rang in eine direkte Summe von Geradenbündeln zerlegen, d. h. die Isomorphieklassen der lokal freien unzerlegbaren $\mathcal{O}_X$-Moduln entsprechen den Isomorphieklassen lokal freier $\mathcal{O}_X$-Moduln vom Rang 1. Zu jedem lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang $r$ gibt es also Zahlen $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$, so daß gilt

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{L}(m_1 P_0) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(m_r P_0).$$

Sei nun $X$ nicht rational. Dann lassen sich die Isomorphieklassen der lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln von endlichem Rang nach [T] folgendermaßen beschreiben. Jeder lokal freie $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang größer gleich 3 ist zerlegbar. Durch folgende Daten wird ein unzerlegbarer lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{E}_0$ vom Rang 2 gegeben. Ist $\boldsymbol{\kappa}(X)$ der Funktionenkörper von $X$, $t$ ein Ortsparameter von $X$ in $P_0$ und

$f \in \mathcal{O}_{P_0}^{\times}$ so, daß $f(P_0)$ ein erzeugendes Element von $\boldsymbol{\kappa}(P_0)$ über $k$ ist, dann sei $\mathcal{E}_0$ die Untergarbe der konstanten Garbe $\boldsymbol{\kappa}(X)^2$ der Spaltenvektoren, die außerhalb $P_0$ mit $\mathcal{O}_X^2$ übereinstimmt und deren Halm in $P_0$ der freie $\mathcal{O}_{P_0}$-Modul sei, der von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^{-1}f \\ t^{-1} \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Die Isomorphieklassen der unzerlegbaren lokal freien $\mathcal{O}_X$-Moduln vom Rang 2 entsprechen dann den Isomorphieklassen der Moduln $\mathcal{L}(mP_0) \otimes \mathcal{E}_0$, $m \in \mathbb{Z}$. Dies bedeutet, zu jedem lokal freien $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang $r$ gibt es Zahlen $m_1, \ldots, m_s, n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{Z}$ mit $s + 2t = r$ und

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{L}(m_1P_0) \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(m_sP_0) \oplus \mathcal{L}(n_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}(n_tP_0) \otimes \mathcal{E}_0. \qquad \square$$

## 4.4 Beispiel

Sei $k$ ein Körper, $X$ eine nichtrationale Kurve vom Geschlecht Null über $k$ und $P_0$ ein Punkt von minimalem Grad. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ seien lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln vom Rang 3. Gemäß 4.3 gilt dann

$$\mathcal{E} = \mathcal{L}(m_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(m_2P_0) \quad \text{oder} \quad \mathcal{E} = \mathcal{L}(n_1P_0) \oplus \mathcal{L}(n_2P_0) \oplus \mathcal{L}(n_3P_0)$$

und

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}(k_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(k_2P_0) \quad \text{oder} \quad \mathcal{F} = \mathcal{L}(l_1P_0) \oplus \mathcal{L}(l_2P_0) \oplus \mathcal{L}(l_3P_0).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \det \mathcal{E} &\cong \det(\mathcal{L}(m_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0) \otimes \mathcal{L}(m_2P_0) \\ &\cong \mathcal{L}(2m_1P_0) \otimes \mathcal{L}(P_0) \otimes \mathcal{L}(m_2P_0) \\ &\cong \mathcal{L}((2m_1 + 1 + m_2)P_0) \end{aligned}$$

oder

$$\det \mathcal{E} \cong \mathcal{L}(n_1P_0) \otimes \mathcal{L}(n_2P_0) \otimes \mathcal{L}(n_3P_0) \cong \mathcal{L}((n_1 + n_2 + n_3)P_0)$$

und

$$\det \mathcal{F} \cong \mathcal{L}((2k_1 + 1 + k_2)P_0) \quad \text{oder} \quad \det \mathcal{F} \cong \mathcal{L}((l_1 + l_2 + l_3)P_0).$$

Dies bedeutet, es gibt genau dann einen Isomorphismus $\alpha : \det \mathcal{E} \to \det \mathcal{F}$, falls einer der vier folgenden Fälle vorliegt:

i) $\mathcal{E} = \mathcal{L}(m_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(m_2P_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(k_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(k_2P_0)$,
$2m_1 + m_2 = 2k_1 + k_2$,

ii) $\mathcal{E} = \mathcal{L}(m_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(m_2P_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(l_1P_0) \oplus \mathcal{L}(l_2P_0) \oplus \mathcal{L}(l_3P_0)$,
$2m_1 + 1 + m_2 = l_1 + l_2 + l_3$,

iii) $\mathcal{E} = \mathcal{L}(n_1P_0) \oplus \mathcal{L}(n_2P_0) \oplus \mathcal{L}(n_3P_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(k_1P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}(k_2P_0)$,
$n_1 + n_2 + n_3 = 2k_1 + 1 + k_2$,

iv) $\mathcal{E} = \mathcal{L}(n_1 P_0) \oplus \mathcal{L}(n_2 P_0) \oplus \mathcal{L}(n_3 P_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{L}(l_1 P_0) \oplus \mathcal{L}(l_2 P_0) \oplus \mathcal{L}(l_3 P_0)$,
$n_1 + n_2 + n_3 = l_1 + l_2 + l_3$.

Gemäß Beispiel 4.2 ist in diesen Fällen $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ für $\mathcal{A} = \mathcal{E}nd_X(\mathcal{E})$ und $\mathcal{P} = \mathcal{H}om_X(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ eine Albert-Algebra über $X$. $\mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}}$ ist dabei isomorph zu

i)
$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_0) & \mathcal{L}(-aP_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}(aP_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(bP_0) \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_0) & \mathcal{L}((-2b-a)P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}((a+b)P_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}(-2bP_0) \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(-bP_0) \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_0) & \mathcal{L}((-a-b)P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}((2b+a)P_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}(2bP_0) \end{pmatrix}$$
mit $a = m_2 - m_1,\ b = m_1 - k_1$,

ii)
$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}nd(\mathcal{E}_0) & \mathcal{L}(-aP_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}(aP_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(bP_0) \otimes \mathcal{E}_0 & \mathcal{L}(cP_0) \otimes \mathcal{E}_0 & \mathcal{L}(-(a+b+c+1)P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}((a+b)P_0) & \mathcal{L}((a+c)P_0) & \mathcal{L}(-(b+c+1)P_0) \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(-bP_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}(-(a+b)P_0) \\ \mathcal{L}(-cP_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}(-(a+c)P_0) \\ \mathcal{L}((a+b+c+1)P_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}((b+c+1)P_0) \end{pmatrix}$$
mit $a = m_2 - m_1,\ b = m_1 - l_1,\ c = m_1 - l_2$,

iii)
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_X & \mathcal{L}(aP_0) & \mathcal{L}(bP_0) \\ \mathcal{L}(-aP_0) & \mathcal{O}_X & \mathcal{L}((b-a)P_0) \\ \mathcal{L}(-bP_0) & \mathcal{L}((a-b)P_0) & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(cP_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}((a+b-2c+1)P_0) \\ \mathcal{L}((c-a)P_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}((b-2c+1)P_0) \\ \mathcal{L}((c-b)P_0) \otimes \check{\mathcal{E}}_0 & \mathcal{L}((a-2c+1)P_0) \end{pmatrix}$$
$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(-cP_0) \otimes \mathcal{E}_0 & \mathcal{L}((a-c)P_0) \otimes \mathcal{E}_0 & \mathcal{L}((b-c)P_0) \otimes \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{L}((2c-a-b-1)P_0) & \mathcal{L}((2c-b-1)P_0) & \mathcal{L}((2c-a-1)P_0) \end{pmatrix}$$
mit $a = n_1 - n_2,\ b = n_1 - n_3,\ c = n_1 - k_1$,

iv)
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O}_X & \mathcal{L}(aP_0) & \mathcal{L}(bP_0) \\ \mathcal{L}(-aP_0) & \mathcal{O}_X & \mathcal{L}((b-a)P_0) \\ \mathcal{L}(-bP_0) & \mathcal{L}((a-b)P_0) & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(cP_0) & \mathcal{L}((a+d)P_0) & \mathcal{L}((b-c-d)P_0) \\ \mathcal{L}((c-a)P_0) & \mathcal{L}(dP_0) & \mathcal{L}((b-a-c-d)P_0) \\ \mathcal{L}((c-b)P_0) & \mathcal{L}((a-b+d)P_0) & \mathcal{L}((-c-d)P_0) \end{pmatrix}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{L}(-cP_0) & \mathcal{L}((a-c)P_0) & \mathcal{L}((b-c)P_0) \\ \mathcal{L}((-a-d)P_0) & \mathcal{L}(-dP_0) & \mathcal{L}((b-a-d)P_0) \\ \mathcal{L}((-b+c+d)P_0) & \mathcal{L}((a-b+c+d)P_0) & \mathcal{L}((c+d)P_0) \end{pmatrix}$$

mit $a = n_1 - n_2,\ b = n_1 - n_3,\ c = n_1 - l_1,\ d = n_2 - l_2.$ □

Als nächstes werden mit Hilfe der ersten Tits-Konstruktion Albert-Algebren über dem $n$-dimensionalen projektiven Raum über einem Ring $R$ konstruiert, deren globale Schnitte Jordan-Algebren über $R$ liefern.

## 4.5 Beispiel

$X = \mathbb{P}^n_R$ bezeichne den $n$-dimensionalen projektiven Raum über $R$, d. h. es ist $X = \operatorname{Proj} S$ mit $S = R[T_0, \ldots, T_n]$. Für $m \in \mathbb{Z}$ ist $\mathcal{O}_X(m)$ ein lokal freier $\mathcal{O}_X$-Modul vom Rang 1. Seien nun $n_1, n_2, n_3, l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$ mit $n_1+n_2+n_3 = l_1+l_2+l_3$. Dann sind $\mathcal{E} = \mathcal{O}_X(n_1) \oplus \mathcal{O}_X(n_2) \oplus \mathcal{O}_X(n_3)$ und $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X(l_1) \oplus \mathcal{O}_X(l_2) \oplus \mathcal{O}_X(l_3)$ lokal freie $\mathcal{O}_X$-Moduln vom Rang 3, und die Multiplikation in $S$ liefert kanonische Isomorphismen

$$\det \mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X(n_1+n_2+n_3) = \mathcal{O}_X(l_1+l_2+l_3) \cong \det \mathcal{F}.$$

Gemäß Beispiel 4.2 ist dann $\mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ eine Albert-Algebra über $X$ für $\mathcal{A} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{P} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$. Setzt man analog wie in 4.4 iv)

$$a = n_1 - n_2,\ b = n_1 - n_3,\ c = n_1 - l_1,\ d = n_2 - l_2,$$

so gilt

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{P} \oplus \check{\mathcal{P}} \cong \begin{pmatrix} \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(a) & \mathcal{O}_X(b) \\ \mathcal{O}_X(-a) & \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(b-a) \\ \mathcal{O}_X(-b) & \mathcal{O}_X(a-b) & \mathcal{O}_X \end{pmatrix}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{O}_X(c) & \mathcal{O}_X(a+d) & \mathcal{O}_X(b-c-d) \\ \mathcal{O}_X(c-a) & \mathcal{O}_X(d) & \mathcal{O}_X(b-a-c-d) \\ \mathcal{O}_X(c-b) & \mathcal{O}_X(a-b+d) & \mathcal{O}_X(-c-d) \end{pmatrix}$$

$$\oplus \begin{pmatrix} \mathcal{O}_X(-c) & \mathcal{O}_X(a-c) & \mathcal{O}_X(b-c) \\ \mathcal{O}_X(-a-d) & \mathcal{O}_X(-d) & \mathcal{O}_X(b-a-d) \\ \mathcal{O}_X(-b+c+d) & \mathcal{O}_X(a-b+c+d) & \mathcal{O}_X(c+d) \end{pmatrix}.$$

Geht man zu den globalen Schnitten über, so erhält man Jordan-Algebren über $R$, die als $R$-Moduln frei und endlich erzeugt sind. Wegen

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) = \begin{cases} S_m & \text{für } m \geq 0 \\ 0 & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

und $\operatorname{rang}_R S_m = \binom{m+n}{n}$ gilt $\operatorname{rang}_R J \geq 27$ für $J := \mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$. Wählt man nun die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ so, daß sich Jordan-Algebren wie in der folgenden Liste ergeben, dann sind diese s-exzeptionell (im Sinne von [J3]). Dies gilt auch für alle Typen, die man aus den angegebenen erhält, indem man in der zweiten Matrix beliebige Zeilen- bzw. Spaltenvertauschungen vornimmt, und in der ersten und dritten Matrix die entsprechenden Komponentenvertauschungen durchführt, wobei einer Zeilenvertauschung $Z_i \leftrightarrow Z_j$ in der zweiten Matrix die Spaltenvertauschung $S_i \leftrightarrow S_j$ in der dritten Matrix und die Vertauschung der Komponenten $\alpha_{ij} \leftrightarrow \alpha_{ji}$ in der ersten Matrix und einer Spaltenvertauschung $S_i \leftrightarrow S_j$ in der zweiten Matrix die Zeilenvertauschung $Z_i \leftrightarrow Z_j$ in der dritten Matrix und keiner Änderung der ersten Matrix entspricht. $R$ bzw. $*$ bzw. $0$ symbolisiere dabei, daß die Parameter $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ so gewählt werden, daß für die entsprechende Komponente $\mathcal{O}_X(m)$ gilt $m = 0$ bzw. $m > 0$ bzw. $m < 0$.

I) $a = b = 0$.

1) $c = d = 0$.
$J = H_3(\mathrm{Zor}(R))$.

2) $$J = \mathrm{Mat}_3(R) \oplus \begin{pmatrix} R & * & 0 \\ R & * & 0 \\ R & * & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & R \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

3) i) $$J = \mathrm{Mat}_3(R) \oplus \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

ii) $$J = \mathrm{Mat}_3(R) \oplus \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

II) $(a = 0,\ b \neq 0) \ \vee \ (a \neq 0,\ b = 0) \ \vee \ (a = b \neq 0)$.

1) i) $$J = \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}.$$

ii) $$J = \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix}.$$

2) i) $$J = \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii)}\ J = \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & 0 \\ R & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii)}\ J = \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & 0 \\ R & * & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & * \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

$$\text{iv)}\ J = \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & * \\ R & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

$$3)\quad \text{i)}\ J = \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & R \\ 0 & R & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii)}\ J = \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

$$\text{iii)}\ J = A \oplus \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{für} \qquad A = \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & R \\ 0 & R & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ * & R & R \\ * & R & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & * & R \\ 0 & R & 0 \\ R & * & R \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} R & 0 & R \\ * & R & * \\ R & 0 & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R & * \\ R & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R & R & 0 \\ R & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix}.$$

III) $a \neq 0,\ b \neq 0,\ b - a \neq 0.$

$$1)\qquad J = \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}.$$

$$2)\quad \text{i)}\ J = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ * & R & 0 \\ * & * & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii)}\ J = \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & R & * \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Läßt man bei diesen Jordan-Algebren in den Komponenten, die aus den homogenen Polynomen vom Grad $m$ mit $m > 0$ bestehen, nur Elemente der Form $R \cdot T_0^m$

zu, so erhält man offensichtlich Unteralgebren, die sich kanonisch als Unteralgebren von $H_3(\mathrm{Zor}(R))$ auffassen lassen. Die Dimension dieser Algebren beträgt im Fall

| | |
|---|---|
| (I,1) | 27, |
| (I,2), (II,1) | 21, |
| (I,3), (II,2), (III,1) | 18, |
| (II,3), (III,2) | 16. |

Es genügt, die s-Exzeptionalität dieser Jordan-Algebren nachzuweisen. Dies erfolgt mit Hilfe der Glennie-Identität (vgl. [J3])

$$\begin{aligned} G_8 &= \{[U_z, U_x](y), y, x \circ z\} - [U_z, U_x]U_y(x \circ z) \\ &= U_{U_z \circ U_x(y) - U_x \circ U_z(y), U_{x,z}(1)}(y) - U_z \circ U_x \circ U_y \circ U_{x,z}(1) + U_x \circ U_z \circ U_y \circ U_{x,z}(1). \end{aligned}$$

$G_8$ ist in allen speziellen Jordan-Algebren für beliebige $x, y, z$ identisch Null. In den Jordan-Algebren der obigen Liste gibt es aber immer Elemente $x, y, z$ mit $G_8(x, y, z) \neq 0$. Dies wird nun exemplarisch in den Fällen II) 3) i) bzw. III) 2) ii) nachgerechnet.

Da dem durch die Multiplikation in $S$ induzierten Isomorphismus $\det \mathcal{E} \cong \det \mathcal{F}$ auf den globalen Schnitten als Norm $N$ und $\check{N}$ bzw als Adjunkte $\#$ und $\check{\#}$ die gewöhnliche Norm bzw. Adjunkte einer $3 \times 3$-Matrix zugeordnet ist, gilt gemäß Theorem 2.25 für $A_i, B_i, C_i \in \mathrm{Mat}_3(R)$, $i = 0, 1, 2$, wobei $\#$ bzw. $T$ die gewöhnliche Adjunkte bzw. Spur einer $3 \times 3$-Matrix bezeichnet:

$$(A_0, A_1, A_2)^{\widetilde{\#}} = (A_0^{\#} - A_1A_2, A_2^{\#} - A_0A_1, A_1^{\#} - A_2A_0),$$

$$\begin{aligned} &(A_0, A_1, A_2) \times (B_0, B_1, B_2) \\ &= \big(A_0 \times B_0 - A_1B_2 - B_1A_2, A_2 \times B_2 - A_0B_1 - B_0A_1, A_1 \times B_1 - A_2B_0 - B_2A_0\big), \end{aligned}$$

$$\widetilde{T}\big((A_0, A_1, A_2), (B_0, B_1, B_2)\big) = T(A_0B_0) + T(A_1B_2) + T(B_1A_2).$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} &\widetilde{U}_{(A_0,A_1,A_2)}(B_0, B_1, B_2) \\ &\quad = \big(T(A_0B_0) + T(A_1B_2) + T(B_1A_2)\big)(A_0, A_1, A_2) \\ &\qquad + \big((-A_0^{\#} + A_1A_2) \times B_0 + (A_2^{\#} - A_0A_1)B_2 + B_1(A_1^{\#} - A_2A_0), \\ &\qquad\qquad (-A_1^{\#} + A_2A_0) \times B_2 + (A_0^{\#} - A_1A_2)B_1 + B_0(A_2^{\#} - A_0A_1), \\ &\qquad\qquad (-A_2^{\#} + A_0A_1) \times B_1 + (A_1^{\#} - A_2A_0)B_0 + B_2(A_0^{\#} - A_1A_2)\big). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{U}_{(A_0,A_1,A_2),(B_0,B_1,B_2)}(C_0,C_1,C_2)\\
&\quad = [T(A_0C_0)+T(A_1C_2)+T(A_2C_1)](B_0,B_1,B_2)\\
&\qquad +[T(B_0C_0)+T(B_1C_2)+T(B_2C_1)](A_0,A_1,A_2)\\
&\qquad +\Big((-A_0\times B_0+A_1B_2+B_1A_2)\times C_0+(A_2\times B_2-A_0B_1-B_0A_1)C_2\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +C_1(A_1\times B_1-A_2B_0-B_2A_0),\\
&\qquad\quad (-A_1\times B_1+A_2B_0+B_2A_0)\times C_2+(A_0\times B_0-A_1B_2-B_1A_2)C_1\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +C_0(A_2\times B_2-A_0B_1-B_0A_1),\\
&\qquad\quad (-A_2\times B_2+A_0B_1+B_0A_1)\times C_1+(A_1\times B_1-A_2B_0-B_2A_0)C_0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +C_2(A_0\times B_0-A_1B_2-B_1A_2)\Big).
\end{aligned}
$$

Setzt man nun

$$
J_1 = \begin{pmatrix} R & R & R\\ 0 & R & R\\ 0 & R & R\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} R & R & R\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & R & R\\ 0 & R & R\\ 0 & R & R\end{pmatrix}
$$

und

$$
X_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},\ Y_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ Y_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},
$$

$$
Z_0 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ Z_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},
$$

so ist $J_1$ eine Unteralgebra von $H_3(\mathrm{Zor}(R))$ vom Typ II) 3) i) mit

$$
X=(X_0,0,0),\ Y=(Y_0,0,Y_2),\ Z=(Z_0,0,Z_2)\in J_1.
$$

Für $X,Y,Z$ wird nun die Glennie-Identität $G_8$ berechnet.

$$
\widetilde{U}_{X,Z}(\mathbb{1},0,0) = T(X_0)(Z_0,0,Z_2)+T(Z_0)(X_0,0,0)+\Big(-(X_0\times Z_0)\times\mathbb{1},0,-Z_2X_0\Big)
$$

$$
= 2(Z_0,0,Z_2)+(X_0,0,0)+(\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},0,\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix})
$$

$$
= (\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix},0,\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}).
$$

$$
\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1)) = \widetilde{U}_{(Y_0,0,Y_2)}(\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix},0,\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix})
$$

$$= T(Y_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})(Y_0, 0, Y_2) + \Big( - Y_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + Y_2^{\#} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y_2 Y_0 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y_2^{\#}, -Y_2 Y_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0^{\#} \Big)$$

$$= (Y_0, 0, Y_2) + ( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= ( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0).$$

$$\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1))) = \widetilde{U}_{(Z_0,0,Z_2)}( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= T(Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})(Z_0, 0, Z_2) + \Big( - Z_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z_2 Z_0,$$

$$Z_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Z_2^{\#}, -Z_2^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - Z_2 Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

$$= ( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1)))) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= T(X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})(X_0, 0, 0) + (-X_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X_0^{\#})$$

$$= (0, 0, 0).$$

$$\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1))) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= T(X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})(X_0, 0, 0) + (-X_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_0^{\#} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= 3(X_0, 0, 0) + (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0).$$

$$\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1)))) = \widetilde{U}_{(Z_0,0,Z_2)}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= [T(Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z_2)](Z_0, 0, Z_2)$$

$$+\Big( - Z_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z_2 Z_0,$$

$$Z_0^{\#} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_2^{\#}, -Z_2^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - Z_2 Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Big)$$

$$= (Z_0, 0, Z_2) + (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix})$$

$$= (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_Z(Y) = \widetilde{U}_{(Z_0,0,Z_2)}(Y_0, 0, Y_2)$$

$$= T(Z_0 Y_0)(Z_0, 0, Z_2)$$

$$+\Big( - Z_0^{\#} \times Y_0 + Z_2^{\#} Y_2, Z_2 Z_0 \times Y_2 + Y_0 Z_2^{\#}, -Z_2 Z_0 Y_0 + Y_2 Z_0^{\#} \Big)$$

$$= (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Z(Y)) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= T(X_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})(X_0, 0, 0) + (-X_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X_0^{\#})$$

$$= (0, 0, 0).$$

$$\widetilde{U}_X(Y) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(Y_0, 0, Y_2)$$

$$= T(X_0 Y_0)(X_0, 0, 0) + (-X_0^{\#} \times Y_0, 0, Y_2 X_0^{\#})$$

$$= (X_0, 0, 0) + (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0) = (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0, 0).$$

$$\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_X(Y)) = \widetilde{U}_{(Z_0,0,Z_2)}(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, 0, 0)$$

$$= T(Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix})(Z_0, 0, Z_2)$$

$$+(-Z_0^{\#} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} Z_2^{\#}, -Z_2 Z_0 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix})$$

$$= (Z_0, 0, Z_2) + (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}) = (Z_0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_{\widetilde{U}_Z \circ \widetilde{U}_X(Y) - \widetilde{U}_X \circ \widetilde{U}_Z(Y), \widetilde{U}_{X,Z}(1)}(Y)$$

$$= \widetilde{U}_{(Z_0,0,\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}),(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},0,\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})}(Y_0, 0, Y_2)$$

$$= T(Z_0 Y_0)(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) + T(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y_0)(Z_0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix})$$

$$+\Big((-Z_0 \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) \times Y_0 + (\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})Y_2,$$

$$(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}Z_0)\times Y_2+Y_0(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}),$$

$$(-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}Z_0)Y_0+Y_2(Z_0\times\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix})\Big)$$

$$=(Z_0,0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}).$$

$$G_8(X,Y,Z)=(\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix})-(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},0,\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix})$$
$$=(\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},0,0)\neq 0.$$

Dies bedeutet, $J_1$ ist s-exzeptionell.

Setzt man

$$J_2=\begin{pmatrix}R&R&R\\0&R&R\\0&0&R\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}R&R&R\\0&R&R\\0&0&0\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}R&R&R\\0&0&R\\0&0&R\end{pmatrix}$$

und

$$X_0=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ Y_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ Z_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

so ist $J_2$ eine Unteralgebra von $H_3(\mathrm{Zor}(R))$ vom Typ III) 2) ii) mit

$$X=(X_0,0,0),\ Y=(0,Y_1,0),\ Z=(0,0,Z_2)\in J_2.$$

Für $X,Y,Z$ wird nun die Glennie-Identität $G_8$ berechnet.

$$\widetilde{U}_{X,Z}(1)=\widetilde{U}_{(X_0,0,0),(0,0,Z_2)}(\mathbb{1},0,0)=T(X_0)(0,0,Z_2)+(0,0,-Z_2X_0)$$
$$=2(0,0,Z_2)+(0,0,\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})=(0,0,\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1))=\widetilde{U}_{(0,Y_1,0)}(0,0,\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix})$$

$$= T(Y_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})(0, Y_1, 0) + (0, -Y_1^{\#} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= (0, Y_1, 0) + (0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0) = (0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0).$$

$$\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1))) = \widetilde{U}_{(0,0,Z_2)}(0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0)$$

$$= T(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Z_2)(0, 0, Z_2) + (0, 0, -Z_2^{\#} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= (0, 0, Z_2) + (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}) = (0, 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1)))) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(0, 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})$$

$$= (0, 0, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_0^{\#}) = (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1))) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(0, 0, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})$$

$$= (0, 0, \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X_0^{\#}) = (0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}).$$

$$\widetilde{U}_Z(\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Y(\widetilde{U}_{X,Z}(1)))) = \widetilde{U}_{(0,0,Z_2)}(0, 0, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})$$

$$= (Z_2^{\#} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_Z(Y) &= \widetilde{U}_{(0,0,Z_2)}(0,Y_1,0)\\
&= T(Y_1Z_2)(0,0,Z_2) + (0,0,-Z_2^{\#} \times Y_1)\\
&= (0,0,Z_2) + (0,0,\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}) = (0,0,\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{U}_X(\widetilde{U}_Z(Y)) &= \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(0,0,\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix})\\
&= (0,0,\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X_0^{\#}) = (0,0,0).
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{U}_X(Y) = \widetilde{U}_{(X_0,0,0)}(0,Y_1,0) = (0,X_0^{\#}Y_1,0) = (0,0,0).
$$

$$
G_8(X,Y,Z) = (0,0,\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) \neq 0.
$$

Dies bedeutet, $J_2$ ist s-exzeptionell. Analog gibt es für alle anderen Typen der obigen Liste Elemente $X,Y,Z$ mit $G_8(X,Y,Z) \neq 0$. Solche Elemente wurden jeweils explizit mit Hilfe eines Computers unter Verwendung eines Programmes, das in „Mathematica“ erstellt wurde, ermittelt. Für Algebren vom Typ I) 3) ii) wurden bereits in [R] entsprechende Elemente angegeben. Für die Fälle, in denen man durch die Wahl der Parameter Algebren erhält, die nicht in obiger Liste enthalten sind, ergab sich, daß die Glennie-Identität $G_8$ für Elemente $X,Y,Z$, deren Einträge in den Komponenten als Zufallszahlen gewählt wurden, jeweils identisch Null war. Dies deutet darauf hin, daß diese Algebren nicht s-exzeptionell sind. □

Ist X ein $R$-Schema mit Strukturmorphismus $\sigma : X \to \operatorname{Spec} R$, dann heißt eine Albert- bzw. Azumaya-Algebra $\mathcal{J}$ über X definiert über $R$, falls es eine Albert- bzw. Azumaya-Algebra $J$ über $R$ gibt, so daß $\mathcal{J} \cong \sigma^* J$ gilt.

### 4.6 Bemerkung

Sei $k$ ein Körper mit Charakteristik Null. Der Strukturmorphismus $\sigma : X = \mathbb{P}_k^1 \to \operatorname{Spec} k$ induziert vermöge $[D] \longmapsto [\sigma^* D]$ einen Isomorphismus $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(\mathbb{P}_k^1)$ (vgl. [K2]), wobei $\mathrm{Br}(k)$ bzw. $\mathrm{Br}(\mathbb{P}_k^1)$ die Brauergruppe von $k$ bzw. $\mathbb{P}_k^1$ bezeichne. Folglich hat jede Azumaya-Algebra über $\mathbb{P}_k^1$ die Form $\mathcal{E}nd_{\sigma^* D}(\mathcal{P})$ mit einer zentral-einfachen Divisionsalgebra $D$ über $k$ und einem lokal freien $\sigma^* D$-Rechtsmodul $\mathcal{P}$. Nach [K1],VII,(3.1.1) besitzt jeder lokal freie $\sigma^* D$-Rechtsmodul

$\mathcal{P}$ die Form
$$\mathcal{P} \cong \sigma^* D(m_1) \oplus \ldots \oplus \sigma^* D(m_t)$$
mit $t \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, t$. Ist nun $\mathcal{A}$ eine Azumaya-Algebra über $\mathbb{P}^1_k$ vom konstanten Rang 9, dann gilt folglich

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{E}nd_X(\mathcal{O}_X(m_1) \oplus \mathcal{O}_X(m_2) \oplus \mathcal{O}_X(m_3)) \quad \text{mit } m_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, 3$$

oder

$\mathcal{A} \cong \mathcal{E}nd_{\sigma^* D}(\sigma^* D(m)) \cong \sigma^* D$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und einer zentral-einfachen Divisionsalgebra vom Grad 3 über $k$ (d.h. $\mathcal{A}$ ist definiert über $k$).

$\square$

### 4.7 Satz

Sei $k$ ein Körper mit Charakteristik Null und $\mathcal{J}$ eine Albert-Algebra über $\mathbb{P}^1_k$ mit $\mathcal{A}^+ \subset \mathcal{J}$, wobei $\mathcal{A}$ eine Azumaya-Algebra vom konstanten Rang 9 sei. Dann ist $\mathcal{J}$ über $k$ definiert, oder es gilt $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$ mit $\mathcal{A}, \mathcal{P}, N$ wie in Beispiel 4.5.

BEWEIS:
Nach 1.17 gilt $\mathcal{J} = \mathcal{J}(N_{\mathcal{J}}, \#_{\mathcal{J}}, 1)$, und nach 3.9 folgt $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathcal{A}, \mathcal{P}, N)$, wobei $\mathcal{A}$ eine der beiden in 4.6 angegebenen Formen besitzt. Folglich ist nur zu zeigen, daß $\mathcal{J}$ definiert über $k$ ist, falls gilt $\mathcal{A} \cong \sigma^* D$ mit einer zentral-einfachen Divisionsalgebra vom Grad 3 über $k$. In diesem Fall ist

$$\mathcal{P} \cong \sigma^* D(m) \cong \sigma^* D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m) \quad \text{mit } \in \mathbb{Z}.$$

$N_{\sigma^* D}$ bezeichne die Norm von $\sigma^* D$. Wegen

$$\mathcal{O}_X \cong N_{\sigma^* D}(\mathcal{P}) \cong N_{\sigma^* D}(\sigma^* D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)) \cong \mathcal{O}_X(3m)$$

folgt hieraus $m = 0$, also $\mathcal{P} \cong \sigma^* D$, und es gibt ein $\mu \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_X^\times) = k^\times$ mit $N = \mu N_{\sigma^* D}$. Dies bedeutet $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\sigma^* D, \sigma^* D, \mu N_{\sigma^* D}) = \sigma^* \mathcal{J}(D, \mu)$, d.h. $\mathcal{J}$ ist definiert über $k$. $\square$

# A Polynomabbildungen über geringten Räumen

Von zentraler Bedeutung in dieser Arbeit sind quadratische und kubische Abbildungen zwischen Moduln über geringten Räumen. Diese sind spezielle Polynomabbildungen. In diesem Anhang werden daher Polynomabbildungen und deren Eigenschaften kurz erläutert. Die Vorgehensweise ist analog der von Roby in [Ro] bzw. Loos in [L1] bei der Behandlung von Polynomabbildungen zwischen Moduln über Ringen. Zur expliziten Bezeichnung der Restriktionsmorphismen einer (Prä-) Garbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum $X$ wird das Symbol $\mathrm{res}^{\mathcal{F}}_{UV}$ für offene Teilmengen $V \subset U$ von $X$ verwendet. Zur Vereinfachung der Notation wird bei einem Morphismus von Garben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ statt $f(U)(x)$ für $x \in \mathcal{F}(U)$ oft einfach $f(x)$ gesetzt, und $x \in \mathcal{F}$ bedeutet, es gibt eine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $x \in \mathcal{F}(U)$.

Im folgenden bezeichnen $X$ einen geringten Raum, $\mathcal{O}_X$ die zugehörige Strukturgarbe und $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln. $\mathcal{O}_X$-Algebren werden immer als kommutativ, assoziativ und unitär vorausgesetzt. Um die Definition einer Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ formulieren zu können, werden zunächst folgende Bezeichnungen festgelegt.

## A.1 Bezeichnungen

a) $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ bezeichne die Kategorie der (kommutativen, assoziativen, unitären) $\mathcal{O}_X$-Algebren.

b) $\mathcal{MG}_X$ bezeichne die Kategorie der Garben von Mengen auf $X$. Ein Objekt in $\mathcal{MG}_X$ ist also eine Garbe von Mengen auf $X$, und ein Morphismus in $\mathcal{MG}_X$ ist ein Homomorphismus von Garben von Mengen auf $X$.

c) $F_{\mathcal{M}} : \mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X} \to \mathcal{MG}_X$ sei der durch $\mathcal{M}$ induzierte „Vergiß“-Funktor, d. h. einer $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ wird die Garbe $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$, und einem $\mathcal{O}_X$-Algebrahomomorphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ wird der Morphismus $\mathbb{1}_{\mathcal{M}} \otimes \varphi : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}'$ zugeordnet, also $F_{\mathcal{M}}(\mathcal{A}) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$, $F_{\mathcal{M}}(\varphi) = \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \otimes \varphi$. $\square$

## A.2 Definition

Eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ ist eine natürliche Transformation $f : F_{\mathcal{M}} \to F_{\mathcal{N}}$. Dies bedeutet, daß jeder $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ ein Morphismus $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ in $\mathcal{MG}_X$ zugeordnet wird, wobei für jeden Morphismus $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ in $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ folgendes Diagramm von Morphismen von Garben von Mengen kommutiert:

$$
(+) \qquad \begin{array}{ccc}
\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} & \xrightarrow{f_{\mathcal{A}}} & \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{1}_{\mathcal{M}} \otimes \varphi} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{1}_{\mathcal{N}} \otimes \varphi} \\
\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}' & \xrightarrow{f_{\mathcal{A}'}} & \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}'.
\end{array} \qquad \square
$$

## A.3 Bemerkung und Bezeichnung

Sei $f$ eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.

a) Sei $P \in X$ und $A_P$ eine $\mathcal{O}_P$-Algebra. Bezeichnet $\widetilde{A}_P$ die zu $A_P$ gehörige Wolkenkratzergarbe, so ist $\widetilde{A}_P$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra. Nach Definition von $f$ gibt es einen Morphismus von Garben von Mengen auf $X$

$$f_{\widetilde{A}_P} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{A}_P \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{A}_P,$$

der unter Berücksichtigung der kanonischen Identifikationen

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{A}_P)_P = \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} (\widetilde{A}_P)_P = \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} A_P,$$
$$(\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{A}_P)_P = \mathcal{N}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} A_P,$$

eine Abbildung

$$(f_P)_{A_P} := (f_{\widetilde{A}_P})_P : \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} A_P \to \mathcal{N}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} A_P.$$

liefert. Ist $\varphi : A_P \to B_P$ ein $\mathcal{O}_P$-Algebrahomomorphismus, so folgt aus der Kommutativität des entsprechenden Diagramms für die Abbildungen $f_{\widetilde{A}_P}$ und $f_{\widetilde{B}_P}$ sofort, daß das folgende Diagramm von Abbildungen kommutiert:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}_P \otimes A_P & \xrightarrow{(f_P)_{A_P}} & \mathcal{N}_P \otimes A_P \\
\Big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{1} \otimes \varphi} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \mathbb{1} \otimes \varphi} \\
\mathcal{M}_P \otimes B_P & \xrightarrow{(f_P)_{B_P}} & \mathcal{N}_P \otimes B_P.
\end{array}
$$

Gemäß Definition ([Ro], I.2 bzw. [L1], 18.1) induziert $f$ also für jedes $P \in X$ eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}_P$ nach $\mathcal{N}_P$, die mit $f_P$ bezeichnet wird. Für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ gilt insbesondere $(f_{\mathcal{A}})_P = (f_P)_{\mathcal{A}_P}$ für $P \in X$.

b) Zur Vereinfachung der Notation wird $f$ auch als $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ geschrieben. Dabei ist zu beachten, daß $f$ zwar einen Homomorphismus von Garben von Mengen auf $X$ von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ induziert, daß $f$ aber i. allg. durch diesen Homomorphismus nicht eindeutig bestimmt ist. Desweiteren wird statt $f_A$ meist einfach $f$ verwendet. Die entsprechenden Vereinbarungen sollen auch für Polynomabbildungen zwischen Moduln über Ringen (insbesondere also für $f_P,\ P \in X$) gelten.
c) Ist $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Polynomabbildung, dann gibt es zu jeder $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ vermöge der kanonischen Isomorphie $\mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N} \otimes \mathcal{A} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{N}$ eine Abbildung ${}_{\mathcal{A}}f : \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{N}$. □

## A.4 Beispiele

a) Jeder globale Schnitt $s \in H^0(X, \mathcal{N})$ induziert offensichtlich eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, indem man für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ und jede offene Teilmenge $U$ von $X$ $f_{\mathcal{A}}(U) : (\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})(U) \to (\mathcal{N} \otimes \mathcal{A})(U)$ als die konstante Abbildung mit Funktionswert $s|_U \otimes 1$ definiert. Polynomabbildungen dieser Art heißen konstante Polynomabbildungen.

b) Sei $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ für $i = 1, \ldots, q$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul und $f : \mathcal{M} := \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i \to \mathcal{N}$ ein $\mathcal{O}_X$-$q$-linearer Morphismus, d. h. für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ ist $f(U) : \mathcal{M}(U) = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i(U) \to \mathcal{N}(U)$ eine $\mathcal{O}(U)$-$q$-lineare Abbildung.
Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra, dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \times \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{M}_q \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \\ (x_1, a_1, \ldots, x_q, a_q) &\longmapsto f(x_1, \ldots, x_q) \otimes a_1 \cdot \ldots \cdot a_q \end{aligned}$$

ein $\mathcal{O}_X$-$2q$-linearer Morphismus und induziert daher einen $\mathcal{A}$-Modulhomomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\mathcal{A}} : \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_q \otimes \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{A} \\ (x_1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes x_q \otimes a_q) &\longmapsto f(x_1, \ldots, x_q) \otimes a_1 \cdot \ldots \cdot a_q. \end{aligned}$$

Verknüpft man $\tilde{f}_{\mathcal{A}}$ mit der $\mathcal{A}$-$q$-linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{A} \times \ldots \times \mathcal{M}_q \otimes \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{A} \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_q \otimes \mathcal{A} \\ (x_1 \otimes a_1, \ldots, x_q \otimes a_q) &\longmapsto (x_1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes x_q \otimes a_q), \end{aligned}$$

so erhält man folglich eine $\mathcal{A}$-$q$-lineare Abbildung

$$f_{\mathcal{A}} : \bigoplus_{i=1}^{q} (\mathcal{M}_i \otimes \mathcal{A}) \cong (\bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i) \otimes \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{A}.$$

Offensichtlich wird dadurch eine natürliche Transformation von $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ nach $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ definiert, wobei $f_{\mathcal{A}}$ $\mathcal{A}$-$q$-linear für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ ist. Polynomabbildungen, die diese Eigenschaft erfüllen, heißen multilineare (für $q = 1$ lineare) Polynomabbildungen. $\square$

Im folgenden bezeichne $R$ einen (kommutativen, assoziativen, unitären) Ring, und $M, N$ seien unitäre $R$-(Links-)Moduln.

## A.5 Bemerkung und Bezeichnung

a) $\mathrm{Pol}_R(M, N)$ bzw. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichne die Menge aller Polynomabbildungen von $M$ nach $N$ bzw. von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. Insbesondere wird $\mathrm{Pol}_R(M) := \mathrm{Pol}_R(M, R)$ bzw. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}) := \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ gesetzt.

b) Seien $f, g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $r \in H^0(X, \mathcal{O}_X)$. Setzt man für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (f+g)_{\mathcal{A}} &:= f_{\mathcal{A}} + g_{\mathcal{A}}, \\ (rf)_{\mathcal{A}} &:= rf_{\mathcal{A}}, \\ (fg)_{\mathcal{A}} &:= f_{\mathcal{A}} g_{\mathcal{A}}, \quad (\text{falls } f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})), \end{aligned}$$

so erhält man, wie man leicht nachrechnet, Polynomabbildungen $f+g,\ rf,\ fg \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, die als Summe, Skalarprodukt bzw. Produkt bezeichnet werden. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bzw. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})$ wird dadurch zu einem unitären $H^0(X, \mathcal{O}_X)$-Modul bzw. zu einer unitären $H^0(X, \mathcal{O}_X)$-Algebra.

c) Ist $\mathcal{P}$ ein weiterer $\mathcal{O}_X$-Modul, so erhält man analog für Polynomabbildungen $g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ und $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ die Komposition $g \circ f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{P})$, indem man für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ definiert: $(g \circ f)_{\mathcal{A}} := g_{\mathcal{A}} \circ f_{\mathcal{A}}$.
Die $\mathcal{O}_X$-Moduln zusammen mit den Polynomabbildungen bilden eine Kategorie, die mit $\mathcal{O}_X$-$\mathcal{M}od$-$\mathcal{P}ol$ bezeichnet wird.

d) Sei $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $U$ eine offene Teilmenge von $X$ und $\mathcal{A}_U$ eine $\mathcal{O}_U$-Algebra. Bezeichnet $i_U : U \to X$ die kanonische Einbettung, so ist $(i_U)_* \mathcal{A}_U$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra. Folglich gibt es einen Morphismus

$$f_{(i_U)_*\mathcal{A}_U} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_U)_* \mathcal{A}_U \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_U)_* \mathcal{A}_U$$

von Garben von Mengen auf $X$, der durch Restriktion einen Morphismus

$$(f|_U)_{\mathcal{A}_U} : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_U)_* \mathcal{A}_U)|_U \cong \mathcal{M}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}_U \longrightarrow (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_U)_* \mathcal{A}_U)|_U \cong \mathcal{N}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}_U$$

von Garben von Mengen auf $U$ liefert. Ist weiter $\varphi : \mathcal{A}_U \to \mathcal{A}'_U$ ein $\mathcal{O}_U$-Algebrahomomorphismus, so kommutiert nach Konstruktion das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}_U \arrow[r, "(f|_U)_{\mathcal{A}_U}"] \arrow[d, "\mathbb{1} \otimes \varphi"'] & \mathcal{N}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}_U \arrow[d, "\mathbb{1} \otimes \varphi"] \\
\mathcal{M}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}'_U \arrow[r, "(f|_U)_{\mathcal{A}'_U}"] & \mathcal{N}|_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{A}'_U.
\end{tikzcd}$$

Man erhält also eine Restriktionsabbildung von $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ nach $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U,\mathcal{N}|_U)$, die insbesondere ein $H^0(X,\mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus ist. Die Zuordnung $U \mapsto \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{M}|_U,\mathcal{N}|_U)$ zusammen mit diesen Restriktionen definiert daher eine Prägarbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln. Aus dem nachfolgenden Lemma A.6 folgt, daß diese Prägarbe eine Garbe ist. Sie wird mit $\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ bezeichnet und heißt der $\mathcal{O}_X$-Modul der Polynomabbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$.

e) Gemäß Bemerkung A.3 a) gibt es für jedes $P \in X$ einen kanonischen Homomorphismus $u_P : (\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}))_P \to \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{M}_P,\mathcal{N}_P)$.

f) Ist $q \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{N}_i$ für $i = 1,\ldots,q$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul, so besteht bzgl. des durch die Projektionen kanonisch induzierten $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus folgende Isomorphie:

$$\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\bigoplus_{i=1}^{q}\mathcal{N}_i) \cong \bigoplus_{i=1}^{q}\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}_i). \qquad \square$$

### A.6 Lemma

Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X$. Für $i \in I$ sei $f_i : \mathcal{M}|_{U_i} \to \mathcal{N}|_{U_i}$ eine Polynomabbildung über $\mathcal{O}_{U_i}$, und es gelte $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Polynomabbildung $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ über $\mathcal{O}_X$, so daß $f|_{U_i} = f_i$ für $i \in I$ gilt.

Beweis:
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra. Dann ist $\mathcal{A}|_{U_i}$, $i \in I$, eine $\mathcal{O}_{U_i}$-Algebra. Folglich gibt es für $i \in I$ einen Morphismus von Garben von Mengen

$$(f_i)_{\mathcal{A}|_{U_i}} : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A})|_{U_i} \cong \mathcal{M}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{A}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{N}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{A}|_{U_i} \cong (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A})|_{U_i}.$$

Wegen $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ kann man die Morphismen $(f_i)_{\mathcal{A}|_{U_i}}$ verkleben, d. h. es gibt einen Morphismus von Garben von Mengen $f_{\mathcal{A}} : \mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{N} \otimes \mathcal{A}$ mit $f_{\mathcal{A}}|_{U_i} = (f_i)_{\mathcal{A}|_{U_i}}$. Ist $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $\mathcal{O}_X$-Algebrahomomorphismus, dann ist das Diagramm (+) in Definition A.2 kommutativ, da das entsprechende Diagramm für die Abbildungen $(f_i)_{\mathcal{A}|_{U_i}}$, $(f_i)_{\mathcal{B}|_{U_i}}$, $i \in I$ kommutativ ist. Damit ist die Existenz gezeigt. Mit A.3 a) gilt $(f_{\mathcal{A}})_P = (f_P)_{\mathcal{A}_P} = ((f_i)_P)_{\mathcal{A}_P}$ für $P \in U_i$, woraus die Eindeutigkeit von $f$ folgt. $\square$

### A.7 Bemerkung und Bezeichnung

a) Sei $I$ eine nichtleere Menge und $\mathcal{M}_i$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul für $i \in I$. $\prod\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ bzw. $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ bezeichne das direkte Produkt bzw. die direkte Summe der $\mathcal{O}_X$-Moduln $\mathcal{M}_i$. Für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ gilt:

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i(U) \hookrightarrow (\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i)(U) \hookrightarrow (\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i)(U) = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i(U).$$

Für $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i(U)$ besteht die Äquivalenz

$$(x_i)_{i\in I} \in (\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i)(U) \iff ((x_i)_P)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} (\mathcal{M}_i)_P \quad \text{für alle } P \in U.$$

$\pi_i : \prod\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_i$, $i \in I$, bezeichne die kanonische Projektion auf die $i$-te Komponente. Gilt speziell $\mathcal{M}_i = \mathcal{M}$ für alle $i \in I$, so wird $\mathcal{M}^{(I)} := \bigoplus\limits_{i\in I} \mathcal{M}_i$ gesetzt. $\Sigma : \mathcal{M}^{(I)} \to \mathcal{M}$ sei dann der durch die kanonischen Abbildungen

$$\begin{aligned} \Sigma_U : \mathcal{M}(U)^{(I)} &\longrightarrow \mathcal{M}(U) \\ (x_i)_{i\in I} &\longmapsto \sum_{i\in I} x_i, \end{aligned}$$

$U \subset X$ offen, induzierte $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus.

b) Sei $q \in \mathbb{N}$. $\mathcal{O}_X[T_1, \ldots, T_q]$ bzw. $\mathcal{O}_X[\![T_1, \ldots, T_q]\!]$ bezeichne die Polynomalgebra bzw. die Algebra der formalen Potenzreihen über $\mathcal{O}_X$ in den Unbestimmten $T_1, \ldots, T_q$. Zur Vereinfachung der Notation wird im folgenden häufig von der Schreibweise der Multi-Indizes Gebrauch gemacht, d. h. es wird

$$\begin{aligned} T &= (T_1, \ldots, T_q),\ k = (k_1, \ldots, k_q) \in (\mathbb{N}^0)^q, \\ T^k &= T_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot T_q^{k_q},\ |k| = \sum_{j=1}^{q} k_j \end{aligned}$$

gesetzt. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X[T] &= \bigoplus_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} \mathcal{O}_X T^k = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}^0} \mathcal{O}_X[T]_d \\ \mathcal{O}_X[\![T]\!] &= \prod_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} \mathcal{O}_X T^k = \prod_{d\in\mathbb{N}^0} \mathcal{O}_X[T]_d \end{aligned}$$

mit $\mathcal{O}_X[T]_d = \bigoplus\limits_{\substack{k\in(\mathbb{N}^0)^q \\ |k|=d}} \mathcal{O}_X T^k$.

Gemäß a) ist dann für jede offene Teilmenge $U$ von $X$

$$\mathcal{O}_X[T](U) \subset \mathcal{O}_X[\![T]\!](U) = \mathcal{O}_X(U)[\![T]\!],$$

d. h. jedes Element von $\mathcal{O}_X[T](U)$ ist eine formale Potenzreihe mit Koeffizienten in $\mathcal{O}_X(U)$, und es gilt für $a = \sum\limits_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} r_k T^k \in \mathcal{O}_X(U)[\![T]\!]$:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{O}_X[T](U) &\iff a_P \in \mathcal{O}_P[T] \text{ für alle } P \in U \\ &\iff \text{für } P \in X \text{ ist } (r_k)_P = 0 \text{ für fast alle } k \in (\mathbb{N}^0)^q. \end{aligned}$$

Wegen $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X[T])(U) \subset \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{O}_X[\![T]\!](U)$, $U \subset X$ offen, folgt hieraus, daß auch jedes Element aus $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X[T])(U)$ eine Darstellung als formale Potenzreihe besitzt, d. h. für $v \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_X[T])(U)$ gibt es zu jedem $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ ein eindeutig bestimmtes $y_k \in \mathcal{M}(U)$, so daß für $P \in X$ $(y_k)_P = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ und

$$v = \sum_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} y_k \otimes T^k$$

gilt.

Folgende kanonische $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismen werden benötigt:

- die Projektion auf den $k$-ten Faktor, $k \in (\mathbb{N}^0)^q$:

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathcal{O}_X[\![T]\!] &\longrightarrow \mathcal{O}_X \\ \sum_{l\in(\mathbb{N}^0)^q} r_l T^l &\longmapsto r_k, \end{aligned}$$

- die $i$-te Einbettung für $i = 1, \ldots, q$:

$$\begin{aligned} \iota_i : \mathcal{O}_X &\longrightarrow \mathcal{O}_X[T] \\ r &\longmapsto rT_i, \end{aligned}$$

- der Einsetzungshomomorphismus zu $a_1, \ldots, a_q \in H^0(X, \mathcal{A})$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X[T] &\longrightarrow \mathcal{A} \\ T_i &\longmapsto a_i, \quad 1 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

(Der Einsetzungshomomorphismus ist als Verknüpfung der Homomorphismen $\bigoplus\limits_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} \mathcal{O}_X T^k \xrightarrow{T_i \mapsto a_i} \bigoplus\limits_{k(\in\mathbb{N}^0)^q} \mathcal{O}_X a^k \xrightarrow{\text{kan}} \mathcal{A}^{((\mathbb{N}^0)^q)} \xrightarrow{\sum} \mathcal{A}$ wohldefiniert.) $\square$

**A.8 Lemma**

a) Seien $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, $q \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_q \in H^0(X, \mathcal{M})$. Dann gibt es zu jedem $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ ein eindeutig bestimmtes $y_k \in H^0(X, \mathcal{N})$, so daß gilt:

i) Für $P \in X$ ist $(y_k)_P = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$.

ii) Sind $U \subset X$ offen, $\mathcal{A}_U$ eine $\mathcal{O}_U$-Algebra und $a_1, \ldots, a_q \in H^0(U, \mathcal{A}_U)$, dann ist

$$(f|_U)_{\mathcal{A}_U}(x_1|_U \otimes a_1 + \ldots + x_q|_U \otimes a_q) = \sum_{k \in (\mathbb{N}^0)^q} y_k|_U \otimes a^k.$$

b) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{O}_X^n) \cong (H^0(X, \mathcal{O}_X[T_1, \ldots, T_m]^n) \quad (\text{als } H^0(X, \mathcal{O}_X)\text{-Moduln}), \\ &\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{O}_X^n) \cong \mathcal{O}_X[T_1, \ldots, T_m]^n \quad (\text{als } \mathcal{O}_X\text{-Moduln}). \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>
Gemäß A.7 b) gibt es zu jedem $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ ein eindeutig bestimmtes Element $y_k \in H^0(X, \mathcal{N})$, so daß für $P \in X$ $(y_k)_P = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ und

$$(f_{\mathcal{O}_X[T]}(x_1 \otimes T_1 + \ldots + x_q \otimes T_q) = \sum_{k \in (\mathbb{N}^0)^q} y_k \otimes T^k$$

gilt. Nach Definition der Restriktionen folgt für $U \subset X$ offen:

$$(f|_U)_{\mathcal{O}_U[T]}(x_1|_U \otimes T_1 + \ldots + x_q|_U \otimes T_q) = \sum_{k \in (\mathbb{N}^0)^q} y_k|_U \otimes T^k.$$

Der Einsetzungshomomorphismus $T_i \mapsto a_i$ liefert dann die Behauptung.

b) $e_1, \ldots, e_m$ bzw. $e'_1, \ldots, e'_n$ bezeichne die kanonische Basis von $H^0(X, \mathcal{O}_X^m)$ bzw $H^0(X, \mathcal{O}_X^n)$. Ist $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{O}_X^n)$, dann gibt es eindeutig bestimmte $g_j \in H^0(X, \mathcal{O}_X[T_1, \ldots, T_m])$, $j = 1, \ldots, n$, so daß gilt $(T = (T_1, \ldots, T_m))$:

$$f_{\mathcal{O}_X[T]}(e_1 \otimes T_1 + \ldots + e_m \otimes T_m) = \sum_{j=1}^{n} e'_j \otimes g_j.$$

Andererseits ist klar, daß man zu vorgegebenen $g_j \in H^0(X, \mathcal{O}_X[T_1, \ldots, T_m])$, $j = 1, \ldots, n$ eine Polynomabbildung $f_{g_1, \ldots, g_n}$ erhält, indem man für $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, m$, (wobei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra sei) setzt

$$(f_{g_1, \ldots, g_n})_{\mathcal{A}}(\sum_{i=1}^{m} e_i \otimes a_i) = \sum_{j=1}^{n} e'_j \otimes g_j(a_1, \ldots, a_m).$$

Offensichtlich sind die beiden Konstruktionen invers zueinander. $\square$

## A.9 Definition

Sei $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul für $i = 1, \ldots, q$, $\mathcal{M} := \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i$, $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $k = (k_1, \ldots, k_q) \in (\mathbb{N}^0)^q$.

a) Für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ sei $(f_k)_{\mathcal{A}}$ die Komposition folgender Homomorphismen von Garben von Mengen:

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{M} \otimes \mathcal{A} \\
\wr\!\| \; \mathrm{kan} \\
\bigoplus_{i=1}^{q} (\mathcal{M}_i \otimes \mathcal{A}) \\
\Big\downarrow \; \bigoplus_{i=1}^{q} \mathbb{1} \otimes \iota_i \\
\bigoplus_{i=1}^{q} (\mathcal{M}_i \otimes \mathcal{A}[T]) \\
\wr\!\| \; \mathrm{kan} \\
\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}[T] \\
\Big\downarrow \; f_{\mathcal{A}[T]} \\
\mathcal{N} \otimes \mathcal{A}[T] \\
\Big\downarrow \; \mathbb{1}_{\mathcal{N}} \otimes \pi_k \\
\mathcal{N} \otimes \mathcal{A}
\end{array}
$$

Aus der Konstruktion der Abbildungen $(f_k)_{\mathcal{A}}$ sieht man, daß für Morphismen in $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ das Diagramm (+) in Definition A.2 kommutiert. Das heißt, man erhält eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, die mit $f_k$ bezeichnet wird und die multihomogene Komponente vom Multigrad $k_1, \ldots, k_q$ (bzw. homogene Komponente vom Grad $k$ für $q = 1$) von $f$ heißt.

b) $f$ heißt multihomogen vom Multigrad $k_1, \ldots, k_q$ (bzw. homogen vom Grad $k$ für $q = 1$), falls $f = f_k$ gilt. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}^{k_1,\ldots,k_q}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichne die Menge der multihomogenen Polynomabbildungen vom Multigrad $k_1, \ldots, k_q$ von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}^{k_1,\ldots,k_q}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ ist ein $H^0(X, \mathcal{O}_X)$-Untermodul von $\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Analog wie in A.5 d) sieht man, daß man durch die Zuordnung $U \mapsto \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_U}^{k_1,\ldots,k_q}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{N}|_U)$ eine Garbe von $\mathcal{O}_X$-Moduln erhält, die mit $\mathcal{P}ol_{\mathcal{O}_X}^{k_1,\ldots,k_q}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ bezeichnet wird. $\square$

Es ist zu beachten, daß die Definition der multihomogenen Komponenten von der vorgebenen Darstellung $\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i$ abhängt.

## A.10 Bemerkung

Unter den Vorgaben von Definition A.9 folgt (wegen A.3 a)) für $P \in X$:

$$(f_k)_P = (f_P)_k.$$

Dies bedeutet, $f$ ist multihomogen vom Grad $k_1, \ldots, k_q$ genau dann, wenn $f_P$ für alle $P \in X$ multihomogen vom Grad $k_1, \ldots, k_q$ ist. $\square$

## A.11 Lemma

Sei $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul für $i = 1, \ldots, q$, $\mathcal{M} := \bigoplus_{i=1}^{q} \mathcal{M}_i$ und $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

a) Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra, $U \subset X$ offen und $z \in (\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})(U)$, dann gilt:

$$f_{\mathcal{A}}(U)(z) = \sum_{k \in (\mathbb{N}^0)^q} (f_k)_{\mathcal{A}}(U)(z),$$

insbesondere ist also für $P \in U$ $((f_k)_{\mathcal{A}}(U)(z))_P = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$.

b) $f$ ist genau dann multihomogen vom Multigrad $k_1, \ldots, k_q$, falls für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$, $z_i \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ und $a_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, q$, gilt:

$$f_{\mathcal{A}}(a_1 z_1, \ldots, a_q z_q) = f_{\mathcal{A}}(z_1, \ldots, z_q) \otimes a^k.$$

c)
$$\mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \bigoplus_{|k|=n} \mathrm{Pol}^{k_1, \ldots, k_q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}),$$
$$\mathcal{P}ol^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \bigoplus_{|k|=n} \mathcal{P}ol^{k_1, \ldots, k_q}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

d) Seien $t \in \mathbb{N}$, $\mathcal{N}_j$ für $j = 1, \ldots, t$, $\mathcal{P}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln und $\mathcal{N} := \bigoplus_{i=1}^{t} \mathcal{N}_j$. Die Polynomabbildungen $f_j := \pi_j \circ f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}_j)$ seien multihomogen vom Grad $(k_{j1}, \ldots, k_{jq})$, $j = 1, \ldots, t$, und $g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{P})$ multihomogen vom Grad $(l_1, \ldots, l_t)$. Dann ist $g \circ f$ multihomogen vom Grad $(n_1, \ldots, n_q)$ mit $n_i := \sum_{j=1}^{t} k_{ji} l_j$ für $i = 1, \ldots, q$.

<u>Beweis:</u>
Die Aussagen folgen gemäß Bemerkung A.10 aus der Tatsache, daß sie nach [Ro] in jedem Halm Gültigkeit besitzen. $\square$

## A.12 Bemerkung

Im allgemeinen ist

$$\prod_{n \in \mathbb{N}^0} \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \ncong \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \ncong \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^0} \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}).$$

BEWEIS:
Nach [Ro] ist im allgemeinen $\prod_{n\in\mathbb{N}^0} \mathrm{Pol}_R(M,N) \not\cong \mathrm{Pol}_R(M,N) \not\cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^0} \mathrm{Pol}_R(M,N)$. $\square$

## A.13 Beispiel

Sei $f$ eine multilineare Polynomabbildung von $\bigoplus_{1=1}^{q} \mathcal{M}_i$ nach $\mathcal{N}$. Dann gilt gemäß A.4 b):

$$f_{\mathcal{A}[T]}(z_1 \otimes T_1, \ldots, z_q \otimes T_q) = f_{\mathcal{A}}(z_1, \ldots, z_q) \otimes T_1 \cdot \ldots \cdot T_q,$$

falls $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra und $z_i \in \mathcal{M}_i \otimes \mathcal{A},\ i = 1, \ldots, q$, ist. Gemäß A.11 b) ist $f$ somit multihomogen vom Multigrad $(1, \ldots, 1)$. $\square$

## A.14 Definition

Sei $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $q \in \mathbb{N}$. Die Polynomabbildung

$$\Pi_q f : \mathcal{M}^q \longrightarrow \mathcal{N}, \quad \Pi_q f := f \circ \sum_{i=1}^{q} \pi_i,$$

heißt Polarisierung von $f$ der Ordnung $q$. Für $z_1, \ldots, z_q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra) gilt also $\Pi_q f(z_1, \ldots, z_q) = f(z_1 + \ldots + z_q)$. $\square$

## A.15 Bemerkung

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Dann ist $\Pi_q f \in \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}^q, \mathcal{N})$ für jedes $q \in \mathbb{N}$. Gemäß Lemma A.11 c) gilt folglich:

$$(\Pi_q f)_{\mathcal{A}}(z_1 \ldots, z_q) = \sum_{\substack{k\in(\mathbb{N}^0)^q \\ |k|=n}} (\Pi^k_q f)_{\mathcal{A}}(z_1, \ldots, z_q),$$

falls $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra und $z_1, \ldots, z_q \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$ sind und $\Pi^k_q f := (\Pi_q f)_k$ gesetzt wird.

BEWEIS:
$\sum_{i=1}^{q} \pi_i$ ist ein $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus, nach A.13 also homogen vom Grad 1. Da $f$ homogen vom Grad $n$ ist, folgt die Behauptung nach A.11 d) mit $q := t := 1,\ \mathcal{M} := \mathcal{M}^q,\ \mathcal{N} := \mathcal{M},\ \mathcal{P} = \mathcal{N}$. $\square$

## A.16 Bemerkung

Sei $n \in \mathbb{N}^0$, $f \in \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $U \subset X$ offen. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte homogene Polynomabbildung $f(U)$ von $\mathcal{M}(U)$ nach $\mathcal{N}(U)$ vom Grad

$n$, so daß für jede $\mathcal{O}_X$-Algebra $\mathcal{A}$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "\mathrm{kan}"] \arrow[d, "f(U)_{\mathcal{A}(U)}"'] & (\mathcal{M} \otimes \mathcal{A})(U) \arrow[d, "f_{\mathcal{A}}(U)"] \\
\mathcal{N}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "\mathrm{kan}"] & (\mathcal{N} \otimes \mathcal{A})(U).
\end{tikzcd}$$

Beweis:

Sei $q \in \mathbb{N}$. Nach A.15 gilt $\Pi_q f \in \mathrm{Pol}^n(\mathcal{M}^q, \mathcal{N})$ und gemäß A.11 c) folgt hieraus

$$\Pi_q f = \sum_{|k|=n} \Pi_q^k f.$$

Ist $U \subset X$ offen und sind $x_1, \ldots, x_q \in \mathcal{M}(U)$, dann ergibt sich mit A.11 b):

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{O}_X[T]}(U)(\sum_{i=1}^{q} x_i \otimes T_i) &= (\Pi_q f)_{\mathcal{O}_X[T]}(U)(x_1 \otimes T_1, \ldots, x_q \otimes T_q) \\ &= \sum_{|k|=n} (\Pi_q^k f)(U)(x_1, \ldots, x_q) \otimes T^k. \end{aligned}$$

Zunächst wird nun die Eindeutigkeit gezeigt.
Sei also $f(U) \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$ mit den geforderten Eigenschaften. Wegen $\mathcal{O}(U)[T] \subset \mathcal{O}_X[T](U)$ folgt dann:

$$\begin{aligned} f(U)_{\mathcal{O}(U)[T]}(\sum_{i=1}^{q} x_i \otimes T_i) &= f_{\mathcal{O}_X[T]}(U)(\sum_{i=1}^{q} x_i \otimes T_i) \\ &= \sum_{|k|=n} (\Pi_q^k f)(U)(x_1, \ldots, x_q) \otimes T^k. \end{aligned}$$

Ist nun $A_U$ eine $\mathcal{O}(U)$-Algebra und $a_i \in A_U,\ i = 1, \ldots, q$, dann ergibt sich mit dem Einsetzungshomomorphismus $\mathcal{O}(U)[T] \to A_U,\ T_i \mapsto a_i$:

$$f(U)_{A_U}(\sum_{i=1}^{q} x_i \otimes a_i) = \sum_{|k|=n} (\Pi_q^k f)(U)(x_1, \ldots, x_q) \otimes a^k.$$

Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. Nun wird die Existenz gezeigt. Sei

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\psi} F \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

eine Präsentation von $\mathcal{M}(U)$ und $(e_i)_{i \in I}$ eine Basis von $F$. Ist $A_U$ eine $\mathcal{O}(U)$-Algebra, dann ist auch die Sequenz

$$M' \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U \xrightarrow{\psi \otimes \mathbf{1}} F \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U \xrightarrow{\varphi \otimes \mathbf{1}} \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U \longrightarrow 0$$

exakt. Setzt man für $q \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_q \in A_U$

$$\widetilde{f}(U)_{A_U}(\sum_{j=1}^{q} e_{i_j} \otimes a_j) = \sum_{|k|=n} (\Pi_q^k f)(U)(\varphi(e_{i_1}), \ldots, \varphi(e_{i_q})) \otimes a^k,$$

so erhält man eine Polynomabbildung $\widetilde{f}(U) \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}(U)}(F, \mathcal{N}(U))$ mit

$$\Pi_q^k(\widetilde{f}(U))(y_1, \ldots, y_q) = (\Pi_q^k f)(U)(\varphi(y_1), \ldots, \varphi(y_q))$$

für $y_1, \ldots, y_q \in F$. Um zu zeigen, daß $\widetilde{f}(U)_{A_U}$ kanonisch eine Abbildung $f(U)_{A_U}$ von $\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U$ nach $\mathcal{N}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U$ induziert, genügt es zu beweisen, daß für $v, v' \in F \otimes_{\mathcal{O}(U)} A_U$ mit $v - v' \in \mathrm{Kern}(\varphi \otimes \mathbb{1})$ gilt $\widetilde{f}(U)_{A_U}(v) = \widetilde{f}(U)_{A_U}(v')$. Wegen $\mathrm{Kern}(\varphi \otimes \mathbb{1}) = \mathrm{Bild}(\psi \otimes \mathbb{1})$ gibt es ohne Einschränkung ein $l \in \mathbb{N}$, $x_j \in M'$, $a_j, b_j \in A_U$ und $e_j$ aus der Basis $(e_i)_{i \in I}$, $j = 1, \ldots, l$, so daß gilt:

$$v' = \sum_{j=1}^{l} e_j \otimes a_j, \quad v - v' = \sum_{j=1}^{l} \psi(x_j) \otimes b_j.$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(U)_{A_U}(v) &= \widetilde{f}(U)_{A_U}(\sum_{j=1}^{l} e_j \otimes a_j + \sum_{j=1}^{l} \psi(x_j) \otimes b_j) \\
&= \sum_{\substack{|k|=l \\ |k'|=l}} \Pi_{2l}^{k,k'}(\widetilde{f}(U))(e_1, \ldots, e_l, \psi(x_1), \ldots, \psi(x_l)) \otimes a^k b^{k'} \\
&= \sum_{\substack{|k|=l \\ |k'|=l}} (\Pi_{2l}^{k,k'} f)(U)(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_l), \varphi \circ \psi(x_1), \ldots, \varphi \circ \psi(x_l)) \otimes a^k b^{k'} \\
&= \sum_{|k|=l} (\Pi_l^k f)(U)(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_l)) \otimes a^k \\
&= \widetilde{f}(U)_{A_U}(\sum_{j=1}^{l} e_j \otimes a_j) = \widetilde{f}(U)_{A_U}(v').
\end{aligned}$$

Die Abbildungen $f(U)_{A_U}$ definieren eine Polynomabbildung
$f(U) \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$ mit der geforderten Eigenschaft. □

## A.17 Lemma

Ein Morphismus geringter Räume $\tau : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ induziert Funktoren

$$\begin{aligned}
\tau_* : \mathcal{O}_X\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol &\longrightarrow \mathcal{O}_{X'}\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol \\
\mathcal{M} &\longmapsto \tau_* \mathcal{M} \\
f &\longmapsto \tau_* f
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^* : \mathcal{O}_{X'}\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol &\longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol \\ \mathcal{M}' &\longmapsto \tau^*\mathcal{M}' \\ g &\longmapsto \tau^* g.\end{aligned}$$

Der Homomorphismus ($\mathcal{M}'$ $\mathcal{O}_{X'}$-Modul)

$$\begin{aligned}\mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\tau^*\mathcal{M}', \mathcal{M}) &\longrightarrow \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{M}', \tau^*\mathcal{M}) \\ g &\longmapsto \tau_* g \circ \sigma_{\mathcal{M}'}\end{aligned}$$

ist bijektiv. Dabei bezeichne $\sigma_{\mathcal{M}'}$ die von dem kanonischen $\mathcal{O}_{X'}$-Modulhomomorphismus $\mathcal{M}' \to \tau_*\tau^*\mathcal{M}'$ induzierte Polynomabbildung.

<u>BEWEIS:</u>
Der Beweis wird so geführt, indem zunächst gezeigt wird, daß die Aussagen für homogene Polynomabbildungen erfüllt sind. Die Behauptungen für beliebige Polynomabbildungen ergeben sich hieraus in Verbindung mit Lemma A.11 a).

Für $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ wird $\tau_* f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_{X'}}(\tau_*\mathcal{M}, \tau_*\mathcal{N})$ folgendermaßen definiert. Sei $\mathcal{A}'$ eine $\mathcal{O}_{X'}$-Algebra und $U' \subset X'$ offen. Es gilt:

$$\begin{aligned}&(\tau_*\mathcal{M})(U') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(U')} \mathcal{A}'(U') = \mathcal{M}(\tau^{-1}(U')) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(U')} \mathcal{A}'(U') \\ &\quad \cong \mathcal{M}(\tau^{-1}(U')) \otimes_{\mathcal{O}_X(\tau^{-1}(U'))} (\mathcal{O}_X(\tau^{-1}(U')) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(U')} \mathcal{A}'(U')).\end{aligned}$$

Gemäß Bemerkung A.16 gibt es für $n \in \mathbb{N}^0$ eine Abbildung

$$\begin{aligned}&(f_n)(\tau^{-1}(U'))_{\mathcal{O}_X(\tau^{-1}(U')) \otimes_{\mathcal{O}_{X'(U')}} \mathcal{A}'(U')} : \\ &\quad (\tau_*\mathcal{M})(U') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(U')} \mathcal{A}'(U') \longrightarrow (\tau_*\mathcal{N})(U') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(U')} \mathcal{A}'(U'),\end{aligned}$$

die nach Definition mit Restriktionen verträglich ist. Durch Übergang zur assoziierten Garbe wird ein Morphismus $(\tau_* f_n)_{\mathcal{A}'} : \tau_*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{A}' \to \tau_*\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{A}'$ von Garben von Mengen induziert. Nach Konstruktion sieht man, daß für diese Abbildungen für Morphismen in $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ das Diagramm (+) in Definition A.2 kommutativ ist, d. h. man erhält eine Polynomabbildung $\tau_* f_n \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_{X'}}(\tau_*\mathcal{M}, \tau_*\mathcal{N})$. Mit Hilfe von Lemma A.11 a) zeigt man leicht, daß für $P' \in X'$ und $z' \in (\tau_*\mathcal{M} \otimes \mathcal{A}')(U')$ gilt:

$$\begin{aligned}((\tau_* f_n)_{\mathcal{A}'}(U')(z'))_{P'} = 0 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}^0, \text{ d. h.} \\ (\tau_* f)_{\mathcal{A}'}(U')(z') := \sum_{n \in \mathbb{N}^0} (\tau_* f_n)_{\mathcal{A}'}(U')(z') \in (\tau_*\mathcal{N} \otimes \mathcal{A}')(U')\end{aligned}$$

ist nach A.7 a) wohldefiniert.

Seien nun $\mathcal{M}', \mathcal{N}'$ $\mathcal{O}_{X'}$-Moduln und $g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{M}', \mathcal{N}')$.
$\tau^* g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\tau^*\mathcal{M}', \tau^*\mathcal{N}')$ wird dann folgendermaßen definiert. Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra, $n \in \mathbb{N}^0$ und $U \subset X$ offen. Für $V \subset X'$ offen mit $V \supset \tau(U)$ gibt es nach Bemerkung A.16 eine Abbildung

$$(g_n)(V)_{\mathcal{A}(U)} : \mathcal{M}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U) \longrightarrow \mathcal{N}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U).$$

Nach Konstruktion kommutiert dabei für $\tau(U) \subset V' \subset V$ offen folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "(g_n)(V)_{\mathcal{A}(U)}"] \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{M}'}_{VV'} \otimes \mathbb{1}"'] & \mathcal{N}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^{\mathcal{N}'}_{VV'} \otimes \mathbb{1}"] \\
\mathcal{M}'(V') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V')} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "(g_n)(V')_{\mathcal{A}(U)}"] & \mathcal{N}'(V') \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V')} \mathcal{A}(U),
\end{tikzcd}$$

d. h. es gibt eine Abbildung

$$\varinjlim_{V \supset \tau(U)} (g_n)(V)_{\mathcal{A}(U)} : \varinjlim_{V \supset \tau(U)} \mathcal{M}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U) \longrightarrow \varinjlim_{V \supset \tau(U)} \mathcal{N}'(V) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}(V)} \mathcal{A}(U).$$

Diese Abbildungen sind mit Restriktionen verträglich, d. h. sie induzieren einen Morphismus von Garben von Mengen

$$(\tau^* g_n)_{\mathcal{A}} : \tau^*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \longrightarrow \tau^*\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}.$$

Für Morphismen in $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ ist dabei das diesen Morphismen entsprechende Diagramm (+) in Definition A.2 kommutativ, d. h. man erhält eine Polynomabbildung $\tau^* g_n \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\tau^*\mathcal{M}', \tau^*\mathcal{N}')$. Analog wie oben sieht man, daß für $P \in X$ und $z \in (\tau^* g_n)(U)(z)$ gilt:

$$((\tau^* g_n)_{\mathcal{A}}(U)(z))_P = 0 \quad \text{für fast alle } n \in \mathbb{N}^0, \text{ d. h.}$$
$$(\tau^* g)_{\mathcal{A}}(U)(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}^0} (\tau^* g_n)_{\mathcal{A}}(U)(z) \in (\tau^*\mathcal{N}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A})(U)$$

ist nach A.7 a) wohldefiniert.

Nach Konstruktion der Polynomabbildungen $\tau^* g$ bzw. $\tau_* f$ ist klar, daß $\tau^*$ bzw. $\tau_*$ Funktoren sind.

Die Bijektivität der Abbildung $h$ erhält man, indem man analog wie im Beweis der entsprechenden Aussage für Modulhomomorphismen vorgeht.

### A.18 Bemerkung

Für Morphismen $(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\tau} (X', \mathcal{O}_{X'}) \xrightarrow{\rho} (X'', \mathcal{O}_{X''})$ geringter Räume gilt:

$$(\rho \circ \tau)_* = \rho_* \tau_*,$$
$$(\rho \circ \tau)^* = \tau^* \rho^*.$$

BEWEIS:
Die Behauptung ist nach Konstruktion der Polynomabbildungen $(\rho \circ \tau)_* f$ bzw. $\rho_* \tau_* f$ für $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $(\rho \circ \tau)^* g$ bzw $\tau^* \rho^* g$ für $g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}'', \mathcal{N}'')$ ($\mathcal{M}'', \mathcal{N}''$ $\mathcal{O}_{X''}$-Moduln) leicht zu verifizieren. □

### A.19 Satz

a) Sei $f \in \mathrm{Pol}_R(M, N)$, $q \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_q \in M$. Dann gibt es zu jedem $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ ein eindeutig bestimmtes Element $y_k \in N$, so daß gilt:

i) $y_k = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$,

ii) $f_A(x_1 \otimes a_1 + \ldots + x_q \otimes a_q) = \sum\limits_{k \in (\mathbb{N}^0)^q} y_k \otimes a^k$ für alle $a_1, \ldots, a_q \in A$ und jede $R$-Algebra $A$.

b) Sei $M$ frei, $q \in \mathbb{N}$ und $x_1 \ldots, x_q$ eine Basis von $M$, und zu jedem $k \in (\mathbb{N}^0)^q$ sei ein Element $y_k \in N$ gegeben, so daß $y_k = 0$ gilt für fast alle $k$. Dann wird durch a) ii) eine Polynomabbildung von $M$ nach $N$ definiert.

BEWEIS:
Vgl. [Ro], I.1. □

### A.20 Satz

Ist $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge und bezeichnet $h : \mathrm{Pol}_R(M, N)_S \rightarrow \mathrm{Pol}_{R_S}(M_S, N_S)$ den durch $h(\frac{f}{s}) := \frac{1}{s} f_{R_S}{}^{\dagger}$ für $f \in \mathrm{Pol}_R(M, N)$ und $s \in S$ definierten $R_S$-Modulhomomorphismus, dann gilt:

a) $h$ ist injektiv, falls $M$ endlich erzeugt ist.

b) $h$ ist bijektiv, falls $M$ endlich präsentierbar ist.

BEWEIS:
Es wird der Beweis der entsprechenden Aussage für die Modulhomomorphismen (vgl. [Ku], Kap.IV, 1.10) auf die Polynomabbildungen übertragen. Sei $\{m_1, \ldots, m_q\}$ ein Erzeugendensystem von $M$ und $0 \rightarrow K \rightarrow R^q \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$ die zugehörige Präsentation.

† $f$ induziert kanonisch eine Polynomabbildung $f_{R_S} \in \mathrm{Pol}_{R_S}(M_S, N_S)$, indem man für jede $R_S$-Algebra $A$ setzt $(f_{R_S})_A = f_A$.

a) Sei $f \in \mathrm{Pol}_R(M,N)$ und $s \in S$ mit $\frac{f}{s} \in \mathrm{Kern}\, h$. Gemäß A.19 gilt:

$$f_{R[T]}(\sum_{i=1}^{q} m_i \otimes T_i) = \sum_{k\in(\mathbb{N}^0)^q} y_k \otimes T^k$$

mit $y_k \in N$ und $y_k = 0$ für fast alle $k \in (\mathbb{N}^0)^q$. Wegen $\frac{f_{R_S[T]}}{s} = 0$ bedeutet dies $\frac{y_k}{s} = 0$ für alle $k$. Folglich gibt es ein $s' \in S$ mit $s'y_k = 0$ für alle $k$, d. h. man erhält $s'f = 0$ (A.19) und damit $\frac{f}{s} = 0$.

b) Sei $\{z_1, \ldots, z_l\}$ ein Erzeugendensystem von $K$ und $g \in \mathrm{Pol}_{R_S}(M_S, N_S)$. Dann gilt:

$$g_{R_S[T]}(\sum_{i=1}^{q} \frac{m_i}{1} \otimes T_i) = \sum_k y'_k \otimes T^k$$

mit $y'_k \in N_S$ und $y'_k = 0$ für fast alle $k$. Folglich gibt es ein $s \in S$ mit $y'_k = \frac{y_k}{s}$ für alle $k$. Sei nun $\tilde{g} : R^q \to N$ die durch

$$\tilde{g}_{R^q[T]}(\sum_{i=1}^{q} e_i \otimes T_i) := \sum_k y_k \otimes T^k$$

gemäß A.19 eindeutig definierte Polynomabbildung ($e_1, \ldots, e_q$ bezeichne die Basis der Einheitsvektoren von $R^q$). Damit ist folgendes Diagramm von Polynomabbildungen kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
R^q \arrow[rr, "\tilde{g}"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & & N \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\
M \arrow[r, "\mathrm{kan}"] & M_S \arrow[r, "\mathrm{sg}"] & N_S.
\end{tikzcd}$$

Sei nun $A := R[T_1, \ldots, T_q, T'_1, \ldots, T'_l]$ und

$$\tilde{g}_A(\sum_{i=1}^{q} e_i \otimes T_i + \sum_{j=1}^{l} z_j \otimes T'_j) = \sum_{k,k'} \tilde{y}_{k,k'} \otimes T^k T'^{k'}$$

mit $\tilde{y}_{k,k'} \in N$ und $\tilde{y}_{k,k'} = 0$ für fast alle $k, k'$. Aus der Kommutativität des obigen Diagramms folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,k'} \frac{\tilde{y}_{k,k'}}{1} \otimes T^k T'^{k'} \\
&\quad = (sg)_{A_S} \circ \mathrm{kan}_A \circ \varepsilon_A(\sum_{i=1}^{q} e_i \otimes T_i + \sum_{j=1}^{l} z_j \otimes T'_j) \\
&\quad = (sg)_{A_S}(\sum_{i=1}^{q} \frac{m_i}{1} \otimes T_i)
\end{aligned}$$

$$= \sum_k \frac{y_k}{1} \otimes T^k.$$

Dies bedeutet, es gibt ein $s' \in S$ mit

$$s'\tilde{y}_{k,k'} = \begin{cases} s'y_k & \text{für } k' = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k, k'$. Folglich erhält man für jede $R$-Algebra $B$ wegen $M \otimes_R B \cong (R^q \otimes_R B)/(K \otimes_R B)$ eine wohldefinierte Abbildung $(s'\tilde{g})_B : M \otimes_R B \to N \otimes_R B$, indem man

$$(s'\tilde{g})_B(\sum_{i=1}^{q} m_i \otimes a_i) = \sum_k s'y_k \otimes a^k$$

für $a_1 \ldots, a_q \in R$ setzt. Die Abbildungen $(s'\tilde{g})_B$ liefern eine Polynomabbildung $f = s'\tilde{g} \in \mathrm{Pol}_R(M, N)$, wobei gilt $h(\frac{f}{ss'}) = g$. Damit ist die Surjektivität von $h$ gezeigt. $\square$

**A.21 Satz**

a) $\tilde{}: R\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol^{\ddagger} \to \tilde{R}\text{-}\mathcal{M}od\text{-}\mathcal{P}ol$ ist ein volltreuer Funktor.

b) Ist $M$ endlich präsentierbar, dann gilt:

$$\widetilde{\mathrm{Pol}_R(M, N)} \cong \mathcal{P}ol_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N}).$$

BEWEIS:
Es werden die Beweise der Aussagen für die Modulhomomorphismen (vgl. [G-D], chap I, (1.3.5), (1.3.8) und (1.3.12) (ii)) auf Polynomabbildungen übertragen.

a) Sei $f \in \mathrm{Pol}_R(M, N)$ und $\mathcal{A}$ eine $\tilde{R}$-Algebra. Für $s \in R$ ist $\mathcal{A}(D(s))$ eine $R_s$- und damit auch eine $R$-Algebra. Folglich gibt es eine Abbildung

$$\begin{array}{lccc} f_{\mathcal{A}(D(s))} : & M \otimes_R \mathcal{A}(D(s)) & \longrightarrow & N \otimes_R \mathcal{A}(D(s)) \\ & \wr\Vert & & \wr\Vert \\ & M_s \otimes_{R_s} \mathcal{A}(D(s)) & & N_s \otimes_{R_s} \mathcal{A}(D(s)) \\ & \wr\Vert & & \wr\Vert \\ & \tilde{M}(D(s)) \otimes_{\tilde{R}(D(s))} \mathcal{A}(D(s)) & & \tilde{N}(D(s)) \otimes_{\tilde{R}(D(s))} \mathcal{A}(D(s)), \end{array}$$

und für $s' \in R$ mit $D(s') \subset D(s)$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R \mathcal{A}(D(s)) & \longrightarrow & N \otimes_R \mathcal{A}(D(s)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes_R \mathcal{A}(D(s')) & \longrightarrow & N \otimes_R \mathcal{A}(D(s')). \end{array}$$

‡ $R$-$\mathcal{M}od$-$\mathcal{P}ol$ bezeichne die Kategorie der $R$-Moduln mit den Polynomabbildungen als Morphismen.

Da die Mengen $D(s)$, $s \in R$, eine Basis der Topologie von $\operatorname{Spec} R$ bilden, erhält man somit einen Morphismus von Garben von Mengen (vgl. [G-D], chapt 0, (3.2.3))

$$\tilde{f}_{\mathcal{A}} : \tilde{M} \otimes_{\tilde{R}} \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{N} \otimes_{\tilde{R}} \mathcal{A}$$

(nach Übergang zur assoziierten Garbe). Aus der Konstruktion dieser Morphismen ist ersichtlich, daß das Diagramm (+) in Definition A.2 für Morphismen in $\mathcal{A}lg_{\mathcal{O}_X}$ kommutiert, d. h. es wird eine Polynomabbildung $\tilde{f} : \tilde{M} \to \tilde{N}$ induziert.

Ist nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ und $A$ eine $R_{\mathfrak{p}}$-Algebra und bezeichnet $\widetilde{A}$ die durch $A$ induzierte Wolkenkratzergarbe, so gilt:

$$(\tilde{f}_{\mathfrak{p}})_A = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in U} \tilde{f}_{\widetilde{A}}(U) = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(s)} \tilde{f}_{\widetilde{A}}(D(s)) = \varinjlim_{\mathfrak{p} \in D(s)} \tilde{f}_{\widetilde{A}(D(s))} = (f_{R_{\mathfrak{p}}})_A,$$

d. h. $\tilde{f}_{\mathfrak{p}} = f_{R_{\mathfrak{p}}}$.

Ist $P$ ein weiterer $R$-Modul, und $g \in \operatorname{Pol}_R(N, P)$, so erhält man hiermit:

$$(\widetilde{g \circ f})_{\mathfrak{p}} = (g \circ f)_{R_{\mathfrak{p}}} = g_{R_{\mathfrak{p}}} \circ f_{R_{\mathfrak{p}}} = \tilde{g}_{\mathfrak{p}} \circ \tilde{f}_{\mathfrak{p}} \quad \text{für alle } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R,$$

also $\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$. Damit ist gezeigt, daß $\tilde{}$ ein Funktor ist. Es bleibt noch zu verifizieren, daß $\tilde{}$ volltreu ist, d. h. es ist zu beweisen, daß die durch $f \mapsto \tilde{f}$ definierte Abbildung von $\operatorname{Pol}_R(M, N)$ in $\operatorname{Pol}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ bijektiv ist. Dazu wird zunächst folgendermaßen eine Abbildung von $\operatorname{Pol}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ nach $\operatorname{Pol}_R(M, N)$ definiert. Sei $g \in \operatorname{Pol}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ und $A$ eine $R$-Algebra. Da $\tilde{A}$ eine $\tilde{R}$-Algebra ist, gibt es einen Morphismus von Garben von Mengen

$$\begin{array}{rccc} g_{\tilde{A}} : & \tilde{M} \otimes_{\tilde{R}} \tilde{A} & \longrightarrow & \tilde{N} \otimes_{\tilde{R}} \tilde{A} \\ & \wr\!\!| & & \wr\!\!| \\ & \widetilde{M \otimes_R A} & & \widetilde{N \otimes_R A}. \end{array}$$

Der globale Schnittfunktor $\Gamma$ liefert dann eine Abbildung $\Gamma(g_{\tilde{A}}) : M \otimes_R A \to N \otimes_R A$, und somit, wie man sofort sieht, eine Polynomabbildung $\Gamma(g) : M \to N$. Dadurch wird eine Abbildung $\Gamma : \operatorname{Pol}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N}) \to \operatorname{Pol}_R(M, N)$ definiert. Nach Konstruktion von $\tilde{f}$ für $f \in \operatorname{Pol}_R(M, N)$ gilt offensichtlich $\Gamma(\tilde{f}) = f$. Seien nun $g \in \operatorname{Pol}_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ und $f := \Gamma(g) \in \operatorname{Pol}_R(M, N)$. Für $s \in R$ gilt $\Gamma(g|_{D(s)}) \in \operatorname{Pol}_{R_s}(M_s, N_s)$, und das folgende Diagramm von Polynomabbildungen kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ {\scriptstyle \text{kan}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \text{kan}} \\ M_s & \xrightarrow{\Gamma(g|_{D(s)})} & N_s. \end{array}$$

Wegen der Eigenschaften von Polynomabbildungen folgt hieraus: $\Gamma(g|_{D(s)}) = f_{R_s}$. Gemäß Konstruktion von $\tilde{f}$ bedeutet dies $\tilde{f} = g$, also $\widetilde{\Gamma(g)} = g$.

b) Gemäß A.5 d) gilt für $U \subset X$ offen:

$$\mathcal{P}ol_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})(U) = \mathrm{Pol}_{\tilde{R}|_U}(\tilde{M}|_U, \tilde{N}|_U).$$

Da $M$ endlich präsentierbar ist, folgt hieraus für $D(s)$, $s \in R$, nach a) und Satz A.20:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}ol_{\tilde{R}}(\tilde{M}, \tilde{N})(D(s)) &= \mathrm{Pol}_{\tilde{R}|_{D(s)}}(\tilde{M}|_{D(s)}, \tilde{N}|_{D(s)}) \\
&\cong \mathrm{Pol}_{R_s}(M_s, N_s) && \text{(a))} \\
&\cong (\mathrm{Pol}_R(M, N))|_s && \text{(A.20)} \\
&\cong \mathrm{Pol}\widetilde{_R(M, N)}(D(s)).
\end{aligned}$$

Da diese Isomorphismen mit Restriktionen verträglich sind und $D(s)$, $s \in R$, eine Basis der Topologie von $\mathrm{Spec}\, R$ bilden, erhält man die Behauptung. □

## A.22 Definition

Sei $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $n \in \mathbb{N}$. Die durch

$$(D^n f)_{\mathcal{A}}(z, z') := \sum_{q \geq 0} (\Pi_2^{q,n} f)_{\mathcal{A}}(z, z')$$

für $z, z' \in \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra, definierte Polynomabbildung $D^n f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt $n$-te Ableitung oder $n$-tes Differential von $f$ an der Stelle $z$ in Richtung $z'$. □

## A.23 Bemerkung

a) Für $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(M, N)$ gilt:

$$(D^n f)_P = D^n(f_P) \quad \text{für } P \in X$$

und, falls $f$ homogen ist

$$D^n f(U) = D^n(f(U)) \quad \text{für } U \subset X \text{ offen (vgl. A.16).}$$

b) Ist $\tau : (X, \mathcal{O}_X) \to (X', \mathcal{O}_{X'})$ ein Morphismus geringter Räume und $f$ bzw. $g$ ein Morphismus in $\mathcal{O}_X$-$\mathcal{M}od$-$\mathcal{P}ol$ bzw. $\mathcal{O}_{X'}$-$\mathcal{M}od$-$\mathcal{P}ol$, dann gilt für $k \in (\mathbb{N}^0)^q$, $n, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\tau_*(f_k) &= (\tau_* f)_k, \\
\tau^*(g_k) &= (\tau^* g)_k,
\end{aligned}$$

$$\tau_*(D^n f) = D^n(\tau_* f),$$
$$\tau^*(D^n g) = D^n(\tau^* g).$$

BEWEIS:
Die Behauptungen sind nach Konstruktion der Funktoren $\tau_*$ und $\tau^*$ bzw. nach Definition der multihomogenen Komponenten und des Differentials klar. $\square$

### A.24 Bemerkung

Seien $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Gemäß Lemma A.11 a) gilt für $z, z' \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra:

$$f(z+z') = \Pi_2 f(z,z') = \sum_{n=0}^{\infty} D^n f(z,z').$$

b) Für $m \in \mathbb{N}^0$ und $f \in \mathrm{Pol}^m_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ist $D^n f$ gemäß Bemerkung A.15 die bihomogene Komponente vom Grad $(m-n,n)$ von $\Pi_2 f$ für $m \geq n$ und die Nullabbildung für $m < n$.

c) Sei $z \in H^0(X,\mathcal{M})$. Offensichtlich sind $D^n_z f = D^n f(-,z) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $D^n f(z,-) : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ Polynbomabbildungen, wobei $D^n f(-,z)$ homogen vom Grad $n$ ist. Für $m \in \mathbb{N}^0$ und $f \in \mathrm{Pol}^m_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ gilt gemäß b) $D_z f$[§] $\in \mathrm{Pol}^{m-n}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ für $m \geq n$ und $f = 0$ für $m < n$. Weiter ist $D_z : \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ ein $H^0(X,\mathcal{O}_X)$-Modulhomomorphismus. $\square$

### A.25 Satz

Seien $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ und $m,n \in \mathbb{N}$. Für $z,z',z'' \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra, gilt:

a) $D^n_{z'} D^m_{z'} f(z) = \binom{n+m}{n} D^{n+m}_{z'} f(z)$.

b) $D^n_{z''} D^m_{z'} f(z) = D^m_{z'} D^n_{z''} f(z)$.

c) $D(g \circ f)(z,z') = Dg(f(z), Df(z,z'))$, wobei $\mathcal{P}$ ein weiterer $\mathcal{O}_X$-Modul und $g \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\mathcal{P})$ sei (Kettenregel).

d) $D(g \cdot f)(z,z') = f(z)Dg(z,z') + g(z)Df(z,z')$ für $g,f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})$ (Produktregel).

e) $Df(z,z) = nf(z)$ für $f \in \mathrm{Pol}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})$ (Eulersche Differentialgleichung).

BEWEIS:
Gemäß [Ro] gelten die entsprechenden Aussagen für Polynomabbildungen über Ringen. Nach A.23 gelten die Behauptungen also in jedem Halm und damit auch global. $\square$

[§] $Df = D^1 f$

### A.26 Definition

Ein Paar $(f, Df)$ bestehend aus Abbildungen $f : M \to N$ und $Df : M \times M \to N$ heißt kubische Abbildung, falls für alle $r \in R$, $x, y \in M$ gilt:

1) Die Abbildung $Df(-, x) : M \to N$ ist quadratisch, und die Abbildung $Df(x, -) : M \to N$ ist linear.
2) $f(rx) = r^3 f(x)$.
3) $f(x + y) = f(x) + Df(x, y) + Df(y, x) + f(y)$.
4) $Df(x, x) = 3f(x)$.

Es wird $D_y f(x) := Df(x, y)$ und $D_z D_y f(x) := DDyf(x, z)$gesetzt, wobei $DDyf$ die Bilinearisierung der quadratischen Abbildung $D_y f$ bezeichne. $\square$

### A.27 Satz

Sei $(f, Df)$ eine kubische Abbildung und $R'$ eine (unitäre, kommutative, assoziative) $R$-Algebra. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte kubische Abbildung $(f', Df')$ von $M \otimes_R R'$ nach $N \otimes_R R'$, so daß die folgenden Diagramme kommutativ sind:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] & N \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\ M \otimes_R R' \arrow[r, "f'"] & N \otimes_R R', \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "Df"] \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] & N \arrow[d, "\mathrm{kan}"] \\ M \otimes R' \times M \otimes R' \arrow[r, "Df'"] & N \otimes R'. \end{tikzcd}$$

BEWEIS:
Aus 1) von Definition A.26 folgt, daß $DDf$ in jedem der drei Argumente linear ist. Weiter gilt für $x_1, x_2, x_3 \in M$:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + x_3) &= f(x_1) + D_{x_1} f(x_2 + x_3) + D_{x_2+x_3} f(x_1) + f(x_2 + x_3) \\ &= f(x_1) + D_{x_1} f(x_2) + D_{x_1} f(x_3) + D_{x_2} D_{x_1} f(x_3) + D_{x_2} f(x_1) \\ &\quad + D_{x_3} f(x_1) + f(x_2) + D_{x_2} f(x_3) + D_{x_3} f(x_2) + f(x_3). \end{aligned}$$

Wegen $f(x_1 + x_2 + x_3) = f(x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)} + x_{\sigma(3)})$ impliziert dies $D_{x_1} D_{x_2} f(x_3) = D_{x_{\sigma(1)}} D_{x_{\sigma(2)}} f(x_{\sigma(3)})$ für jede Permutation $\sigma \in S_3$. Zunächst wird die Eindeutigkeit gezeigt. Sei also $(f', Df')$ eine kubische Abbildung von $M \otimes R'$ nach $N \otimes R'$ mit den geforderten Eigenschaften. Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$, $r_i, r'_j \in R'$, $u_i, u'_j \in M$ für $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$:

$$Df'(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes r_i, \sum_{j=1}^{m} u'_j \otimes r'_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i^2 r'_j D_{u'_j} f(u_i) + \sum_{\substack{i,k=1 \\ i<k}}^{n} \sum_{j=1}^{m} r_i r_k r'_j D_{u_k} D_{u'_j} f(u_i),$$

$$f'(\sum_{i=1}^{n} u_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^{n} r_i^3 f(u_i) + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} r_i r_j^2 D_{u_i} f(u_j) + \sum_{\substack{i,j,k=1\\ i<j<k}}^{n} r_i r_j r_k D_{u_i} D_{u_j} f(u_k).$$

Damit ist die Eindeutigkeit bewiesen. Die Existenz wird zunächst für den Fall gezeigt, daß $M$ ein freier Modul ist. Sei $(e_i)_{i\in I}$ eine Basis von $M$. Durch

$$\begin{aligned} &Df'(\sum_{k=1}^{n} e_{i_k} \otimes r_k, \sum_{j=1}^{m} e_{i_j} \otimes r'_j) \\ &\quad := \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_k^2 r'_j D_{e_{i_j}} f(e_{i_k}) + \sum_{\substack{l,k=1\\ l<k}}^{n}\sum_{j=1}^{m} r_k r_l r'_j D_{e_{i_l}} D_{e_{i_k}} f(e_{i_j}) \quad \text{und} \\ &f'(\sum_{k=1}^{n} e_{i_k} \otimes r_k) := \sum_{k=1}^{n} r_k^3 f(e_{i_k}) + \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n} r_k r_j^2 D_{e_{i_k}} f(e_{i_j}) + \sum_{\substack{l,j,k=1\\ l<j<k}}^{n} r_l r_j r_k D_{e_{i_l}} D_{e_{i_j}} f(e_{i_k}) \end{aligned}$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ und $r_k, r'_j \in R'$ für $k = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$ werden Abbildungen $f' : M \otimes R' \to N \otimes R'$ und $Df' : M \otimes R' \times M \otimes R' \to N \otimes R'$ definiert. Es bleibt zu zeigen, daß $(f', Df')$ eine kubische Abbildung ist, da die Verträglichkeitsbedingung mit $(f, Df)$ nach Definition klar ist. Seien dazu $u, v, w, z \in M \otimes R'$ und $r, r' \in R'$ vorgegeben. Ohne Einschränkung gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$, Basisvektoren $e_1, \ldots, e_n$ und $a_i, b_i, c_i, d_i \in R'$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß gilt: $u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i$, $v = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes b_i$, $w = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_i$, $z = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes d_i$. Nach Definition folgt unmittelbar:

$$f'(ru) = r^3 f'(u), \quad Df'(ru, v) = r^2 Df'(u, v).$$

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned} &Df'(u, rv + r'w) = Df'(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i, \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (rb_i + r'c_i)) \\ &\quad = \sum_{k,j=1}^{n} a_k^2 (rb_j + r'c_j) D_{e_j} f(e_k) + \sum_{\substack{l,k,j=1\\ l<k}}^{n} a_l a_k (rb_j + r'c_j) D_{e_l} De_k f(e_j) \\ &\quad = rDf'(u, v) + r'Df'(u, w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &DD_u f'(rv + r'w, z) = D_u f'(rv + r'w + z) - D_u f'(rv + r'w) - D_u f'(z) \\ &\quad = Df'(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (rb_i + r'c_i + d_i), \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i) \\ &\qquad - Df'(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes (rb_i + r'c_i), \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i) \\ &\qquad - Df'(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes d_i, \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i) \\ &\quad = \sum_{k,j=1}^{n} [(rb_k + r'c_k + d_k)^2 - (rb_k + r'c_k)^2 - d_k^2] a_j D_{e_j} f(e_k) \end{aligned}$$

$$+\sum_{\substack{l,k,j=1\\l<k}}^{n}[(rb_l+r'c_l+d_l)(rb_k+r'c_k+d_k)-(rb_l+r'c_l)(rb_k+r'b_k)-d_ld_k]a_j$$
$$D_{e_l}D_{e_k}f(e_j)$$
$$=rDD_uf'(v,z)+r'DD_uf'(w,z)$$

wegen

$$\begin{aligned}(rb_k+r'c_k+d_k)^2-(rb_k+r'c_k)^2-d_k^2&=r2b_kd_k+r'2c_kd_k\\&=r[(b_k+d_k)^2-b_k^2-d_k^2]+r'[(c_k+d_k)^2-c_k^2-d_k^2]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&(rb_l+r'c_l+d_l)(rb_k+r'c_k+d_k)-(rb_l+r'c_l)(rb_k+r'c_k)-d_ld_k\\&\quad=rb_ld_k+r'c_ld_k+rb_kd_l+r'c_kd_l=r(b_ld_k+b_kd_l)+r'(c_ld_k+c_kd_l)\\&\quad=r[(b_l+d_l)(b_k+d_k)-b_lb_k-d_ld_k]+r'[(c_l+d_l)(c_k+d_k)-c_lc_k-d_ld_k].\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenschaften 1) und 2) gezeigt. Mit den Voraussetzungen $3f(e_k)=D_{e_k}f(e_k)$ und $2D_{e_k}f(e_j)=D_{e_j}D_{e_k}f(e_j)$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}&f'(u+v)=f'(\sum_{i=1}^{n}e_i\otimes(a_i+b_i))\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^3f(e_k)+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}(a_k+b_k)(a_j+b_j)^2D_{e_k}f(e_j)\\&\quad+\sum_{\substack{l,j,k=1\\l<j<k}}^{n}(a_l+b_l)(a_j+b_j)(a_k+b_k)D_{e_l}D_{e_j}f(e_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_k^3+3a_k^2b_k+3a_kb_k^2+b_k^3)f(e_k)\\&\quad+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}(a_ka_j^2+2a_ka_jb_j+a_kb_j^2+b_ka_j^2+2b_ka_jb_j+b_kb_j^2)D_{e_k}f(e_j)\\&\quad+\sum_{\substack{l,j,k=1\\l<j<k}}^{n}(a_la_ja_k+a_la_jb_k+a_lb_ja_k+a_lb_jb_k+b_la_ja_k+b_la_jb_k+b_lb_ja_k+b_lb_jb_k)\\&\qquad D_{e_l}D_{e_j}f(e_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}(a_k^3+b_k^3)f(e_k)+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}(a_ka_j^2+b_kb_j^2)D_{e_k}f(e_j)\\&\quad+\sum_{\substack{l,j,k=1\\l<j<k}}^{n}(a_la_ja_k+b_lb_jb_k)D_{e_l}D_{e_j}f(e_k)\\&\quad+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2b_k+a_kb_k^2)D_{e_k}f(e_k)+\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{n}(a_kb_j^2+b_ka_j^2)D_{e_k}f(e_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n} (a_k a_j b_j + b_k a_j b_j) D_{e_j} D_{e_k} f(e_j) \\
&+ \sum_{\substack{l,j,k=1\\ l<k,\ j\neq l,k}}^{n} (a_l a_k b_j + b_l b_k a_j) D_{e_l} D_{e_j} f(e_k) \\
&= f'(u) + f'(v) + \sum_{k,j=1}^{n} (a_k^2 b_j + b_k a_j^2) D_{e_k} f(e_j) \\
&+ \sum_{\substack{l,k,j=1\\ l<k}}^{n} (a_l a_k b_j + b_l b_k a_j) D_{e_l} D_{e_k} f(e_j) \\
&= f'(u) + f'(v) + D_v f'(u) + D_u f'(v).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Df'(u,u) &= Df'(\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i, \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i) \\
&= \sum_{k,j=1}^{n} a_k^2 a_j D_{e_j} f(e_k) + \sum_{\substack{l,k,j=1\\ l<k}}^{n} a_l a_k a_j D_{e_l} D_{e_k} f(e_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^3 D_{e_k} f(e_k) + \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n} a_k^2 a_j D_{e_j} f(e_k) + \sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{n} a_l^2 a_k D_{e_l} D_{e_k} f(e_l) \\
&+ \sum_{\substack{l,k,j=1\\ l<k,\ j\neq l,k}}^{n} a_l a_k a_j D_{e_l} D_{e_k} f(e_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} 3a_k^3 f(e_k) + \sum_{\substack{k,j=1\\ k\neq j}}^{n} 3a_l^2 a_k D_{e_k} f(e_l) + \sum_{\substack{l,k,j=1\\ l<j<k}}^{n} 3a_l a_j a_k D_{e_l} D_{e_k} f(e_j) \\
&= 3f(u).
\end{aligned}
$$

Damit sind auch die Eigenschaften 3) und 4) bewiesen, d. h. $(f', Df')$ ist eine kubische Abbildung. Sei nun $M$ ein beliebiger $R$-Modul und $0 \to M' \overset{\psi}{\to} F \overset{\varphi}{\to} M \to 0$ eine Präsentation von $M$. Dann ist die durch den Basiswechsel mit $R'$ induzierte Sequenz $M' \otimes R' \xrightarrow{\tilde{\psi}} F \otimes R' \xrightarrow{\tilde{\varphi}} M \otimes R' \longrightarrow 0$ exakt. Setzt man $\tilde{f} := f \circ \varphi$ und $D\tilde{f} := Df \circ (\varphi \times \varphi)$, so ist $(\tilde{f}, D\tilde{f})$ offensichtlich eine kubische Abbildung von $F$ nach $N$. Da $F$ frei ist, induziert $(\tilde{f}, D\tilde{f})$ also eindeutig eine kubische Abbildung $(\tilde{f}', D\tilde{f}')$ von $F \otimes R'$ nach $N \otimes R'$. Um zu zeigen, daß $(\tilde{f}', D\tilde{f}')$ kanonisch eine kubische Abbildung von $M \otimes R'$ nach $N \otimes R'$ induziert, genügt es wegen $M \otimes R' \cong F \otimes R' / \operatorname{Kern} \tilde{\varphi}$ zu beweisen, daß für alle $u, u', v, v' \in F \otimes R'$ mit $u - u',\ v - v' \in \operatorname{Kern} \tilde{\varphi}$ gilt:

$$
\tilde{f}'(u) = \tilde{f}'(u') \quad \text{und} \quad D\tilde{f}'(u,v) = D\tilde{f}'(u', v').
$$

Wegen $\operatorname{Kern}\tilde{\varphi} = \operatorname{Bild}\tilde{\psi}$ gibt es ohne Einschränkung ein $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in M'$, $e_i \in F$, und $a_i, b_i, c_i, d_i \in R'$ für $i = 1, \ldots, n$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes a_i, \quad v' = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes b_i, \\ u - u' &=: w = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) \otimes c_i, \quad v - v' =: z = \sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) \otimes d_i. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} & D\tilde{f}'(u,v) = D\tilde{f}'(u'+w, v'+z) \\ &= D\tilde{f}'(u',v') + DD_{v'}\tilde{f}'(u',w) + D\tilde{f}'(w,v') \\ &\quad + D\tilde{f}'(u',z) + DD_z\tilde{f}'(u',w) + D\tilde{f}'(w,z) \\ &= D\tilde{f}'(u',v') + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j c_k D_{\varphi(e_i)} D_{\varphi(e_j)} f(\varphi(\psi(x_k))) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_j^2 Df(\varphi(\psi(x_j)), \varphi(e_i)) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<k}}^{n} c_i c_k b_j D_{\varphi(\psi(x_k))} D_{\varphi(e_j)} f(\varphi(\psi(x_i))) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} d_i a_j^2 Df(\varphi(e_j), \varphi(\psi(x_i))) + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i<k}}^{n} a_i a_k d_j D_{\varphi(e_k)} D_{\varphi(\psi(x_j))} f(\varphi(e_i)) \\ &\quad + \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i c_j d_k D_{\varphi(e_k)} D_{\varphi(\psi(x_j))} f(\varphi(\psi(x_i))) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} d_i c_j^2 Df(\varphi(\psi(x_j)), \varphi(\psi(x_i))) + \sum_{i,j,k=1}^{n} c_i c_k d_j D_{\varphi(\psi(x_k))} D_{\varphi(\psi(x_j))} f(\varphi(\psi(x_i))) \\ &= D\tilde{f}'(u',v'). \end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\tilde{f}'(u) = \tilde{f}'(u')$. Damit ist alles bewiesen. □

**A.28 Satz**

Durch die Zuordnung $f \mapsto (f, Df)$ wird ein Isomorphismus von der Menge der homogenen Polynomabbildungen vom Grad 3 von $M$ nach $N$ in die Menge der kubischen Abbildungen von $M$ nach $N$ definiert.

Beweis:

Ist $f$ eine homogene Polynomabbildung vom Grad 3 von $M$ nach $N$, so sieht man leicht, daß das Paar $(f, Df)$ die Eigenschaften 1) bis 4) von Definition A.26 erfüllt, d. h. $(f, Df)$ ist eine kubische Abbildung. Ist andererseits $(f, Df)$ eine kubische Abbildung, so induziert $(f, Df)$ gemäß Satz A.27 für jeden Basiswechsel $R'/R$ eine kubische Abbildung von $M \otimes R'$ nach $N \otimes R'$, wobei gemäß Konstruktion für $R$-Algebrahomomorphismen $R' \to R''$ die zu $R'$ bzw. $R''$ gehörigen kubischen Abbildungen in der üblichen Weise verträglich sind, d. h. man erhält eine Polynomabbildung von $M$ nach $N$. Die Eigenschaften homogener Polynomabbildungen vom Grad 3 bzw. kubischer Abbildungen liefern, daß die obigen Zuordnungen invers zueinander sind. Offensichtlich sind sie auch $R$-linear. $\square$

**A.29 Definition**

Ein Paar $(f, Df)$ bestehend aus Morphismen von Garben von Mengen $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ und $Df : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ heißt kubische Abbildung, falls $(f(U), Df(U))$ für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ eine kubische Abbildung ist. Eine kubische Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{O}_X$ heißt kubische Form. $\square$

**A.30 Bemerkung**

Sei $(f, Df)$ eine kubische Abbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. Ist $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{O}_X$-Algebra und $U \subset X$ offen, so induziert $(f(U), Df(U))$ nach A.27 eine kubische Abbildung $(f(U)_{\mathcal{A}(U)}, Df(U)_{\mathcal{A}(U)})$, die nach Konstruktion mit den Restriktionen verträglich ist. Durch Übergang zur assoziierten Garbe wird weiter eine kubische Abbildung von $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ nach $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}$ induziert, wobei nach Konstruktion klar ist, daß für $\mathcal{O}_X$-Algebrahomomorphismen $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ die zu $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ gehörigen kubischen Abbildungen in der üblichen Weise verträglich sind, d. h. $(f, Df)$ induziert eine Polynomabbildung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, die homogen vom Grad 3 ist. Analog folgt, daß jede quadratische Abbildung eine homogene Polynomabbildung vom Grad 2 induziert. $\square$

**A.31 Satz**

Die Mengen der

konstanten Morphismen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ und $\mathrm{Pol}^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

multilinearen Morphismen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ und $\mathrm{Pol}^{1,\dots,1}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

quadratischen Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ und $\mathrm{Pol}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

kubischen Abbildungen von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ und $\mathrm{Pol}^3_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

sind als $\mathcal{O}_X$-Moduln jeweis kanonisch isomorph.

BEWEIS:
Gemäß A.4 a),b) und A.30 induzieren konstante bzw. multilineare bzw. quadratische Abbildungen (multi)homogene Polynomabbildungen des entsprechenden Grades. Andererseits liefert eine homogene Polynomabbildung gemäß Bemerkung A.16 für jede offene Teilmenge $U$ von $X$ eine homogene Polynomabbildung des gleichen Grades von $\mathcal{M}(U)$ nach $\mathcal{N}(U)$, die dann einer Abbildung des geforderten Typs entspricht (A.28, [Ro]). Daß die beiden Zuordnungen invers zueinander sind, folgt, da die Zuordnungen der entsprechenden Mengen in jedem Halm invers zueinander sind. $\square$

## A.32 Definition

Seien $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})$ und $x, y, z \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ $\mathcal{O}_X$-Algebra und $f_{\mathcal{A}}(z)$ sei invertierbar. Dann heißt

$$D_x D_y \log f(z) := f(z)^{-2}[f(z) D_x D_y f(z) - D_x f(z) D_y f(z)]$$

logarithmische Ableitung von $f$ nach $x$ und $y$ an der Stelle $z$. $\square$

## A.33 Bemerkung

Sei $f \in \mathrm{Pol}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M})$ und $z \in H^0(X, \mathcal{O}_X)^\times$. Dann ist die Polynomabbildung $DD \log f(z) : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine symmetrische Bilinearform.

Beweis:
Die Behauptung folgt aus A.25 b) und A.24 c). $\square$

# Literaturverzeichnis


[G-D] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **166**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1971.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. **52**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1977.

[J1] N. Jacobson, *Structure and Representations of Jordan Algebras*, AMS Colloquium Pub. Vol. XXXIX, Providence, 1968.

[J2] N. Jacobson, *Structure groups and Lie algebras of Jordan algebras of symmetric elements of associative algebras with involution*, Adv. in Math. **20** (1976), 106–150.

[J3] N. Jacobson, *Structure theory of Jordan Algebras*, Univ. of Arkansas Lect. Notes in Math. (5), Fayetteville, 1981.

[K1] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. **294**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1991.

[K2] M.-A. Knus, *Quaternionic Modules over* $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, Proceedings of the conference "Brauer Groups in Ring Theory and Algebraic Geometry", Antwerpen 1981, Ed. F. van Oystaeyen and A. Verschoren, Lecture Notes in Math. **917**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1982.

[K-O] M.-A. Knus, M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algebras d' Azumaya*, Lecture Notes in Math. **389**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1974.

[Ku] E. Kunz, *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie,* Vieweg-Studien Bd. **46**, Aufbaukurs Mathematik, Vieweg-Verlag, Braunschweig - Wiesbaden, 1979.

[L1] O. Loos, *Jordan Pairs*, Lecture Notes in Math. **460**, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1975.

[L2] O. Loos, *Separable Jordan Pairs over Commutative Rings*, Math. Ann. **233** (1978), 137–144.

[M1] K. McCrimmon, *The Freudenthal-Springer-Tits constructions of exceptional Jordan Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969), 495–510.

[M2] K. McCrimmon, *The Freudenthal-Springer-Tits constructions revisited*, Trans. Amer. Math. Soc. **148** (1970), 293–314.

[M3] K. McCrimmon, *Nonassociative algebras with scalar involution*, Pac. J. Math. **116** (1985), 85–109.

[Mi] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1980.

[P] H. P. Petersson, *Composition Algebras over Algebraic Curves of Genus Zero*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 473-493.

[P-R1] H. P. Petersson, M. L. Racine, *Jordan Algebras of degree 3 and the Tits Process*, J. Algebra **98** (1986), 211–243.

[P-R2] H. P. Petersson, M. L. Racine, *Classification of Algebras from the Tits Process*, J. Algebra **98** (1986), 244–279.

[R] M. L. Racine, *Maximal Subalgebras of Exceptional Jordan Algebras*, J. Algebra **46** (1977), 12–21.

[Ro] N. Roby, *Lois Polynoms et lois formelles en theorie des modules*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 3$^e$ ser. t. 80 (1963), 213–348.

[T] A. Tillmann, *Unzerlegbare Vektorbündel über algebraischen Kurven*, Dissertation, FernUniversität, Hagen, 1983.

[Z] M. Zorn, *Alternativkörper und quadratische Systeme,* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 393–402.

Günter Achhammer
An dem Heerwege 12
58095 Hagen

# Lebenslauf

| | |
|---|---|
| Name | Günter Johann Achhammer |
| Geburtstag | 23. Oktober 1958 |
| Geburtsort | Fronau, Landkreis Regensburg |
| Eltern | Ludwig Achhammer und Ehefrau Irmgard geb. Lorenz |
| Familienstand | ledig |
| Schulausbildung | 1965 - 1969 Grundschule Diesenbach,<br>Volksschule Diesenbach<br>1969 - 1975 Gymnasium in Nittenau,<br>Regental-Gymnasium<br>1975 - 1978 Gymnasium in Burglengenfeld,<br>Johann-Michael-Fischer-Gymnasium |
| Grundwehrdienst | 01.07.1978 -30.09.1979 |
| Studium | 01.07.1979 - 30.06.1986<br>Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik<br>an der Universität Regensburg |
| Berufliche Tätigkeit | 01.10.1986 - 30.09.1990 als Software-Ingenieur<br>bei der Siemens AG<br>Geschäftsgebiet Automobiltechnik,<br>im Gerätewerk Regensburg in der<br>Technischen Entwicklung<br><br>01.10.1990 als wissenschaftlicher Angestellter<br>im Lehrgebiet Algebra/Geometrie |

Hagen, 02. August 1995